

LÓGICA PARA A CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Bibliografia :

STEPHEN COLE KLENE
MATHEMATICAL LOGIC
JOHN WILEY E SONS , N. Y., 1967

J. C. KLEENE
INTRODUCTION TO METAMATHEMATICA
VAN NOSTRAND, 1952

GEORGE BOOLE
AN INVESTIGATION OF THE LAWS OF THOUGHT
DOVER PUBLICATIONS (1854)

WILLARD VAN ORMAN QUINE
METHODS OF LOGIC
HOLT, RINEHART AND WINSTON, N. Y., 1959

EVERT W. BETH
FORMAL METHODS
GORDON AND BREACH, N. Y., 1962

IRVING M. CODI
SYMBOLIC LOGIC
THE MACHILLAN CO., N. Y., 1954

D. HILBERT AND W. ACKERMANN
PRINCIPLES OF MATHEMATICAL LOGIC
CHELSEA PUBLISHING CO., N. Y., 1950

ALONZO CHURCH
INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC
PRINCETON UNIV. PRESS, N. J., 1956

INTRODUÇÃO À LÓGICA

Stephen Cole Kleene, “ Mathematical Logic”
John Wiley e Sons, 1967

OBJETIVO :

Estudar “argumentos”, no sentido de determinar se dadas conclusões “seguem logicamente” de premissas dadas.

A lógica não tenta determinar a veracidade das premissas iniciais (axionas). No entanto, na ciência, quando as conclusões são testáveis ou observáveis, pode aumentar a credibilidade nos axionas ou hipóteses se conclusões obtidas rigorosamente dos mesmos são validadas por experimentos.

Lógica Dedutiva	X	Lógica indutiva
Estudo de conseqüências de premissas dadas. Argumento dedutivamente. Legítimo: Aqueles nos quais se as premissas são verdadeiras as conclusões também são. Prem. : “Todos os jogadores da seleção são craques” “Todos os craques guiam escorts” Concl. : “Todos os jogadores da seleção guiam escorts”		Obtenção de conclusões a partir de observações repetidas de um fenômeno. 1º corvo: preto 2º corvo: preto 3º corvo: preto nº corvo: preto . . . “Todos os corvos são pretos”

Mais exemplos:

1)

- F1. Se está quente e úmido então vai chover.
- F2. Se está úmido então está quente.
- F3. Está úmido agora.

Pergunta: Vai chover?

Sejam: Q: está quente. (proposição)
U: está úmido.
C: vai chover.

Notação: F1: $Q \wedge U \rightarrow C$
F2: $U \rightarrow Q$
F3: U
R: C

Porque? U (F3) $\rightarrow Q$ (F2) portanto $U \rightarrow Q \wedge U$ (lógica) $\rightarrow C$ (F1).

2)

F1: Sócrates é um homem.

F2: Todo homem é mortal.

(Concl.) F3: Sócrates é mortal.(silogismo)

Sejam: $H(x)$: x é um homem (predicado)

$M(x)$: x é mortal

$\forall x$: “para todo x ” (quantificador universal)

F1: H (Sócrates)

F2: $\forall x (H(x) \rightarrow M(x))$

F3: M (Sócrates)

O Uso da lógica dedutiva, a partir de “axiomas” ou “postulados” na matemática é conhecido pelo menos desde Euclides (320 B.C.) na geometria. Ele partia de “termos primitivos” (ponto, reta, plano,...) e proposições aparentemente verdadeiras sobre esses termos (postulados) derivava por dedução outras proposições (teoremas).

Seu quinto postulado mostrou-se independente dos outros e mudando-o outras geometrias (não euclidianas) foram geradas.

Realmente, o sistema de Euclides não era inteiramente formal. Ele usou mais informação do que a dada pelos axiomas e regras de inferência. Só recentemente essa informação adicional foi claramente identificada e incluída nos postulados por Pasch (1882) e Hilbert (1899).

LINGUAGENS

Como estudar a lógica matemática de um modo sistêmico sem usar a própria lógica?

Separação de Linguagem

Lógica em estudo – Linguagem “objeto”

Lógica para estudar a lógica \rightarrow Linguagem do “observador” (meta linguagem).

PARADOXOS

A idéia de se usar a lógica (formal) para estudar os fundamentos da matemática teve uma vida atribulada.

A teoria (formal) de conjuntos de Cantor (~1895) logo encontrou dificuldades com a descoberta de inconsistências chamadas de “paradoxos”, que foram posteriormente classificados como “lógicos” e “semânticos”.

- 1) Lógicos
Russell (1902)

Existem conjuntos que não contêm a si mesmo
(Ex: conjunto das locomotivas)
Seja S o conjunto de todos esses conjuntos

Pergunta: $S \in S$?

- 1) Se $S \in S$ então S não contém a si mesmo, $S \notin S$
- 2) Se $S \notin S$ então por definição $S \in S$

Ou seja: $S \in S$ se e somente se $S \notin S$ (?)

Uma versão popular é a seguinte: (Russell, 1919)

“O barbeiro de uma vila faz a barba de todos os que não barbeiam a si próprios e somente deles”.

Pergunta: O barbeiro barbeia a si próprio?

- 2) Semânticos

- Ediménides (filósofo de Creta, século VI A.C.)
“Os cretenses nunca dizem a verdade”
se ela for verdadeira, é falsa, pois Ediménides era de Creta”.

Forma direta:

ESTA FRASE É FALSA

Se for verdadeira, então é falsa.
Se for falsa, então é verdadeira.

Dilema do crocodilo

Um crocodilo roubou uma criança.
Diz ao pai: “Eu devolvo a criança se você adivinhar se vou devolvê-la ou não”

Resposta do pai: “Você não vai devolvê-la”.
O que faria o crocodilo?

(nhoc, nhoc)

Faremos comentário mais tarde sobre os esforços dos lógicos e matemáticos para tratar os paradoxos ou evitá-los.

Neste curso (inicialmente):
Cálculo proposicional
Cálculo de predicados de 1ª ordem

CÁLCULO PROPOSICIONAL

Teoria de Modelos
Teoria de Provas

PROPOSIÇÕES

Dada uma sentença declarativa e não uma interrogativa ou imperativa, do tipo:

P: “João ama Maria”

Q: “A neve é preta”

R: “O Corinthians ganhou ontem”

Uma proposição é o sentido de uma sentença.

“João ama Maria” e “Maria é amada por João”	mesma prop.
“5 < 3” e “3 > 5”	mesma prop.

Para representar proposições compostas do tipo:

“Se o Corinthians ganhou então João festejou”.

São usados conectivos lógicos. Elas são representadas por “fórmulas” (Bem formadas).

SINTAXE PARA AS FÓRMULAS

Átomos ou fórmulas primas – correspondem a sentenças (simples) com estrutura interna não considerada.

P, Q, R,...

Moléculas ou fórmulas compostas – construídas a partir dos átomos usando conectivos dados (e só eles)

Equivalência \leftrightarrow , \sim , \equiv , “sse”;

Implicação \rightarrow , $>$, \supset , “se então”, “implica”, “só se”;

Conjunção \wedge , \bullet , $\&$, \cap , “E”;

Disjunção \vee , \cup , $+$, “ou” (não exclusivo);

Negação $-$, \sim , \neg , \neg , “não”;

As letras:

A, B, C, ...;

Vão representar fórmulas. Por exemplo:

$A \supset (B \supset C)$ $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Pode representar:

$$P \supset (Q \supset P) \quad P \rightarrow (Q \rightarrow P)$$

ou

$$(\sim R) \supset ((Q \vee P) \supset (Q \vee R)) \quad (\sim R) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow (Q \vee R))$$

Regras:

1. Um átomo é uma fórmula.
2. Se A é uma fórmula, $\sim A$ também é.
3. Se A e B são fórmulas, então: $A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$ também são.
4. As únicas fórmulas são as formáveis por aplicação **finita** das regras acima.

PARÊNTESIS

São usados para evitar ambigüidade

$$A \rightarrow B \leftrightarrow C$$

É $A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ ou $(A \rightarrow B) \leftrightarrow C$?

Prioridade \leftrightarrow , \rightarrow , \wedge , \vee , \sim ;

Então $C \leftrightarrow A \wedge B \rightarrow C$ é $C \leftrightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C)$;

Na lógica clássica faz-se uma série de simplificações:

- As proposições ou são verdadeiras ou falsas;
"João é velho".
- Os átomos são identificáveis;
"A neve é cor de carvão".
- Não se pressupõe valores verdade para os átomos;
"O Paraguai é o melhor time do mundo".
- \vee e \wedge e \leftrightarrow são comutativos;
"Maria casou e teve um filho".
"Maria teve um filho e casou".
"Me solta ou eu grito".
"Eu grito ou me solta".

Se cada átomo pode ser verdadeiro (V) ou falso (F) como determinar o valor-verdade de cada molécula?

Seguindo as regras da sintaxe, basta saber como avaliar:

$A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\sim A$

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\sim A$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	V	
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	

A leitura de $A \rightarrow B$ como “A implica B” em vez de “Se A então B” traz alguns inconvenientes.

Seja:

A: A prestação ao BNH subiu 20 %;

B: O filme “Duna” é o melhor em São Paulo.

Então $(A \rightarrow B)$ é V, pois A É F (?).

O mesmo com B:

O filme “Duna” é o pior em São Paulo.

Uma melhor leitura é:

“Se A é verdade, então B é verdade”.

(Essa implicação é chamada “material”).

Note também que o “ou” exclusivo teria um F na 1ª linha (A ou B, mas não ambos).

Você vai comigo ou fica em casa.

No latim havia dois “ous” - AUT exclusivo;

- VEL inclusivo.

(O símbolo V para “ou” vem de VEL).

Exemplo:

A: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\sim P \wedge Q)$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\sim P$	$\sim P \wedge Q$	A
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F

Ou seja: A é verdadeira para VV (P)=F e VV (Q) = V;

Ou VV (P) = V e VV (Q) = F.

Generalizando: Dada uma formula A com átomos $P_1 \dots P_n$.

Uma “interpretação” \mathcal{I} para A é uma associação de VV para cada P_n (existem 2^n tais \mathcal{I}).

Se A avalia A V sob \mathcal{I} , então \mathcal{I} “satisfaz” A.

Se A avalia A V sob qualquer \mathcal{I} , A é uma “tautologia”.

Se A avalia A F sob qualquer \mathcal{I} , A é uma “contradição”.

(ex: A: $P \wedge \sim P$);

Definição: A é uma tautologia \leftrightarrow A é válida.

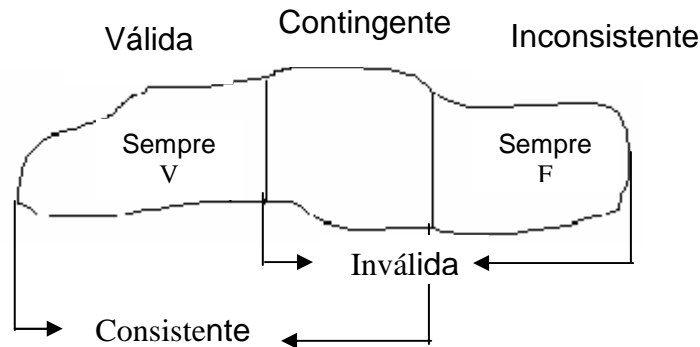
Definição: A é inválida se não for válida.

Definição: A é uma contradição \leftrightarrow A é inconsistente.

A é insatisfazível.

Definição: A é consistente se não for inconsistente.

Definição: A é contingente se não for válida nem inconsistente.



Vamos escrever $\models A$ se A for válida.

Ex: $\models P \vee \sim P$;

(\models é um símbolo da metalinguagem);

Mais tarde veremos a relação entre fórmulas válidas e fórmulas que podem ser provadas (teoria das provas).

Algumas conclusões:

- ✓ Uma fórmula é válida sse sua negação é uma contradição;
- ✓ Uma fórmula é inválida sse existe uma \mathcal{I} sob a qual ela é falsa;
- ✓ Uma fórmula é consistente se existe uma \mathcal{I} sob a qual ela é verdadeira;
- ✓ Se uma fórmula é válida então ela é consistente;
- ✓ Se uma fórmula é inconsistente então ela é inválida.

Não é sempre necessário calcular o valor verdade de uma fórmula a partir de seus átomos para estabelecer sua validade. Se acharmos só “V” avaliando a fórmula a partir de componentes não-primos, ela é válida.

Ex: Seja a fórmula:

$(P \vee Q) \supset (\sim R \supset (P \vee Q))$;

Chamando A: $P \vee Q$ B: $\sim R$;

Ela se torna:

$$A \supset (B \supset A);$$

E a tabela:

A	B	$A \supset (B \supset A)$
V	V	V V V
V	F	V V F V V
F	V	F V V F F F
F	F	F V F V F

(Que é a mesma tabela para, digamos, $R \supset (S \supset R)$)

Teorema: (Substituição de átomos) seja E uma expressão B. F. contendo somente os átomos P_1, \dots, P_n e seja E^* obtida de E substituindo P_1, \dots, P_n por fórmulas A_1, \dots, A_n uniformemente se $\models E$ então $\models E^*$.

Mais exemplos:

$$E: P \supset (Q \supset (P \wedge Q)) \quad E^*: A \supset (B \supset (A \wedge B));$$

P	Q	$P \supset (Q \supset (P \wedge Q))$
V	V	V V V V V V
V	F	V V F V V F F
F	V	F V V F F F V
F	F	F V F V F F F

$$(R \wedge S) \supset (T \supset (R \wedge S \wedge T))$$

·
·
·

Como $\models E$ então $\models E^*$

Por outro lado para mostrar que uma fórmula não é válida, em geral precisa-se usar a tabela completa.

Ex: Seja a fórmula:

$$(P \wedge \sim P) \supset Q;$$

Chamando:

$$A: (P \wedge \sim P) \quad B: Q;$$

Ela se torna:

$$A \supset B \text{ (contingente);}$$

Mas a fórmula original é válida, pois nela A é sempre F.

O converso do teorema não é verdade, ou seja:


“Se $\models E^*$ então $\models E$ ” não é válido.

$\sim \models ((\models E^*) \rightarrow (\models E))$ (ATENÇÃO: mistura de níveis!);

Teorema para quaisquer A, B e C:

1. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$ Afirmação do conseqüente (**Já visto**)
2. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$ **cadeia de inferências**
3. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
4. $\vdash A \wedge B \rightarrow A$
5. $\vdash A \wedge B \rightarrow B$
6. $\vdash A \rightarrow A \vee B$
7. $\vdash B \rightarrow A \vee B$
8. $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$ **redução ao absurdo**
10. $\vdash \sim \sim A \rightarrow A$ **dupla negação**
11. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (A \leftrightarrow B))$
12. $\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
13. $\vdash (A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$
14. $\vdash A \rightarrow A$ **identidade**
15. $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ **cadeia de inferências (outra forma)**
16. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$ **troca de premissas**
17. $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow A \wedge B \rightarrow C$ **importação \rightarrow e exportação \leftarrow**
Com 17 e 9:
 $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \sim B)) \rightarrow \sim A$ **(outra forma de redução ao absurdo)**
18. $\vdash \sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$ **negação do antecedente**
19. $\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$ **contraposição**
20. $\vdash A \leftrightarrow A$ **equivalência é reflexiva**
21. $\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$ **equivalência é simétrica**
22. $\vdash ((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \rightarrow (A \leftrightarrow C)$ **equivalência é transitiva (ainda bem !)**
23. $\vdash (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ }
24. $\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ } **\wedge e \vee são associativas**
25. $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$ }
26. $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ } **\wedge e \vee são comutativos**
27. $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ }
28. $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ } **distributividade**
29. $\vdash A \wedge A \leftrightarrow A$ }
30. $\vdash A \vee A \leftrightarrow A$ } **idempotência**
31. $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$ }
32. $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$ } **leis da eliminação**
33. $\vdash \sim \sim A \leftrightarrow A$ **lei completa da dupla negação**
34. $\vdash \sim (A \wedge \sim A)$ **negativa da contradição**
35. $\vdash A \vee \sim A$ **"tertium non datur" ou princípio do bem excluído**
36. $\vdash \sim (A \vee B) \leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$ }
37. $\vdash \sim (A \wedge B) \leftrightarrow \sim A \vee \sim B$ } **de Morgan**
38. $\vdash \sim (A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \sim B$ **negação da implicação**

A	B	$\sim (A \rightarrow B) \leftrightarrow A \wedge \sim B$
V	V	F V V V V V F F V
V	F	V V F F V V V V F
F	V	F F V V V F F F V
F	F	F F V F V F F F V

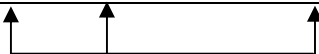


39. $\models A \vee B \leftrightarrow \sim (\sim A \wedge \sim B)$
 40. $\models A \wedge B \leftrightarrow \sim (\sim A \vee \sim B)$ } **de Morgan**
 41. $\models A \rightarrow B \leftrightarrow \sim (A \wedge \sim B)$
 42. $\models A \rightarrow B \leftrightarrow \sim A \vee B$ **(muito usado para eliminar $A \rightarrow$)**
 43. $\models A \wedge B \leftrightarrow \sim (A \rightarrow \sim B)$
 44. $\models A \vee B \leftrightarrow \sim A \rightarrow B$
 45. $\models (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$


Mais exemplos de provas:

9.

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$
V V V V V F F V V F V
V F F V V V V F F F V
F V V V F V F V V V F
F V F V F V V F V V F



$\sim (A \vee B) \rightarrow \sim A \wedge \sim B$
F V V V V F V F F V
F V V F V F V F V F
F F V V V V F F F V
V F F F V V F V V F



Sugere-se que o aluno construa tabelas para várias fórmulas válidas da lista até que esteja seguro quanto ao método de construção das tabelas.

Se a tabela de verdade para uma fórmula \underline{E} é conhecida, podemos construir uma tabela com mais átomos, repetindo a tabela de \underline{E} .

Ex:

$$E_1: P_2 \vee P_3 \quad E_2: P_2 \rightarrow P_2 \vee P_3 \quad E_3: P_1 \wedge P_3$$

P_1	P_2	P_3	E_1	E_2	E_3
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	F

De qualquer modo, se E for válida, a coluna na tabela com mais átomos só terá V's.

Para os próximos teoremas lidando com fórmulas A e B, podemos imaginar uma tabela com todos os átomos que apareçam em A e B (ou mesmo mais átomos).

Teorema: Se $\models A$ e $\models A \rightarrow B$ então $\models B$ (Modus Ponens).

Idéia da prova:

Imagine a (super) tabela mencionada. Nela, como $\models A$, a coluna de A só tem V's. Para que a coluna de $A \rightarrow B$ só tenha V's, é preciso que B seja V em todas as linhas.

Teorema: a) Para cada interpretação, $A \leftrightarrow B$ é V sse A e B tem o mesmo valor verdade.

b) $\models A \leftrightarrow B$ sse A e B tem a mesma tabela (coluna) de verdade.

Teorema: (da substituição)

Seja C_a uma fórmula com uma parte consecutiva A e seja C_b uma fórmula obtida de C_a substituindo A por B. Então, se $\models A \leftrightarrow B$ então $\models C_a \leftrightarrow C_b$.

$$\text{Ex: } \overbrace{\models \sim P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow \underbrace{\sim P \vee Q}_A)}^{C_a} \leftrightarrow \overbrace{\sim P \vee Q \rightarrow (P \rightarrow \underbrace{(P \rightarrow Q)}_B)}^{C_b}$$

Outra consequência do fato de duas fórmulas equivalentes terem a mesma coluna na tabela de verdade (e também dos resultados 20, 21 e 22, pg. 9) é que se pode montar "cadeias de equivalências" assim:

Se $\models A_0 \leftrightarrow A_1$ e $\models A_1 \leftrightarrow A_2$ e $\models A_2 \leftrightarrow A_3$ então $A_i \leftrightarrow A_j$ $i, j = 0, 1, 2, 3$ (por exemplo $A_1 \sim A_3$, etc... e, em particular, $A_0 \sim A_3$).

Mais geralmente, se $\models A_0 \leftrightarrow A_1, \dots, \models A_{m-1} \leftrightarrow A_m$ então $A_i \leftrightarrow A_j$ $i, j = 0, 1, \dots, m$.

Com o “modus ponens”, o teorema da substituição, e cadeias de equivalências, estabelece-se uma base para provas na teoria de modelos (isto já é uma transição para teoria de provas).

Por exemplo:

Teorema = Seja E uma fórmula construída com átomos P_1, \dots, P_n , negação \sim , “E”, \wedge , e “ou”, \vee . Seja E^* uma fórmula obtida de E, trocando \wedge e \vee e negando cada átomo. Então, $\models \sim E \leftrightarrow E^*$.

Idéia da prova:

Usando 36 e 37 (de Morgan) pg.10 e cadeias de equivalências, podemos ir migrando “para dentro” \sim , trocando \wedge e \vee . Usando 33, eliminando as duplas negações.

Exemplo:

Seja $E: \sim Q \wedge (\sim P \vee Q)$ $E^*: Q \vee (P \wedge \sim Q)$.

Então:

$$\models \sim (\sim Q \wedge (\sim P \vee Q)) \overset{37}{\leftrightarrow} \sim \sim Q \vee \sim (\sim P \vee Q) \overset{36}{\leftrightarrow} \sim \sim Q \vee (\sim \sim P \wedge \sim Q) \overset{33}{\leftrightarrow} Q \vee (P \wedge \sim Q) \underset{E^*}{\leftrightarrow}$$

Corolário: Toda fórmula E é equivalente a outra fórmula F (ou seja, $\models E \leftrightarrow F$) na qual \sim é só aplicada a átomos.

Idéia da prova:

Primeiro eliminamos \leftrightarrow e \rightarrow usando 45, 41, 42 (pg.10). Depois, as duplas negações por 33. Finalmente, o teorema é usado para ir migrando para dentro as \sim até chegar à forma desejada.

Exemplo:

$$\models \sim (\sim P \rightarrow \sim (\sim \sim P \vee \sim Q) \wedge R)$$

42

$$\leftrightarrow \sim (\sim \sim P \vee (\sim (\sim \sim P \vee \sim Q) \wedge R))$$

33

$$\leftrightarrow \sim (P \vee (\sim (P \vee \sim Q) \wedge R))$$

Teorema

$$\leftrightarrow \sim (P \vee (\sim P \wedge Q \wedge R))$$

Teorema

$$\leftrightarrow \sim P \wedge (P \vee \sim Q \vee \sim R)$$

Pela cadeia de equivalências:

$$\models \sim (\sim P \rightarrow \sim (\sim \sim P \vee \sim Q) \wedge R) \leftrightarrow \sim P \wedge (P \vee \sim Q \vee \sim R)$$

Teorema (dualidade)

Sejam E e F duas fórmulas do tipo teorema anterior. Sejam E* e F* obtidas de E e F trocando \wedge por \vee (e vice-versa), então:

- a) Se $\models \sim E$ então $\models E^*$
- b) Se $\models E$ então $\models \sim E^*$
- c) Se $\models E \leftrightarrow F$ então $\models E^* \leftrightarrow F^*$
- d) Se $\models E \rightarrow F$ então $\models F^* \rightarrow E^*$

Exemplos:

$$1) \quad \models ((\sim Q \vee P) \vee (Q \wedge \sim P) \wedge (\sim (Q \wedge \sim P) \vee \sim (\sim Q \vee P))) \text{ E}$$

Daí segue:

$$\models \sim (((\sim Q \wedge P) \wedge (Q \vee \sim P)) \vee (\sim (Q \vee \sim P) \wedge \sim (\sim Q \wedge P))) \text{ E}^*$$

$$2) \quad \models \underbrace{\sim (\sim Q \vee P)}_E \leftrightarrow \underbrace{(Q \wedge \sim P)}_F$$

Daí segue:

$$\models \underbrace{\sim (\sim Q \wedge P)}_{E^*} \leftrightarrow \underbrace{(Q \vee \sim P)}_{F^*}$$

CONSEQÜÊNCIAS VÁLIDAS

Até agora lidamos só com fórmulas válidas (tautologias).

A lógica, no entanto, tenta responder também “o que segue”, ou o que é “uma conseqüência” de fatos, asserções, etc, externo à lógica. Veremos como tratar isto na teoria de modelos.

Suponha que se tenha:

- P: Paulo matou João
- Q: Maria vai fugir
- R: O delegado foi enganado

E, por outra razão, a asserção é feita:

$$A: (P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R)$$

(isto é, determinou que é verdadeira).

O que sabemos e o que isso acarreta?

	P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R)$	$Q \vee R$	$P \rightarrow Q$	$P \wedge \sim Q$	$\sim P \vee Q$
1	V	V	V	V	V	V	F	V
2	V	V	F	V	V	F	F	V
3	V	F	V	F	V	V	V	F
4	V	F	F	F	F	F	V	F
5	F	V	V	V	V	V	F	V
6	F	V	F	F	V	V	F	V
7	F	F	V	V	V	V	F	V
8	F	F	F	F	F	V	F	V

Sabemos então que estados restritos às interpretações 1, 2, 5 e 7.

Pode-se dizer que a asserção de A acarreta:

“Ou Maria vai fugir ou o delegado foi enganado”

Mais geralmente:

Sejam A e B duas fórmulas com átomos P_1, P_2, \dots, P_n ; B é uma “consequência válida” de A, $A \models B$, sse, nas tabelas de verdade construídas a partir de P_1, \dots, P_n , B tem V em todas as interpretações onde A tem V.

$A \models B$ pode ser lido “A acarreta B”.

Outro exemplo:

Suponha que se saiba, que o preço de ações (BOVESPA) cai se a taxa de juros sobe e que muitos investidores ficam insatisfeitos quando o índice BOVESPA cai.

Suponha que a taxa de juros suba, vamos mostrar que isto acarreta (no caso, indica) a insatisfação dos investidores.

Temos que mostrar, sendo:

P: Taxa de juros sobe

S: Índice BOVESPA cai

U: Muitos investidores insatisfeitos

Que:

$$P \rightarrow S, S \rightarrow U, P \models U$$

P	S	U	$P \rightarrow S$	$S \rightarrow U$	P	U
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	F

Só há uma interpretação sob a qual as 3 fórmulas são verdadeiras - e nela U também é.

Portanto U é uma consequência válida das 3 fórmulas.

Note que “ $A \models B$ ” é mais forte do que “se $\models A$ então $\models B$ ” (ou seja “ $A \models B$ ” implica em “se $\models A$ então $\models B$ ”), mas se não for válida (exemplo da pg. 15), “se $\models A$ então $\models B$ ” é verdade mas $A \models B$ pode não ser.

Teorema: a) $A \models B$ sse $\models A \rightarrow B$

b) $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ sse $A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \models A_n \rightarrow B$

No caso acima,

$P \rightarrow S, S \rightarrow U, P \models U$ sse $P \rightarrow S, S \rightarrow U, \models P \rightarrow U$
 sse $S \rightarrow U, P \models (P \rightarrow S) \rightarrow U$
 etc..

Teoria de provas:

Uma prova formal (no cálculo de proposições) é uma lista de fórmulas tais que:

- Cada uma é um “axioma” ou
- Segue das anteriores por uma “regra de inferência”,

E tal que a última fórmula da lista é aquela a ser provada.

Vamos distinguir “prova” de “dedução” – na “dedução” algumas fórmulas podem ser hipóteses ou asserções cuja verdade seja estabelecida fora da lógica.

Para o cálculo proposicional basta:

- 1) Como axiomas as fórmulas válidas de 1) a 13) (pg. 9)
- 2) Como única regra de inferência o modus ponens (pg. 11)

Cada fórmula, de 1) a 13) é na verdade, um “esquema” (gerador) de axiomas, pois os símbolos “A”, “B”,... fazem o papel de qualquer fórmula.

Ex:

4) $\models A \wedge B \rightarrow A$ (esquema)

$P \wedge Q \rightarrow P$ (axioma)

$(P \vee Q) \wedge R \rightarrow (P \vee Q)$ (axioma)

$(\sim P \wedge S) \wedge (P \vee \sim R) \rightarrow (\sim P \wedge S)$ (axioma)

(Substituição de átomos)

Ex. de prova formal: Prova de $A \rightarrow A$

- 1: $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ esquema 1 (análise da prova),
- 2: $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow A))$ esquema 2,
- 3: $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ Modus Ponens, 1, 2,
- 4: $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ esquema 1,
- 5: $A \rightarrow A$ modus ponens, 4, 3

Se existe uma prova para uma fórmula B, diz-se que B é “demonstrável”, “provável”, “um teorema” e escreve-se:

$$\vdash B$$

Ex: Com a prova acima pode –se escrever $\vdash A \rightarrow A$

Dedução Formal: Uma lista de fórmulas B_1, \dots, B_i é uma dedução formal de B; a partir de hipóteses A_1, \dots, A_m se cada $B_j, j = 1 \dots i$ é um dos A_i , ou um dos axiomas 1) a 13), ou segue das fórmulas anteriores pelo modus ponens.

Escreve-se $A_1, \dots, A_m \vdash B_i$

Aqui fica claro que, se não existem os $A_1 \dots A_m$, então $\vdash B_i$ significa que B_i é deduzível somente dos axiomas (portanto é um teorema).

Exemplo:

Sejam $A_1: A \rightarrow (B \rightarrow C)$

$A_2: A \wedge B$

E vamos deduzir C;

1: $A \wedge B$	A_2 – hipótese
2: $A \wedge B \rightarrow A$	axioma 4
3: A	M. ponens, 1,2
4: $A \rightarrow (B \rightarrow C)$	A_1 – hipótese
5: $B \rightarrow C$	Modus ponens, 3, 4
6: $A \wedge B \rightarrow B$	axioma 5
7: B	Modus ponens ,1, 6
8: C	Modus ponens, 7, 5

então pode-se escrever $A_1, A_2 \vdash C$

Teorema: a) para $m \geq 1$,

$$A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A_1 \quad (\text{trivial})$$

.

$$A_1, A_2, \dots, A_m \vdash A_m$$

.

b) para $m, p \geq 0$ (está parte b é a mais importante),

$$\underline{\text{se}} \quad A_1, \dots, A_m \vdash B_1$$

.

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_p$$

$$\underline{\text{e}} \quad B_1, \dots, B_p \vdash C$$

$$\underline{\text{então}} \quad A_1, \dots, A_m \vdash C$$

Prova de b: Se $B_1, \dots, B_p \vdash C$ então existe uma lista de fórmulas deduzindo C. Nessa lista, substituindo cada B_i por sua dedução de A_1, \dots, A_m , vamos ter uma outra lista deduzindo C de A_1, \dots, A_m .

O que quer dizer o teorema?

Suponha que A_1, \dots, A_m seja uma lista dada e que estejamos interessados em fórmulas B deriváveis de A_1, \dots, A_m . O teorema diz que o A_i são dessa classe, e que qualquer fórmula derivável de fórmulas da classe também estão nela – não é preciso deduzir sempre a partir das hipóteses, e pode-se aproveitar resultados já obtidos. (o mesmo se aplica aos teoremas, com a lista dos A_i vazia).

Comentário:

Temos quatro expressões:

- 1) $A \models B$ B é consequência válida de A
- 2) $\models A \rightarrow B$ A fórmula $A \rightarrow B$ é válida (tautologia)
- 3) $\vdash A \rightarrow B$ A fórmula $A \rightarrow B$ é derivável dos axiomas usando modus ponens
- 4) $A \vdash B$ B é derivável de A usando também os axiomas (e modus ponens)

Já vimos que 1) e 2) são equivalentes.

Teorema:

Se $\vdash A \rightarrow B$ então $A \vdash B$
Ou, mais geralmente, se $A_1, \dots, A_{m-1} \vdash A_m \rightarrow B$
Então, $A_1, \dots, A_m \vdash B$

Prova: Constrói-se uma prova de B assim:

1:	}	Prova de $A_m \rightarrow B$ a partir de A_1, \dots, A_{m-1}
2:		
.		
.		
K: $A_m \rightarrow B$		
K + 1: A_m		Hipótese
K + 2: B		Modus ponens, K + 1, K

Portanto $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}, A_m \vdash B$

Teorema da Dedução (Herbrand, 1930).

a) Se $A \vdash B$ então $\vdash A \rightarrow B$

Ou, mais geralmente:

b) $A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B$, então $A_1, A_2, \dots, A_{m-1} \vdash A_m \rightarrow B$

Este teorema, com o anterior, estabelece a equivalência de $A \vdash B$ e $\vdash A \rightarrow B$ (ou, mais geralmente, de $A_1, \dots, A_m \vdash B$ e $A_1, \dots, A_{m-1} \vdash A_m \rightarrow B$)

Agora podemos ligar \models e \vdash

Teorema:

Toda fórmula demonstrável é válida – ou seja, para qualquer B, se $\vdash B$ então $\models B$

Prova: Os axiomas 1) a 13) são válidos.

Pelo teorema da pg. 14, o modus ponens preserva a validade – portanto qualquer fórmula obtida a partir dos axiomas e usando o M.P. é válida.

(Corolário)

Teorema:

Para nenhuma fórmula B, $\vdash B$ e $\vdash \sim B$, (consistência do cálculo proposicional)

Prova: Suponha que $\vdash B$ e $\vdash \sim B$ então, pelo teorema anterior $\models B$ e $\models \sim B$, mas se $\models B$ então B tem só “V’s” na tabela de verdade e portanto $\sim B$ tem só “F’s” e não pode ser $\models \sim B$ e vice-versa (contradição).

O teorema estabelece a consistência do método de provas no cálculo proposicional com respeito à validade (toda fórmula deduzível é válida).

O corolário estabelece a consistência simples (não se pode derivar B e também $\sim B$).

(Não está dito que dado B, ou uma prova de B pode ser achada ou de $\sim B$ – isto é decidabilidade).

O converso do teorema anterior estabelece a “completeza” do cálculo de proposições.

Daremos uma idéia de um método de prova desse fato:

Lema 1 : Para cada linha das cinco tabelas de verdade da pg.6, uma relação de provabilidade pode ser escrita.

A	B	$A \rightarrow B$	RELAÇÃO	
V	V	V	$A, B \vdash A \rightarrow B$	$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$
V	F	F	$A, \sim B \vdash \sim (A \rightarrow B)$	1. $\vdash B \rightarrow (B \rightarrow A)$
F	V	V	$\sim A, B \vdash A \rightarrow B$	2. $\vdash B$
F	F	V	$\sim A, \sim B \vdash A \rightarrow B$	3. $\vdash A \rightarrow B$

Ex: Para provar a primeira:

1. $A, B, A \vdash B$ (teorema da pág. 18)
2. $A, B \vdash A \rightarrow B$ (Herbrand)

Lema 2: para qualquer fórmula E com átomos P_1, \dots, P_n , uma relação como acima pode ser escrita para cada uma das 2^n linhas.

Ex: Seja E: $(P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R)$ (ver pg. 14)

Relações:

$$\begin{array}{l}
 P, Q, R \vdash E \\
 P, Q, \sim R \vdash E \\
 P, \sim Q, R \vdash \sim E \\
 \vdots \\
 \sim P, \sim Q, \sim R \vdash \sim E
 \end{array}$$

Lema 3 : Se a fórmula do Lema 2 for válida (isto é, $\vdash E$), então $P_1 \vee \sim P_1, \dots, P_n \vee \sim P_n \vdash E$

Prova: Pode-se mostrar que, para uma lista de fórmulas Γ e fórmulas A e B,

Se $\Gamma, A \vdash C$ e $\Gamma, B \vdash C$, então $\Gamma, A \vee B \vdash C$
(prova por casos)

Então, no caso de $n = 2$ teríamos, pelo lema anterior,

$$\begin{array}{l}
 P_1, P_2 \vdash E \\
 P_1, \sim P_2 \vdash E \\
 \sim P_1, P_2 \vdash E \\
 \sim P_1, \sim P_2 \vdash E
 \end{array}$$

Usando “a prova por casos”, temos:

$$\begin{array}{l}
 P_1, P_2 \vee \sim P_2 \vdash E \\
 \sim P_1, P_2 \vee \sim P_2 \vdash E
 \end{array}$$

E usando mais uma vez:

$$P_1 \vee \sim P_1, P_2 \vee \sim P_2 \vdash E$$

(para qualquer $n > 2$ a prova é a mesma)

Lema 4: Para qualquer A , $\vdash A \vee \sim A$ (ver pg.9)

Teorema: Toda fórmula válida é provável (ou seja, se $\models E$ então $\vdash E$) no cálculo proposicional.

Prova: Se E é válida, então:

$$P_1 \vee \sim P_1, P_2 \vee \sim P_2, \dots, P_n \vee \sim P_n \vdash E$$

Mas, pelo lema 4:

$$\begin{array}{l} \vdash P_1 \vee \sim P_1 \\ \vdash P_2 \vee \sim P_2 \\ \vdots \\ \vdash P_n \vee \sim P_n \end{array}$$

E portanto, pelo teorema da pg. 18, $\vdash E$.

Que estabelece a completeza do cálculo proposicional.

Sem o “Tertium nom datur” não se pode provar a completeza (E.G., intuicionismo).

Pode-se usar então \models e \vdash como sinônimos (na metalógica).

Todas as outras fórmulas que sabemos ser válidas são teoremas do cálculo de proposições.

CÁLCULO DE PREDICADOS

O cálculo de predicados inclui o cálculo proposicional. Nele, podemos usar variáveis e quantificadores.

Ex:

“Sócrates é um homem” proposição

“_____ é um homem” predicado

“x é um homem” é uma função que mapeia o conjunto dos x para { V, F }

Convenção: Por “predicado” queremos dizer uma função $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variáveis independentes, com valores em { V, F }.

Casos particulares:

$n = 0$	proposição	João matou Maria
$n = 1$	propriedade	x é verde
$n = 2$	relação binária	x é pai de y
$n = 3$	relação ternária	x é filho de y e z
.		
.	etc...	

Os quantificadores serão:

$\forall x$ “para todo x”

$\exists x$ “existe um x”

Outro exemplo:

Seja $A(x, y)$ o predicado “x ama y”.

Alguém ama Joana $\exists x A(x, \text{Joana})$

Ninguém ama Joana $\sim \exists x A(x, \text{Joana})$

Todos amam Joana $\forall x A(x, \text{Joana})$

Todo mundo ama alguém $\forall x \exists y A(x, y)$

Uma pessoa (pelo menos) é amada por todos $\exists y \forall x A(x, y)$

Alguém ama a todos $\exists x \forall y A(x, y)$

Todo mundo ama a si próprio $\forall x, A(x, x)$

Sintaxe: partindo de um nome de predicado $P(-, -, -, \dots)$ e escolhendo variáveis para os “buracos” temos um átomo (Ex: $P(x, y, x, z)$ é um átomo).

As fórmulas são formadas por:

- 1) Todo átomo é uma fórmula;
- 2) Se A e B são fórmulas, então $A \leftrightarrow B$, $A \rightarrow B$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $\sim A$ são fórmulas;
- 3) Se A é uma fórmula e x uma variável, então $\forall x A$ e $\exists x A$ são fórmulas;
- 4) As únicas fórmulas etc...etc... (ver pg. 5)

Escopo de um quantificador é a parte de uma fórmula a qual o quantificador se aplica. Uma ocorrência de uma variável é dominada se ela está no escopo de seu quantificador. Ela é livre se não for dominada.

Exemplo:

$$\forall x (P(x) \wedge \exists x Q(x, z) \rightarrow \exists y R(x, y)) \vee Q(z, x)$$

livre

Esta fórmula é equivalente a:

$$\forall x (P(x) \wedge \exists w Q(w, z) \rightarrow \exists z R(x, z)) \vee Q(z, x)$$

livre

O mesmo ocorre em cálculo, com:

$$\int_0^j t^2 y dt \quad e \quad \int_0^t x^2 y dx$$

Por exemplo:

$$3x + \int_0^j t^2 j dt \quad \text{é o mesmo que} \quad 3x + \int_0^j x^2 j dx$$

Vamos assumir: a) que todas as variáveis tem valores no mesmo domínio ("one-sorted" C. de P.),

b) só se quantificam variáveis (C. de P. de 1ª ordem).

- ✓ Dado um predicado $P(x, y, z, \dots)$ vamos considerar que, para x, y, z, \dots com quaisquer valores em D , P só toma valores "V" ou "F" (meio excluído).
- ✓ As tabelas de verdade para $\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, \sim$ são as mesmas do cálculo de proposições.
- ✓ $\forall x A$ é verdadeiro (V) se para cada possível valor de x em D , substituído nas ocorrências livres de x em A , a avaliação de A é "V".
- ✓ $\exists x A$ é verdadeiro se pelo menos para um valor de x em D , A avalia a "V".

Como montar a tabela de verdade para uma fórmula E ?

- ❖ D é um domínio qualquer – precisamos saber pelo menos o #D.

Exemplo:

$$E: P(y) \vee \forall x (P(x) \rightarrow Q)$$

Para avaliar isto, precisamos:

- 1) # D - digamos # $D=2$, $D = \{1, 2\}$,
- 2) Uma interpretação para P – qual função $D \rightarrow \{V, F\}$?
- 3) Um valor verdade para Q ,
- 4) Um valor para y em D .

Quais são as funções possíveis para P ?

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
1	V	V	F	F
2	V	F	V	F

A tabela resultante tem 16 linhas

P(x)	Q	Y	E:	$P(y) \vee \forall x (P(x) \rightarrow Q)$
P ₁	V	1	V	
P ₁	V	2	V	
P ₁	F	1	V	
P ₁	F	2	V	
<hr/>				
P ₂	V	1	V	
P ₂	V	2	V	(Q é V)
P ₂	F	1	V	(P ₂ (y) é V)
P ₂	F	2	F	(para x=1, P ₂ (x) é V e Q é F)
<hr/>				
P ₃	V	1	V	
P ₃	V	2	V	
P ₃	F	1	F	
P ₃	F	2	V	
<hr/>				
P ₄	V	1	V	
P ₄	V	2	V	(em P ₄ , $\forall x (P_4(x) \rightarrow Q)$ é V)
P ₄	F	1	V	
P ₄	F	2	V	

- ❖ Se D é grande e E é complicada, essa tabela pode ser enorme.
- ❖ Se D é infinito, ela não pode ser construída.
- ❖ Uma fórmula E no cálculo de predicados é “válida” ($\models E$) se para qualquer D a tabela de E só tem “V”.
- ❖ No caso acima, estabelecemos que E não é válida.
- ❖ Se E for válida para um dado D, podemos escrever $D \models E$.

Exemplo: No caso acima, vamos avaliar $\forall y E$ e $\exists y E$

P(x)	Q	$\forall y E$	$\exists y E$
P ₁	V	V	V
P ₁	F	V	V
<hr/>			
P ₂	V	V	V
P ₂	F	F	V
<hr/>			
P ₃	V	V	V
P ₃	F	F	V
<hr/>			
P ₄	V	V	V
P ₄	F	V	V

Portanto, neste caso, $\exists y (P(y) \vee \forall x (P(x) \rightarrow Q))$ é válida para #D=2 ou seja, $D = \{1, 2\} \models \exists y E$.

Alguns resultados sobre validade:

O teorema da Pg. 8 (substituição de átomos) vale quando:

E é uma fórmula do cálculo de proposições.

A_1, A_2, \dots, A_n são fórmulas do C. de Pred.

Se $\models E$ (no C. de prop.) então $\models E^*$ (no C. de pred.).

Exemplo:

$E: P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$

$E^*: (\forall x (P(x) \rightarrow Q)) \rightarrow (S(y) \rightarrow (\forall x (P(x) \rightarrow Q) \wedge S(y)))$

Com P trocado por $\forall x (P(x) \rightarrow Q)$

Q trocado por $S(y)$

Como $\models E$ então $\models E^*$

Segue que os 45 resultados da pg.9 também valem com A, B e C, quaisquer fórmulas do cálculo de predicados.

Exemplo:

43. $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(y) \leftrightarrow \sim (\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \sim R(y))$

com A: $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$

B: $R(y)$

Também vale o modus ponens :

Se $\models A$ e $\models A \rightarrow B$ então $\models B$

Com A, B quaisquer fórmulas do C. de Pred.

Teorema: Seja x uma variável, A (x) uma fórmula, r uma variável (pode ser o próprio x), e A (r) uma fórmula obtida substituindo os x livres de A (x) por r. Se r é livre para x em A, então:

a) $\models \forall x A(x) \rightarrow A(r)$

b) $\models A(r) \rightarrow \exists x A(x)$

Segue como corolário que:

$\models \forall x A(x) \rightarrow A(x)$

$\models A(x) \rightarrow \exists x A(x)$

(que são usados como axiomas na teoria de provas)

Para melhor justificar o teorema, vamos mostrar um exemplo:

Queremos mostrar? $\models P(y) \rightarrow \exists x P(x)$

Suponha que $D = \{1, 2, 3\}$

As oito funções possíveis para P são :

x	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈
1	V	V	V	V	F	F	F	F
2	V	V	F	F	V	V	F	F
3	V	F	V	F	V	F	V	F

A tabela para $P(y) \rightarrow \exists x P(x)$ terá 24 linhas (8 P's, cada um com 3 valores para y).

Vejamos linhas típicas:

P(x)	Y	$P(y) \rightarrow \exists x P(x)$
P ₅	2	V V V (X=2)
P ₆	1	F V (qualquer x)
P ₇	2	F V F (sempre)

Vemos que:

- ✓ Quando P_i (j) é V, então $\exists x P_i(x)$ é V (x=j),
- ✓ Quando P_i (j) é F, então A "→" é V,
- ✓ Quando i=8, P₈ (j) é F e $\exists x P_8(x)$ também.
- ❖ Esse raciocínio é geral, vale para qualquer D,
- ❖ Também generaliza para $\vdash A(r) \rightarrow \exists x A(x)$ se r é livre para x em A

Teorema: Seja x uma variável, A(x) uma fórmula, e C outra fórmula, na qual não há ocorrência livre de x. Então:

- a) Se $\vdash C \rightarrow A(x)$ então $\vdash C \rightarrow \forall x A(x)$,
- b) Se $\vdash A(x) \rightarrow C$ então $\vdash \exists x A(x) \rightarrow C$

Teoria de provas:

Para montar o Cálculo de Predicado como sistema formal, usamos :

- 1- Os esquemas de axiomas de 1 a 13, com fórmulas A, B, C do C. de Pred.
- 2- A mesma regra de inferência,
- 3- Mais dois esquemas de axiomas:
 14. $\forall x A(x) \rightarrow A(x)$
 16. $A(r) \rightarrow \exists x A(x)$ (r é livre p/x em A)
- 4- Mais duas regras de inferência:
 - Regra \forall - de $C \rightarrow A(x)$ pode-se passar a $C \rightarrow \forall x A(x)$
 - Regra \exists - de $A(x) \rightarrow C$ pode-se passar a $\exists x A(x) \rightarrow C$
(Teorema acima)
(C não tem x livre)

A definição de Prova B_1, \dots, B_l de B_i , e de B_i ser demonstrável (um teorema), $\vdash B_i$, são as mesmas do C. de Prop. (mas com mais axiomas e regras de inferência).

Uma dedução B_1, \dots, B_l de B_i a partir de A_1, \dots, A_m é definida do mesmo modo, com o seguinte detalhe:

Em tal dedução dizemos que “todas as variáveis são mantidas constantes” se as regras \forall e \exists para uma variável livre de um A_i só são usadas (se forem) antes da primeira ocorrência de A_i na prova.

Se existir dedução de B_i a partir de A_1, \dots, A_m mantendo as variáveis constantes, escreve-se:

$$A_1, \dots, A_m, \vdash B_i$$

Todas as provas do Cal. de Prop. e deduções no mesmo são provas e deduções no C. de Pred. (mantendo as variáveis constantes) uma vez que as regras \forall e \exists não são usadas, nem os dois axiomas adicionais.

Exemplo de dedução:

Suponha que se queira deduzir $R \rightarrow \forall x P(x)$ a partir de $\forall y (R \rightarrow P(y))$ (migração de quantificador)

1. $\forall y P(y) \rightarrow P(x)$ axiomas 14
2. $\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)$ regra \forall , 1. \leftarrow regra \forall usada antes de A_1
3. $\forall y (R \rightarrow P(y))$ hipótese A_1
4. $\forall y (R \rightarrow P(y)) \rightarrow (R \rightarrow P(y))$ axioma 14, 3
5. $R \rightarrow P(y)$ M.P.
6. $R \rightarrow \forall y P(y)$ 5, regra $\forall \leftarrow$ depois de A_1 (y não é livre)
7. $(\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)) \rightarrow (R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x)))$ axioma 1
8. $R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x))$ M.P., 2, 7
9. $(R \rightarrow \forall y P(y)) \rightarrow ((R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x))) \rightarrow (R \rightarrow \forall x P(x)))$ axioma 2
10. $(R \rightarrow (\forall y P(y) \rightarrow \forall x P(x))) \rightarrow (R \rightarrow \forall x P(x))$ M.P., 6, 9
11. $R \rightarrow \forall x P(x)$ M.P., 8, 10

Então, podemos escrever:

$$\forall y (R \rightarrow P(y)) \vdash R \rightarrow \forall x P(x)$$

✓ O teorema de Herbrand (pg.18) também vale no cálculo de predicados.

$$\text{Se } A_1, A_2, \dots, A_m \vdash B \text{ então } A_1, A_2, \dots, A_{m-1} \vdash A_m \rightarrow B$$

- ✓ Mostra-se que, também no cálculo de predicados, para qualquer E, se $\vdash E$ então $\models E$ (consistência com respeito à validade)
- ✓ O converso foi provado por Gödel em 1930,

Se $\vdash E$ então $\models E$ (completeza do cálculo de predicados).

O cálculo de predicados, no entanto, não é decidível – não pode existir um algoritmo que, quando apresentamos qualquer fórmula, decida se ela é um teorema ou não.

Ou seja, o conjunto dos teoremas do cálculo de predicados é recursivamente enumerável (pode ser gerado 1 a 1, em seqüência), mas não é recursivo – o conjunto dos não-teoremas não é recursivamente enumerável.

Métodos Automáticos de Prova no C. P.

Para aplicar certos métodos automáticos de prova no C. P., as fórmulas são colocadas em uma forma conveniente.

- 1) Os símbolos \rightarrow e \leftrightarrow são eliminados
Isto é feito escrevendo \leftrightarrow com \rightarrow e \wedge , e escrevendo $\sim A \vee B$ no lugar de $A \rightarrow B$

Exemplo:

$(\forall y (R \rightarrow P(y))) \rightarrow (R \rightarrow P(y))$	$A \leftrightarrow B$
$\sim (\forall y (R \rightarrow P(y))) \vee (R \rightarrow P(y))$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$\sim (\forall y (\sim R \vee P(y))) \vee (\sim R \vee P(y))$	$C \rightarrow D$
	$\sim C \vee D$

- 2) Reduz-se o âmbito das negações para que \sim se aplique a só um predicado (migrar a negação p/ dentro da fórmula).

Usa-se:

$\sim (A \wedge B)$	por $\sim A \vee \sim B$	} de Morgan
$\sim (A \vee B)$	por $\sim A \wedge \sim B$	
$\sim \sim A$	por A	
$\sim \forall x A$	por $\exists x (\sim A)$	
$\sim \exists x A$	por $\forall x (\sim A)$	

Exemplo :

$$\sim (\forall y (\sim R \vee P(y))) \vee (\sim R \vee P(y))$$

Dá $\exists y (R \wedge \sim P(y)) \vee (\sim R \vee P(y))$ **verifique !**

- 3) Trocar o nome das variáveis dominadas p/ evitar confusões

$$\exists y (R \wedge \sim P(y)) \vee (\sim R \vee P(y))$$

Por:

$$\exists z (R \wedge \sim P(z)) \vee (\sim R \vee P(y))$$

- 4) (Discutível!) Eliminar os quantificadores existenciais:

$$\forall z \exists x \exists y P(x,y,z)$$

no caso particular de x depende do z : $g(z)$
 no caso particular de y depende do z : $h(z)$
 $\forall z P(g(z), h(z), z)$ $g, h : D \rightarrow D$

Se não houver quantificador universal:

Subst. $\exists z (R \wedge \sim P(z)) \vee (\sim R \vee P(y))$

Por: $(R \wedge \sim P(a)) \vee (\sim R \vee P(y))$ (**a é um z que existe**)

5) Mover os quantificadores universais para o início

A forma resultante chama-se “FRENEX”

6) Por o corpo da fórmula na forma conjuntiva (conjunção de disjunções).

- O mesmo que o produto de somas na álgebra booleana.

$$(R \wedge \sim P(a)) \vee (\sim R \vee P(y)) \quad (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ (R \vee \sim R) P(y) \wedge (\sim P(a) \vee \sim R \vee P(y)) \end{array}$$

7) Usando-se as regras de introdução e eliminação, assume-se que todas as variáveis são dominadas e não se escrevem os quantificadores universais (ficam subentendidos) e consideram-se as cláusulas (disjunções) separadamente. Para que a expressão seja válida (provável) todas as cláusulas precisam ser.

Método de Prova: (Prova por refutação)

Se $\Sigma \vdash A$ então o conjunto $\{ \Sigma, \sim A \}$ não pode ser satisfeito. Colocando tanto Σ como $\sim A$ em forma de cláusulas, vamos obter um conjunto $C \{ \Sigma, \sim A \}$. O problema então é mostrar que um conjunto de cláusulas C não pode ser satisfeito qualquer que seja o domínio D.

Para isso, vamos construir um domínio D (c) que depende diretamente do conjunto de cláusulas C (domínio de Herbrand).

1- Todas as constantes listadas em C estão em D (c) (se não houver nenhuma, postula-se uma).

2- Todas as funções $f(x, y, z, \dots)$ tem que estar em D (c) com elementos já gerados como argumentos.

Mesmo em casos simples, esse D (c) é infinito (contável).

Exemplo:

Seja o seguinte conjunto C , que se deseja reduzir:

$$P(x) \vee Q(y), \quad R(g(x) \vee P(a)), \quad \sim P(a), \quad \sim Q(b)$$

Então:

1) $a, b \in D$;

2) $g(a), g(b) \in D$;

$g(g(a)), g(g(b)) \in D$;
etc...

Ex: a : João

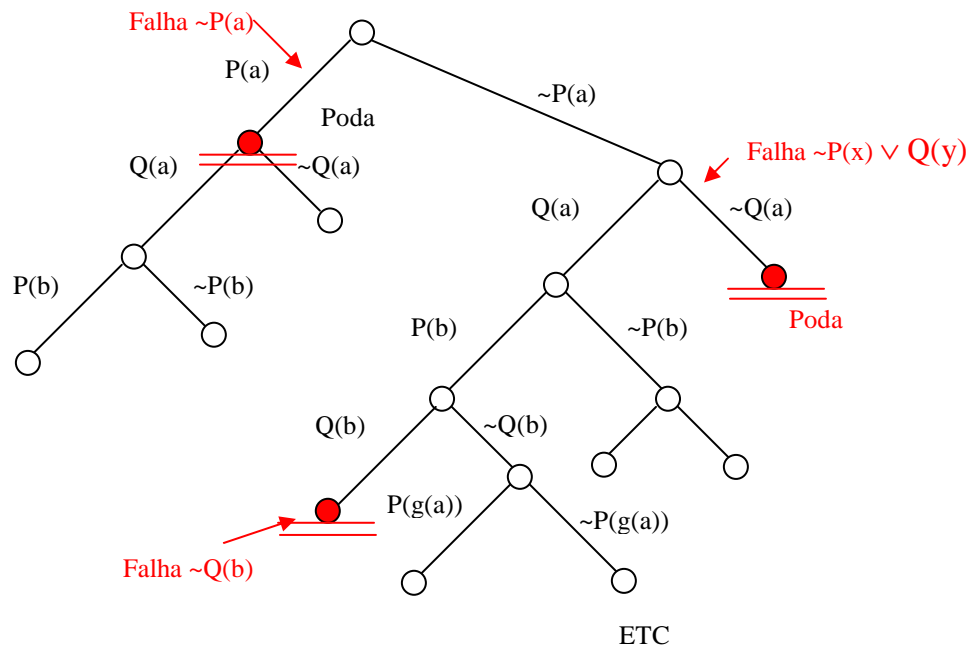
b : Antônio

$g(x)$: “pai de” x

Dando-se às variáveis todos os valores possíveis em D, temos (infinitas) proposições:

$$P = \{P(a), Q(a), P(b), Q(b), P(g(a)), P(g(b)), Q(g(a)), \dots, R(g(a)), \dots\}$$

E pode-se construir uma árvore (potencialmente infinita) com todos os casos possíveis:



Se o conjunto C não pode ser satisfeito, eventualmente todos os galhos serão podados – ou seja, haverá um número finito de nós acima dos nós de poda. Se C pode ser satisfeito, a árvore terá pelo menos um galho infinito.

Outro Exemplo:

Suponha-se que se queira refutar:

- $$\begin{aligned} \sim P(x) \vee Q(x) & \dots\dots\dots (1) \\ P(f(y)) & \dots\dots\dots (2) \\ \sim Q(f(y)) & \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$D(C) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$$

$$P = \{ P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \dots \}$$

Embora, na prática, não se construa a árvore semântica, o raciocínio pode ser aplicado ao Cálculo de proposições.

Dizemos que se tenha:

(ver página 15)

P: Paulo matou João:

Q: Maria vai fugir;

R: O delegado foi enganado;

E a hipótese:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R);$$

Na fórmula de cláusulas:

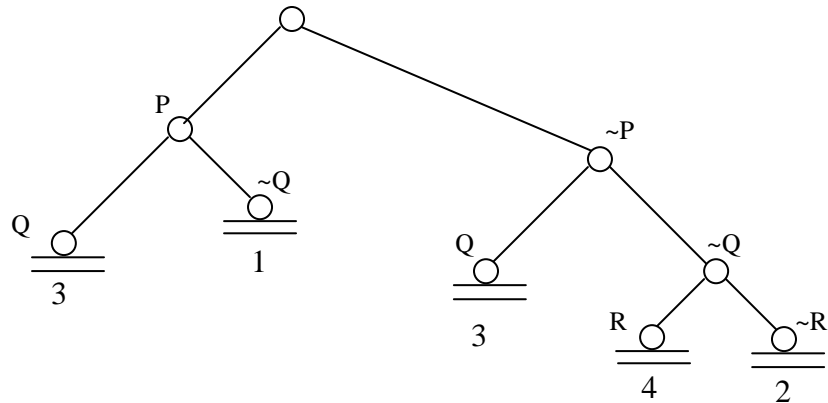
$(\sim P \vee Q), (P \vee R);$

e queremos mostrar:

$\sim P \vee Q, P \vee R \vdash Q \vee R;$

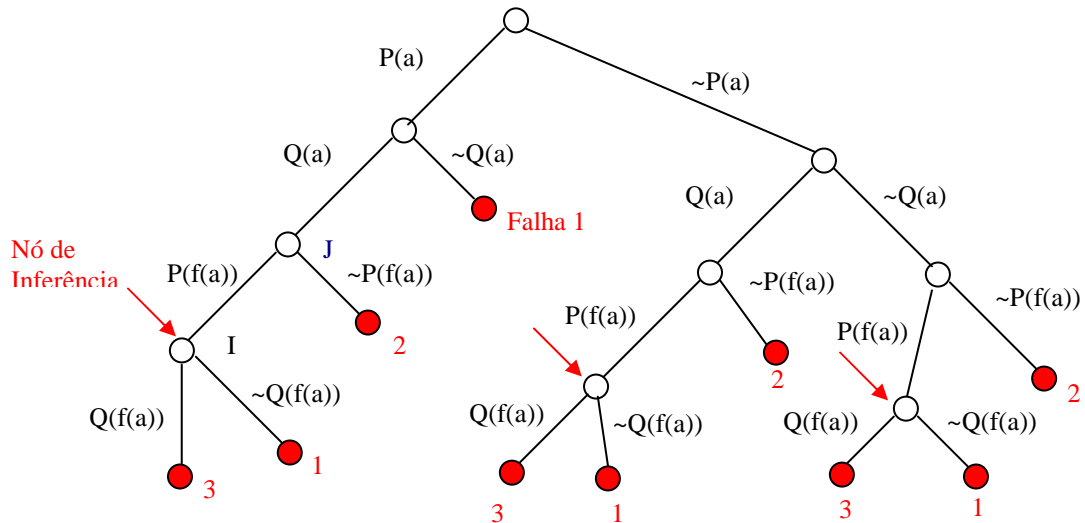
Negando a conclusão, temos que refutar:

$\sim P \vee Q, P \vee R, \sim(Q \vee R)$ ou $\sim P \vee Q$ (1), $P \vee R$ (2), $\sim Q$ (3), $\sim R$ (4).

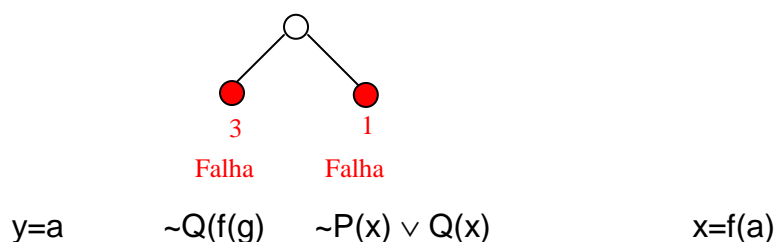


Ou seja, $Q \vee R$ é, sim consequência de $\sim P \vee Q$ e $P \vee R$.

A árvore pode ser desenhada:



O nó "I", que é um nó "ou", falha porque ambos os sucessores falham. Um nó intermediário que falha é chamado "nó de inferência". Falhando "I" falha "J", etc. Vejamos o n "I":



Como “I” falha por causa de (3) e (1), pode-se tentar escrever uma nova cláusula, não em C, que falha em “I”, derivável de (3) e (1). Essa nova cláusula, se juntada a C, não altera o problema, mas reduz a árvore semântica.

Vejam os resultados sobre deducibilidade:

Se $\Sigma, A \vdash C$ e $\Sigma, B \vdash C$ então $\Sigma, A \vee B \vdash C$;

Façamos:

$\Sigma \leftrightarrow \sim Q(f(a))$;

$C=A \leftrightarrow \sim P(f(a))$;

$B \leftrightarrow Q(f(a))$.

Então:

$\sim Q(f(a)), \sim P(f(a)) \vdash \sim P(f(a))$ (trivial);

$\sim Q(f(a)), Q(f(a)) \vdash \sim P(f(a))$ (também).

Então,

$\sim Q(f(a)), \sim P(f(a)) \vee Q(f(a)) \vdash \sim P(f(a))$.

$\sim P(f(a))$ é a cláusula “resolvente”, que falha em “I”. Por um processo de achar resolventes pode-se chegar à raiz da árvore e refutar o conjunto original de cláusulas C.

No entanto, as cláusulas originais eram $\sim P(x) \vee Q(x)$ e $\sim Q(f(y))$. O resolvente foi achado fazendo $y = a$, $x = f(a)$ (ambos valores da base). Poderia ser achado fazendo $x = f(y)$:

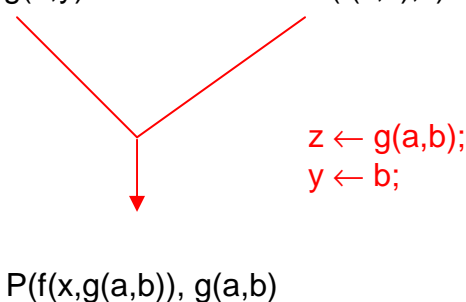
$\sim Q(f(y)), \sim P(f(y)) \vee Q(f(y)) \vdash \sim P(f(y))$;

Existe um algoritmo (J. A. Robinson, 1969) que dá, para qualquer conjunto de literais (e, em particular, dois) uma substituição (a mais simples) de valores para as variáveis tal que os literais se tornem idênticos (se não houver uma, ele para).

Exemplo:

$P(f(x,g(a,y)), g(a,y))$

$P(f(x,z),z)$



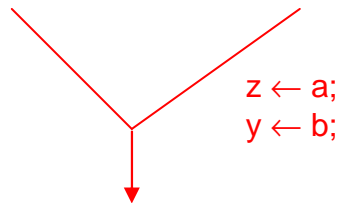
O método mecânico de achar resolventes é testar partes de uma cláusula com a negação de partes de outra, usando o algoritmo acima, para tentar o colapso.

Exemplo:

$P(x,f(a)) \vee P(x,f(y)) \vee Q(y)$

$\sim P(z,f(a)) \vee \sim Q(z);$

1) Testando $P(x, f(a))$ com $\sim(\sim P(z, f(a)))$



$z \leftarrow a;$
 $y \leftarrow b;$

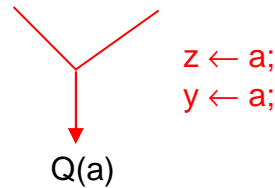
$P(a, f(a))$

A cláusula resolvente é:

$P(a, f(y)) \vee Q(y) \vee \sim Q(a)$

(tautologia com $y \leftarrow a$);

2) Testando $Q(y)$ com $\sim(\sim Q(z))$;



$z \leftarrow a;$
 $y \leftarrow a;$

$Q(a)$

A cláusula resolvente é:

$P(x, f(a)) \vee P(x, f(a)) \vee \sim P(a, f(a))$

(tautologia com $x \leftarrow a$).

Para refutar-se um conjunto de cláusulas, pode-se usar uma árvore de refutação (ou um grafo de refutação).

Digamos que se queira mostrar que $Q(f(z))$ é deduzível das cláusulas $P(x) \vee Q(x)$; $\sim P(f(z)) \vee R(z)$; $\sim R(w)$.

Prova tradicional:

Faça $w = z$; então $\sim P(f(z)) \vee R(z)$, $\sim R(z) \Rightarrow \sim P(f(z))$;

Agora faça $x = f(z)$, então $P(f(z)) \vee Q(f(z))$, $\sim P(f(z)) \Rightarrow Q(f(z))$;
(pelo silogismo disjuntivo)

Prova por refutação:

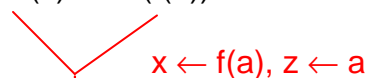
Refutar o conjunto de cláusulas:

$P(x) \vee Q(x)$; $\sim P(f(z)) \vee R(z)$; $\sim R(w)$; $\sim Q(f(z))$;

$D(c) = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$;

$P = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), \dots\}$

$P(x) \vee Q(x)$ $\sim Q(f(a))$



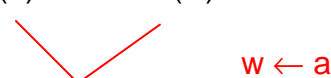
$x \leftarrow f(a), z \leftarrow a$

Resolvente $P(f(a))$ $\sim P(f(z)) \vee R(z)$



$z \leftarrow a$

Resolvente $R(a)$ $\sim R(w)$



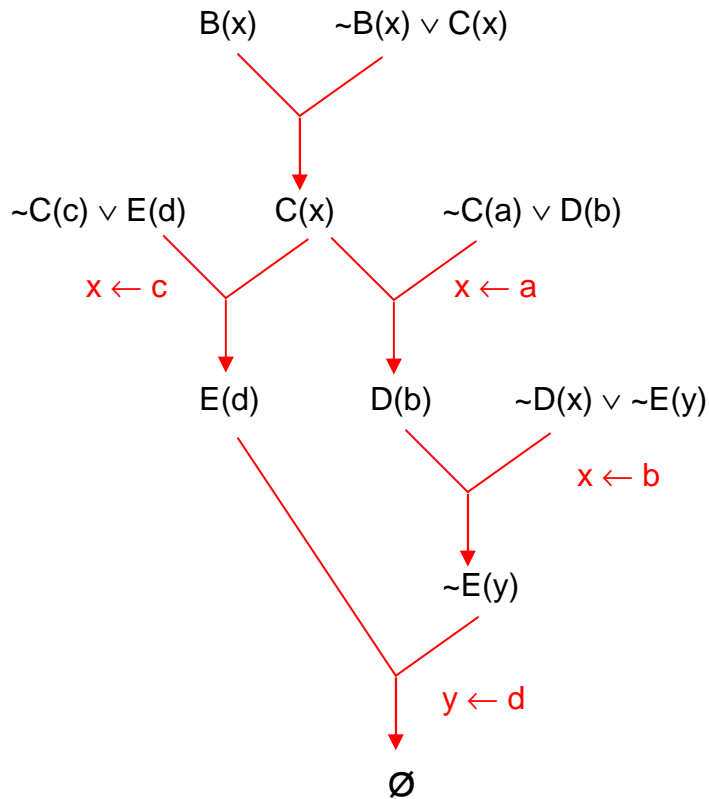
$w \leftarrow a$

\emptyset (sempre falsa)

Outro exemplo:

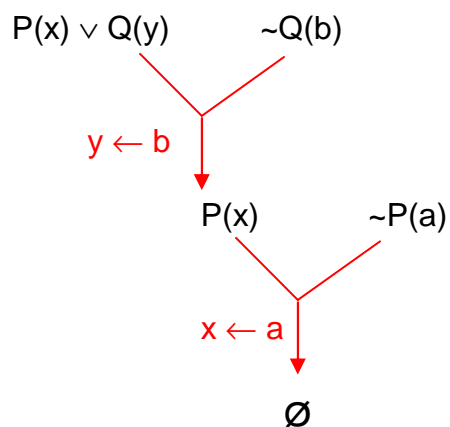
Premissas: $\sim B(x) \vee C(x)$; $\sim C(a) \vee D(b)$; $\sim C(c) \vee E(d)$; $\sim D(x) \vee \sim E(y)$;
Conclusão: $\sim B(x)$

Por refutação – nega-se a conclusão: $\sim B(x)$ passa a $B(x)$.



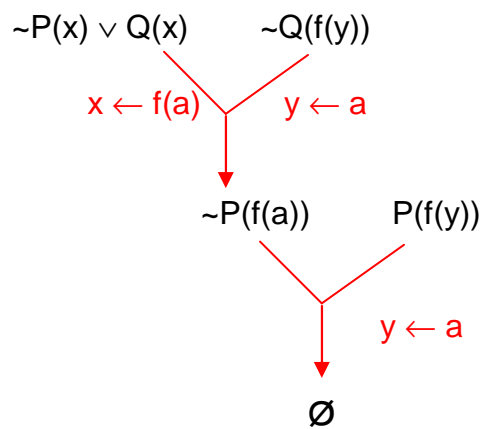
Este é um grafo de refutação, mas não uma árvore.

- 1) $P(x) \vee Q(y)$, $R(y(x)) \vee P(a)$, $\sim P(a) \vdash Q(b)$
Negando a conclusão: $\sim Q(b)$



$$2) \sim P(x) \vee Q(x), P(f(y)) \vdash Q(f(y))$$

Negando a conclusão: $\sim Q(f(y))$

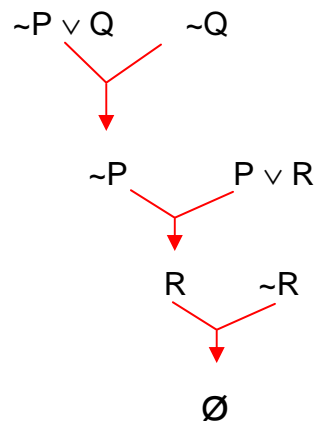


$$3) (P \rightarrow Q) \wedge (P \vee R) \vdash (Q \vee R)$$

Cláusula: Premissa: $(\sim P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Negando a conclusão: $\sim(Q \vee R), \sim Q \wedge \sim R;$

Conjunto de cláusulas: $(\sim P \vee Q), (P \vee R), \sim Q, \sim R;$



Estratégias de Busca

Problema: Dado um conjunto de cláusulas C que se deseja refutar, como achar um grafo de refutação de maneira eficiente?

Podemos optar pela busca em largura: gera-se todos os resolventes de C , criando o conjunto $R(c)$ (que contem C). Gera-se $R(R(c))$, etc. Até gerar \emptyset . Se o número de cláusulas é grande, isto é, impraticável, existem 3 tipos de estratégias usadas:

- 1) Simplificações;
- 2) Refinamentos;
- 3) Ordenações.

Simplificações

1) Eliminar tautologia

Como tautologias são sempre satisfeitas, toda cláusula tautológica gerada pode ser eliminada sem alterar o problema.

Exemplo:

$(R \vee \sim R \vee P(y))$	tautologia
$(\sim P(a) \vee \sim R \vee P(y))$	pode não ser – é com $y \leftarrow a$
$(\sim P(x) \vee \sim R \vee P(y))$	esta é perigosa, pois $\sim P(a) \vee \sim R \vee P(b)$

não é uma tautologia necessariamente

$(\sim P(f(x)) \vee \sim R \vee P(f(x)) \vee Q(y))$ Pode ser eliminada

2) Avaliar predicados

Quando existe um modelo específico sendo estudado, às vezes, pode-se avaliar predicados.

Exemplo:

Seja $M(x,y)$ o predicado $x > y$

A cláusula:

$\sim P(f(w)) \vee Q(x) \vee R(y) \vee M(2, 5)$

Pode ser reduzida a:

$\sim P(f(w)) \vee Q(x) \vee R(y)$

Já a cláusula:

$P(f(a)) \vee M(5, 2)$, pode ser eliminada.

3) Eliminação por implicação

Uma cláusula C_1 subsoma C_2 sse existe uma substituição α que faz com que $C_1 \mid \alpha \Rightarrow C_2$.

Exemplos:

$P(x)$ subsoma $P(f(a)) \vee Q(y)$ com $\alpha: x \leftarrow f(a)$;

$P(x) \vee Q(y)$ subsoma $P(g(a)) \vee Q(g(b)) \vee R$ com $\alpha: x \leftarrow g(a)$
 $y \leftarrow g(b)$;

Cláusulas subsumidas por outras podem ser eliminadas sem alterar o problema.

Refinamentos

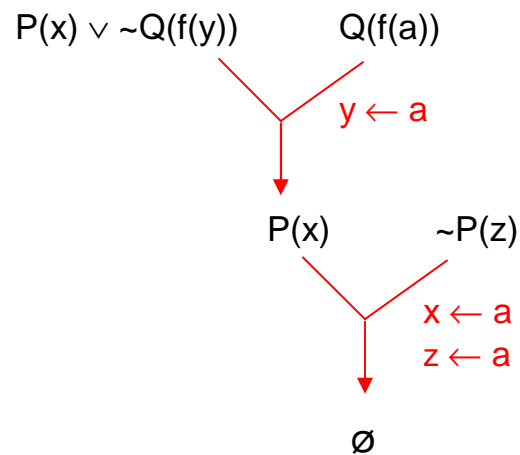
Procuram-se certos tipos de grafos de refutação, para reduzir o esforço de busca – o grafo obtido pode ser, no entanto, mais profundo.

1) Filtragem de ancestrais

O grafo de refutação de um conjunto de cláusulas C tem \emptyset na raiz e as cláusulas de C nas folhas. Ele é dito ser uma “videira” se cada nó está em C ou é descendente imediato de elementos de C .

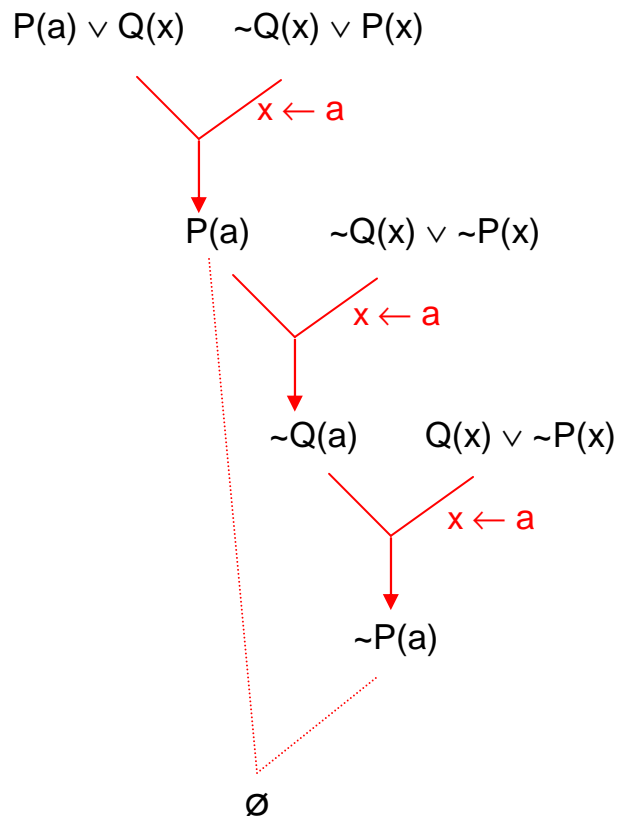
Exemplo simples:

$P(x) \vee \sim Q(f(y)); Q(f(a)); \sim P(z)$



Há casos, mesmo simples, em que não existe uma videira de refutação:

$P(a) \vee Q(x)$; $\neg Q(x) \vee P(x)$; $\neg Q(x) \vee \neg P(x)$; $Q(x) \vee \neg P(x)$

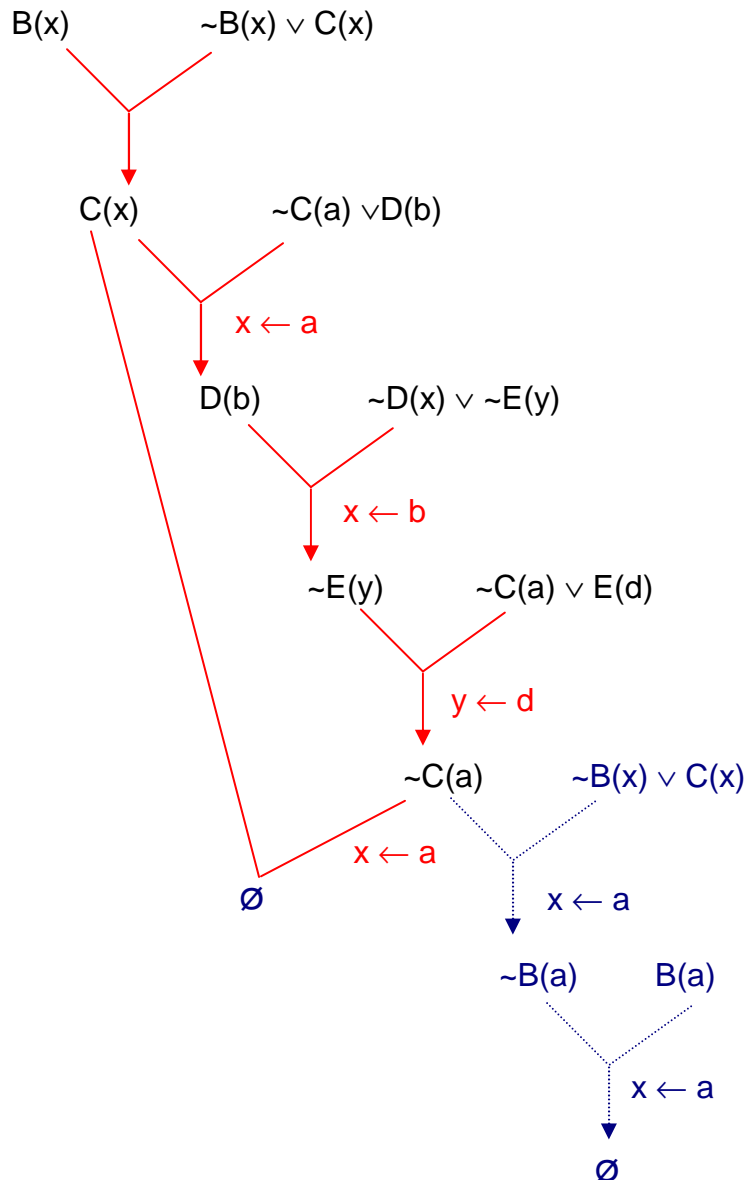


Há uma forma de grafo que sempre existe: o grafo com filtragem de ancestrais. Um GFA tem as seguintes propriedades. Todos os seus nós são:

- 1) Uma cláusula em C , ou
- 2) Um descendente imediato de uma delas, ou
- 3) Um descendente imediato de duas cláusulas não em C , A e B , tal que B é um ancestral de A .

Exemplo:

$\sim B(x) \vee C(x)$; $\sim C(a) \vee D(b)$; $\sim C(a) \vee E(d)$; $\sim D(x) \vee \sim E(y)$; $B(x)$



Neste caso, $C(x)$ é ancestral de $\sim C(a)$. Como, no método do GFA, uma cláusula já gerada é candidata a resolvente só com as cláusulas de C ou com suas ancestrais, a busca é simplificada.

Ordenações

O método de ordenação é análogo aos métodos de busca heurística já vistos. Trata-se de ordenar as resoluções (geração de resolventes) usando critérios que tendem a estreitar a busca.

Um método muito utilizado é o de ordenar as cláusulas por número de literais. Cláusulas mais curtas são usadas primeiro, com um limite de profundidade estabelecido, após o qual, se \emptyset não foi gerado, passa-se a usar cláusulas mais longas.

Algumas funções de avaliação também foram tentadas com resultados discutíveis.

Aplicações – Extração de Respostas

Na maioria dos casos práticos, não basta provar um teorema. Geralmente, o que se quer é uma resposta. Quando se prova, por exemplo, $\exists x \exists y f(x,y)$, o que se quer é a asserção de $f(a,b)$ para as constantes a e b .

Isso pode ser feito modificando ligeiramente o grafo de refutação para que a resposta reflita as substituições feitas no processo de achar resolventes.

Exemplo:

Aonde a vaca vai, o boi vai atrás;
A vaca está no curral;
Onde está o boi?

Este é um caso de “modus ponens”. Traduzindo para o cálculo de predicados:

Seja P o predicado “está em”

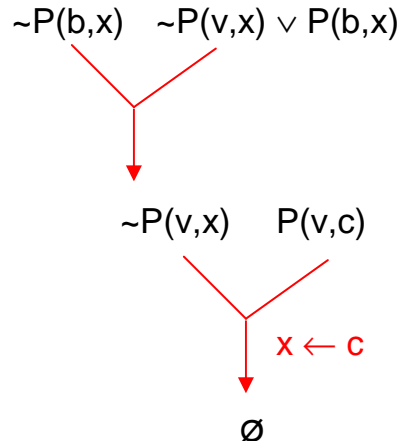
1) $\forall x (P(v,x) \Rightarrow P(b,x))$; premissa

2) $P(v,c)$ premissa

Como conclusão, podemos provar $\exists x P(b,x)$. O conjunto de cláusulas das premissas é $C_p = \{\sim P(v,x) \vee P(b,x), P(v,c)\}$. A conclusão negada dá:

$\sim \exists x P(b,x) \equiv \forall x \sim P(b,x)$ e a cláusula $\sim P(b,x)$.

Temos a seguinte videira de refutação:



Como obter a resposta?

O processo é:

- 1) Adicionar a cada cláusula, obtida pela negação da conclusão, ela própria, negada, formando assim uma tautologia;
- 2) Seguir o grafo de refutação fazendo as mesmas substituições e resolventes.

O que sobrar na raiz da árvore é a resposta!

Como adicionamos tautologias a C_p , a resposta é consequência lógica das premissas.

Adicionamos a C_p , no caso, a cláusula $\sim P(b,x) \vee P(b,x)$.

$$\sim P(b,x) \vee \underline{P(b,x)} \quad \sim P(v,x) \vee P(b,x)$$

$$\underline{P(b,x)} \vee \sim P(v,x) \quad P(v,c)$$

$$x \leftarrow c$$

Resposta: $P(b,c)$, o boi está no curral!

Outro exemplo:

Premissas: 1) se x é o pai de y e y é o pai de z , então x é o avô de z ;
2) todo mundo tem um pai.

Pergunta: Existe alguém que tenha avô? Quem é o avô dele?

No cálculo de predicados:

- 1) $\forall x \forall y \forall z [P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow A(x,z)]$
- 2) $\forall y \exists x P(x,y)$

Pergunta (e o teorema a provar?).

$$\exists x \exists y A(x,y)$$

Cláusulas das premissas:

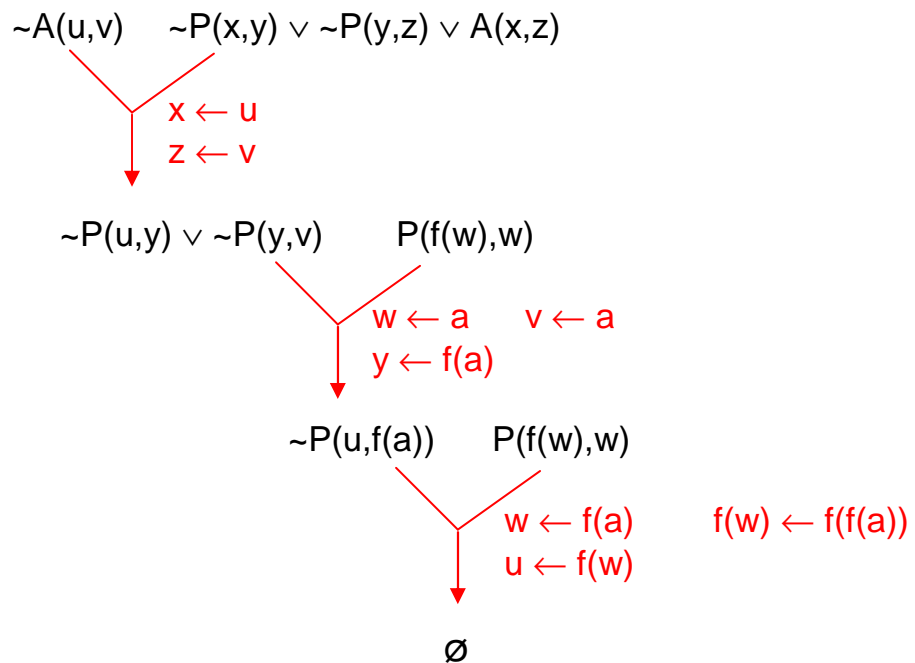
$$\sim P(x,y) \vee \sim P(y,z) \vee A(x,z)$$

$$P(f(w),w) \quad (f(w) \text{ é o pai de } w)$$

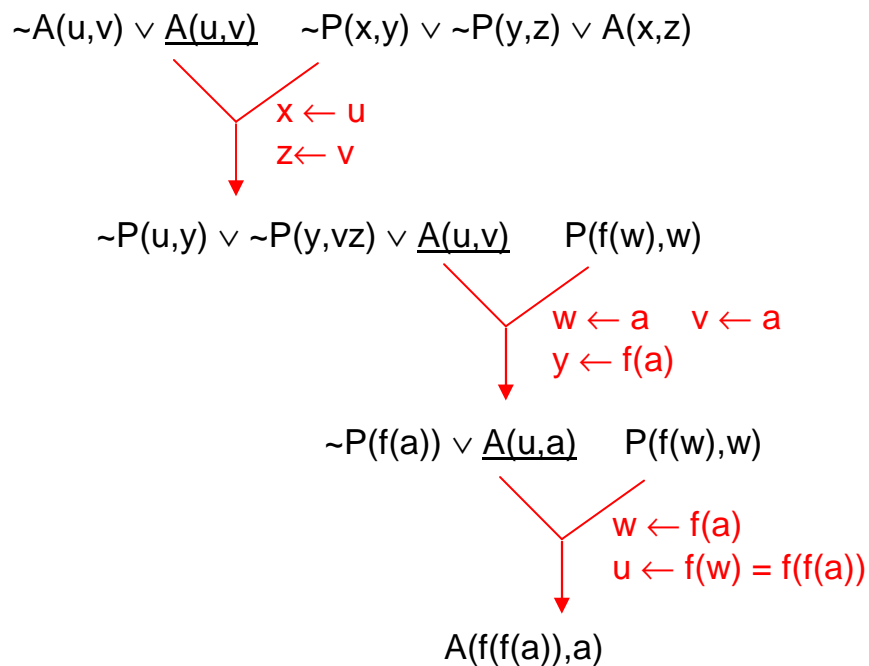
Negação da conclusão:

$$\sim A(u,v)$$

Videira de Refutação:



Para obter a resposta, forma-se a tautologia $\sim A(u,v) \vee A(u,v)$:



Vê-se que ao postular a constante \underline{a} na base de Herbrand, estava-se postulando a existência de a , $f(a)$, $f(f(a))$, etc.

A resposta é: sim, existe a e o pai de seu pai é seu avô.

Vejamos um caso mais complicado:

Premissas:

$\sim A(x) \vee F(x) \vee G(f(x))$
 $\sim F(x) \vee B(x)$
 $\sim F(x) \vee C(x)$
 $\sim G(x) \vee B(x)$
 $\sim G(x) \vee D(x)$
 $A(g(x)) \vee F(h(x))$

Conclusão:

$\exists x \exists y [[B(x) \wedge C(x)] \vee [D(y) \wedge B(y)]]$

A negação da conclusão em forma de cláusulas produz:

$\sim B(x) \vee \sim C(x)$
 $\sim B(x) \vee \sim D(x)$

Tendo o grafo de refutação, formam-se as tautologias:

$\sim B(x) \vee \sim C(x) \vee [B(x) \wedge C(x)]$
 $\sim B(x) \vee \sim D(x) \vee [B(x) \wedge D(x)]$

As partes apenas podem ficar como conjunções.

Vamos mostrar diretamente o grafo de extração de resposta.

Faremos a prova por filtragem de ancestrais:

Cláusulas

$\sim A \vee F \vee Gf$

$\sim F \vee B \quad \sim B \vee \sim C$

$\sim F \vee C \quad \sim B \vee \sim D$

$\sim G \vee B$

$\sim G \vee D$

$Af \vee Fh$

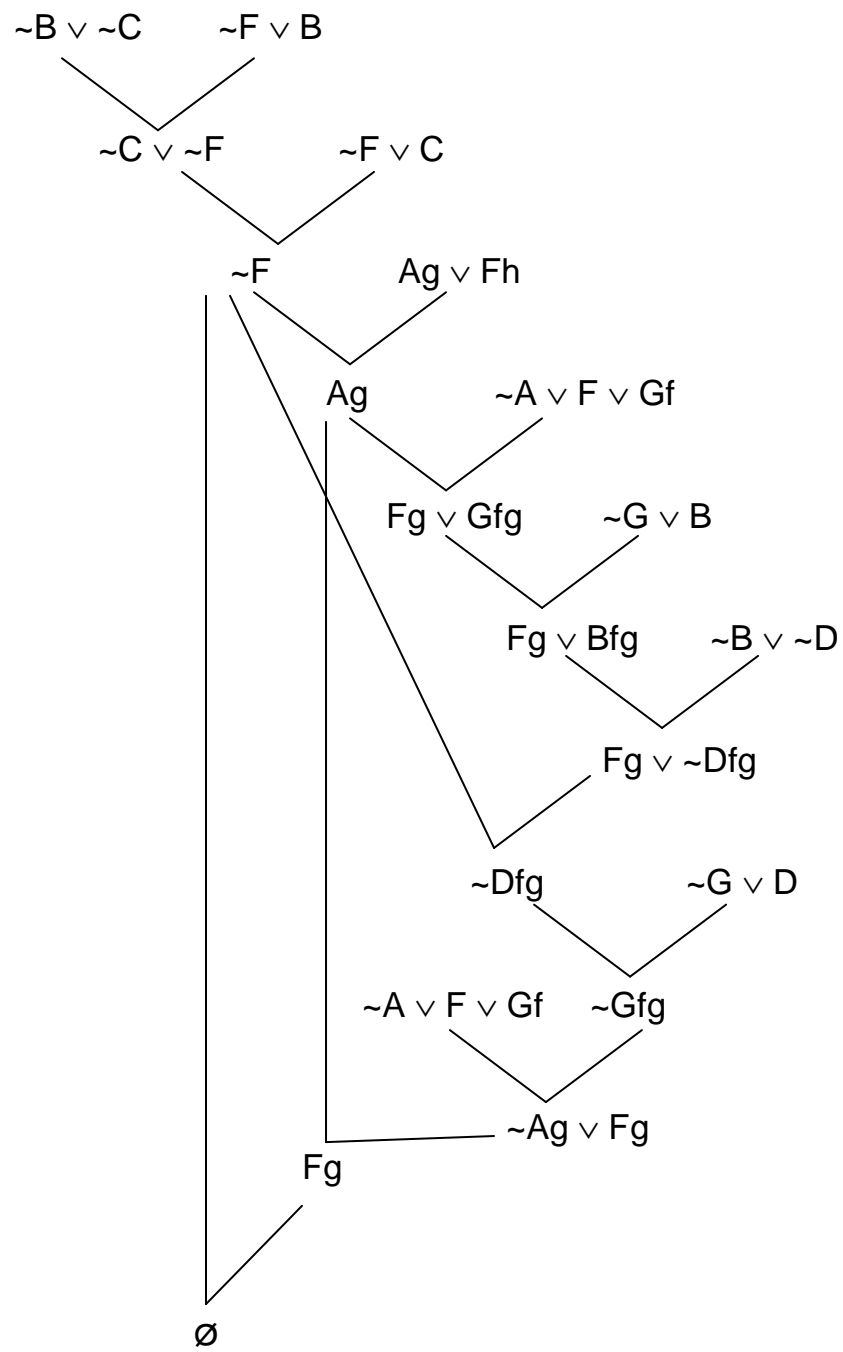
$\underbrace{\quad}_{\bar{g}}$

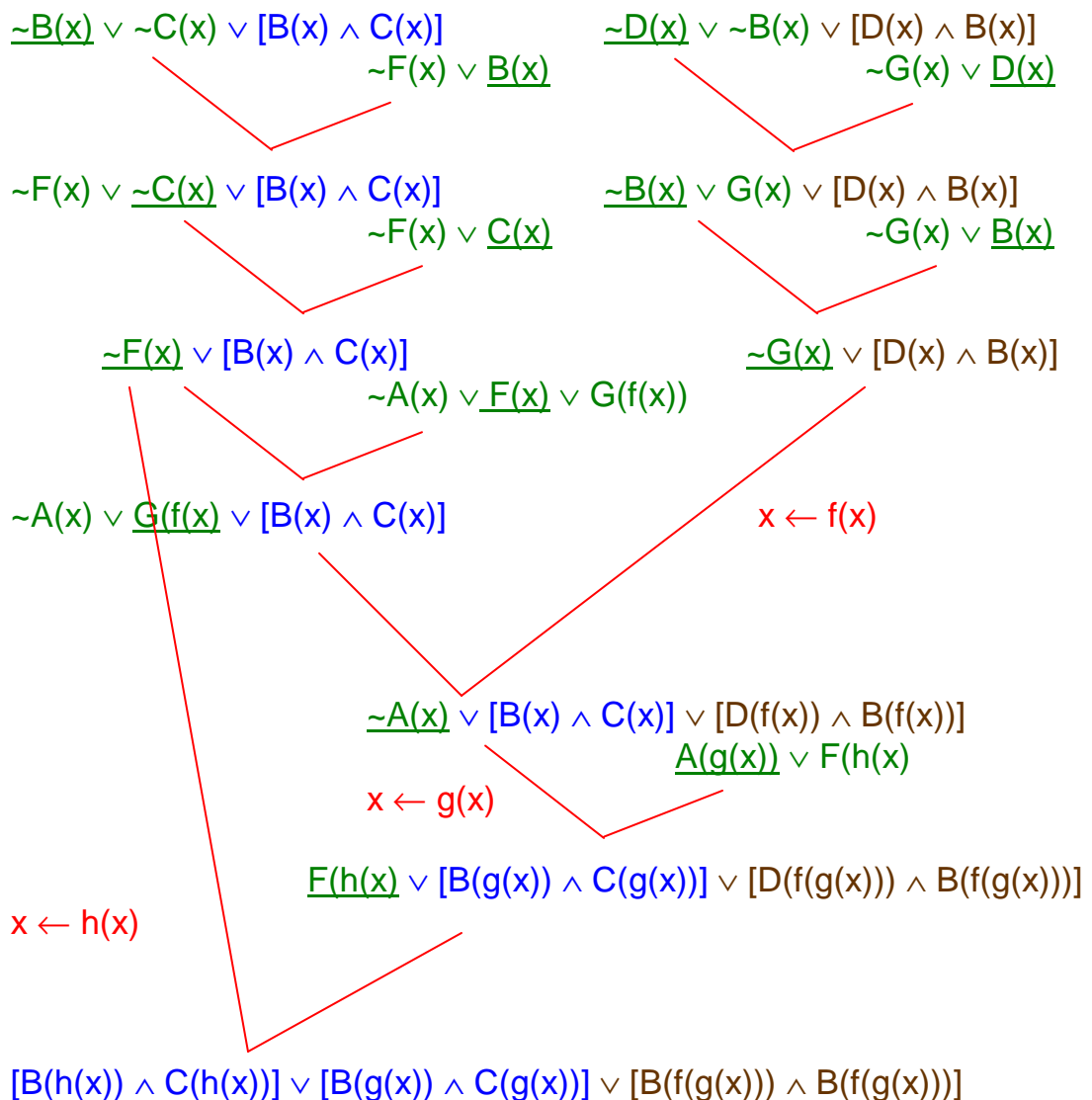
Convenções

A é $A(x)$

Gf é $G(f(x))$

etc





Vamos postular uma constante “João” e sejam h: pai de, g: mãe de f: irmão de.

Então:

- B(pai(João)) \wedge C(pai(João))
- Ou B(mãe(João)) \wedge C(mãe(João))
- Ou D(irmão(mãe(João))) \wedge B(irmão(mãe(João)))

Ou seja, ou o pai, ou a mãe, ou o tio de João é a solução (ou são).

Ordenação por Analogias

Muitos teoremas da matemática são provados por analogia com provas já conhecidas. Como usar isso nas provas por resolventes?

Na maioria dos casos práticos, o conjunto de cláusulas $C = \{\Sigma, \sim T\}$ é muito grande e tentativas de refutar C diretamente levam a buscas impraticáveis.

Suponha-se que se tenha provado um outro teorema “parecido” T^* e as cláusulas usadas tenham sido $\Sigma^* \subset \Sigma$. Será que se pode achar um mapeamento $\Pi: \Sigma^* \rightarrow \Sigma$ de tal modo que $C' = \{\Pi(\Sigma^*), \sim T\}$ não possa ser satisfeito?

Pode-se estabelecer “tipos” para cada predicado usado. Por exemplo, sejam os predicados: em (x_1, x_2) , À (x_3, x_4) , fazendo (x_5, x_6) , doente (x_7) .

Os tipos podem ser:

Localização: em, \hat{A} ;
Atividades ou estado: fazendo, doente, x_6 ?
Pessoas: x_1, x_3, x_5, x_7 ;
Lugares: x_2, x_4 ;

} dois domínios

Então, temos modelos de predicados:

Em (x_1, x_2) **localização (pessoas, lugar)**
Doente (x_7) **estado (pessoa)**

É bom saber também, para uma cláusula qualquer, quais predicados aparecem negados e quais não:

Cláusula: $\sim \hat{A}(\text{mesa}, x) \vee \text{doente}(y)$

Predicação: **neg**(\hat{A}), **pos**(doente)

Vejamos agora o seguinte problema:

Premissas:

As pessoas trabalham no INPE. Quando no INPE, as pessoas estão às mesas e trabalham. Se estão doentes, as pessoas não trabalham.

Maria está trabalhando e João está no INPE.

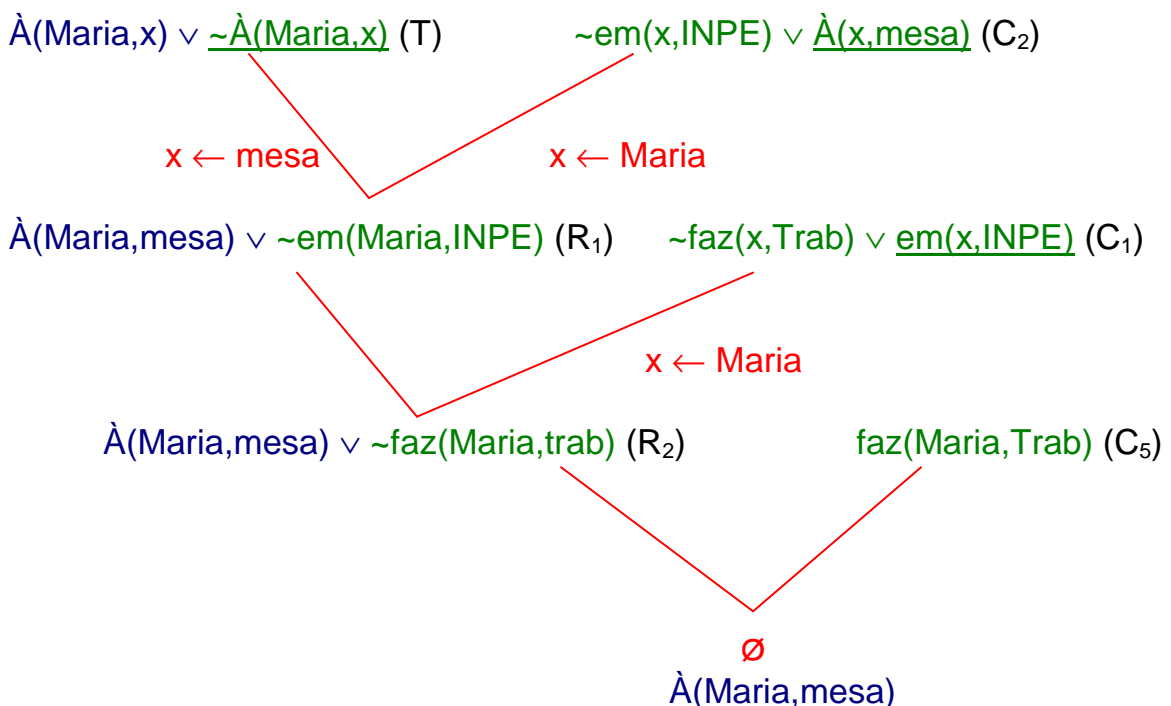
Digamos que se queira a resposta para a 1ª pergunta: “Aonde está Maria?”

Vamos por as premissas em forma de cláusulas:

C1	$\sim \text{fazendo}(x, \text{trabalho}) \vee \text{em}(x, \text{INPE});$	}	REGRAS
C2	$\sim \text{em}(x, \text{INPE}) \vee \hat{A}(x, \text{mesa})$		
C3	$\sim \text{em}(x, \text{INPE}) \vee \text{fazendo}(x, \text{trabalho})$		
C4	$\sim \text{fazendo}(x, \text{trabalho}) \vee \sim \text{doente}(x)$		
C5	$\text{fazendo}(\text{Maria}, \text{trabalho})$	}	ASSERÇÕES
C6	$\text{em}(\text{João}, \text{INPE})$		

Para responder a pergunta, vamos provar que $\exists x \hat{A}(\text{Maria}, x)$. negando isto temos, $\sim \exists x \hat{A}(\text{Maria}, x)$ ou $\forall x \sim \hat{A}(\text{Maria}, x)$ e a cláusula $\sim \hat{A}(\text{Maria}, x)$.

Grafo de Refutação – Extração de Resposta



O teorema já provado é T^* . digamos que se queira provar por analogia que João não está doente. (T)

Vamos achar um mapeamento Π_0 entre T e T^* (ou suas negações):

$\sim \text{doente}(\text{Maria}, x)$ $\text{doente}(\text{João})$

O mapeamento é óbvio:

$\Pi_0 = \{ \text{doente} \leftrightarrow \text{doente}, \text{Maria} \leftrightarrow \text{João} \};$

As cláusulas usadas na refutação foram:

$T^*, C_2, R_1, C_1, R_2, C_5;$

Além de T, o mapeamento Π_0 pode ser aplicado só a um literal de C_2 dando a imagem:

$A_2 = \Pi_0(C_2) = \sim \text{em}(x, \text{INPE}) \vee \text{doente}(x)$ $\text{neg}(\text{em}), \text{pos}(\text{doente})$

A cláusula mais “parecida” com esta é C_3 , $\text{neg}(\text{em}), \text{pos}(\text{fazendo})$

$\sim \text{em}(x, \text{INPE}) \vee \text{fazendo}(x, \text{trabalhando});$

Então fazemos C_3 análoga à C_2 . Temos novos literais $\sim \text{em}(x, \text{INPE})$ em C_2 e $\text{fazendo}(x, \text{trabalho})$ na sua análoga. O mapeamento pode ser extendido:

$\Pi_1 = \Pi_0 \cup \{ \text{em} \leftrightarrow \text{fazendo}, \text{INPE} \leftrightarrow \text{trabalho} \};$

Agora Π_1 pode ser aplicado as outras cláusulas, produzindo as imagens:

$A_1 = \Pi_1(C_1) = \sim \text{em}(x, \text{INPE}) \vee \text{fazendo}(x, \text{trabalho});$

$A_5 = \Pi_1(C_5) = \text{em}(\text{João}, \text{INPE});$

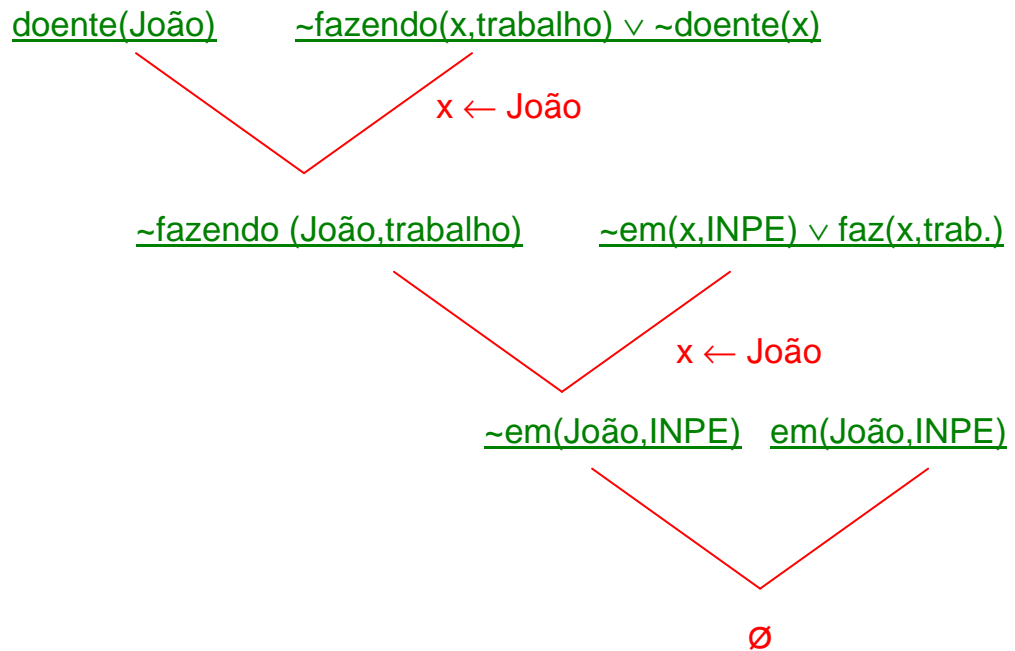
$AR_1 = \Pi_1(R_1) = \sim \text{fazendo}(\text{João}, \text{trabalho});$

$AR_2 = \Pi_1(R_2) = \sim \text{em}(\text{João}, \text{INPE});$

Examinando as cláusulas existentes, podemos selecionar as análogas:

Cláusulas	Análogas
C_2	C_3
R_1	C_1, C_4
C_1	C_3
R_2	C_2, C_3
C_5	C_6

As cláusulas análogas formam o conjunto $\Pi(\Sigma^*) = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_6\}$ que é menor do que Σ . Agora, $\{\Pi(\Sigma^*), \sim T\}$ não pode ser satisfeito, pela refutação:



É bom notar que esta refutação não é a imagem da anterior sob a analogia. A analogia só é usada para selecionar o conjunto de cláusulas candidatas.

Kling, R., "A paradigm for reasoning by analogy"

Artificial intelligence, 1971, 2, 147 – 178

Vamos voltar ao Cálculo de Predicados e apresentar mais formalmente uma série de resultados que já usamos na exposição sobre prova automática de teoremas.

Teorema:

Seja x uma variável, $A(x)$ qualquer fórmula, r qualquer variável e $A(r)$ o resultado de substituir as ocorrências livres de x em $A(x)$ por r . Seja Γ uma lista de fórmulas e C uma fórmula. Então:

- Se $\Gamma \vdash A(x)$, então $\Gamma \vdash \forall x A(x)$ (onde Γ não tem x livre) intro do \forall ;
- $\forall x A(x) \vdash A(r)$ (r é livre para x em A) elimin do \forall ;
- $A(r) \vdash \exists x A(x)$ (r é livre para x em A) intro do \exists ;
- Se $\Gamma, A(x) \vdash C$ então $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$ (Γ e C não têm x livre).

Exemplos de Prova:

a) Seja D um axioma qualquer que não contenha x livre:

- $\Gamma \vdash A(x)$ hipótese;
- $\Gamma, D \vdash A(x)$ trivial;
- $\Gamma \vdash D \rightarrow A(x)$ teo. da dedução;
- $\Gamma \vdash D \rightarrow \forall x A(x)$ regra \forall , 3;
- $\Gamma, D \vdash \forall x A(x)$ trivial com 4 e M. P.;
- $\Gamma \vdash \forall x A(x)$

A linha 6 vem de que se $\vdash A_{m+1}$, então $A_1, \dots, A_m \vdash B$ sse $A_1, \dots, A_m, A_{m+1} \vdash B$ (prove isto como exercício).

No caso, temos $\vdash D$, pois D é um axioma.

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $\Gamma, A(x) \vdash C$ | hipótese; |
| 2. $\Gamma \vdash A(x) \rightarrow C$ | teo da dedução |
| 3. $\Gamma \vdash \exists x A(x) \rightarrow C$ | regra \exists , 2; |
| 4. $\Gamma, \exists x A(x) \vdash C$ | com 3 e M.P. |

Note que de b) vem que se $\Gamma \vdash \forall x A(x)$ então $\Gamma \vdash A(x)$ e, com a), $\Gamma \vdash \forall x A(x)$ sse $\Gamma \vdash A(x)$ (Γ não tem x livre). Em particular, $\vdash \forall x A(x)$ sse $\vdash A(x)$.

Corolário (troca de nomes de variáveis):

Nas condições do teorema, se Γ não tem x ou w_1, \dots, w_n livres;

- Se $\Gamma \vdash A(x)$, então $\Gamma \vdash A(r)$ (r é livre para x em $A(x)$);
- Se $\Gamma \vdash A(w_1, \dots, w_n)$ então $\Gamma \vdash A(r_1, \dots, r_n)$.

Prova: Faça como exercício.

Note que em particular, se $\vdash A(x)$ então $\vdash A(r)$ e se $\vdash A(w_1, \dots, w_n)$, então $\vdash A(r_1, \dots, r_n)$.

Teorema (resultados sobre deducibilidade):

Seja x uma variável, $A, B, C, A(x), B(x)$ fórmulas, Γ uma lista de fórmulas que não contenham x livre.

- $A \rightarrow B \vdash (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$;
- $A \rightarrow B \vdash (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)$;
- $A \rightarrow B \vdash (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$
 - $A \rightarrow B \vdash (C \wedge A) \rightarrow (C \wedge B)$;
- $A \rightarrow B \vdash (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
 - $A \rightarrow B \vdash (C \vee A) \rightarrow (C \vee B)$;
- $A \rightarrow B \vdash \sim B \rightarrow \sim A$;
- $A \rightarrow \sim B \vdash B \rightarrow \sim A$;
- $\sim A \rightarrow B \vdash \sim B \rightarrow A$;
- $\sim A \rightarrow \sim B \vdash B \rightarrow A$

Pode-se estabelecer esses resultados no cálculo de proposições e passá-los ao cálculo de predicados pela substituição de átomos.

- Se $\Gamma \vdash A(x) \rightarrow B(x)$, então $\Gamma \vdash \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$;
- Se $\Gamma \vdash A(x) \rightarrow B(x)$, então $\Gamma \vdash \exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$;

Os resultados abaixo tratam de equivalência:

- $A \leftrightarrow B \vdash (A \leftrightarrow C) \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$
 - $A \leftrightarrow B \vdash (C \leftrightarrow A) \leftrightarrow (C \leftrightarrow B)$;
- $A \leftrightarrow B \vdash (A \rightarrow C) \leftrightarrow (B \rightarrow C)$
 - $A \leftrightarrow B \vdash (C \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow B)$;

13. a) $A \leftrightarrow B \vdash (A \wedge C) \leftrightarrow (B \wedge C)$
 b) $A \leftrightarrow B \vdash (C \wedge A) \leftrightarrow (C \wedge B);$
 14. a) $A \leftrightarrow B \vdash (A \vee C) \leftrightarrow (B \vee C)$
 b) $A \leftrightarrow B \vdash (C \vee A) \leftrightarrow (C \vee B);$
 15. a) $A \leftrightarrow B \vdash \sim A \leftrightarrow \sim B.$

Introdução de quantificadores:

16. Se $\Gamma \vdash A(x) \leftrightarrow B(x)$, então $\Gamma \vdash \forall x A(x) \leftrightarrow \forall x B(x);$
 17. Se $\Gamma \vdash A(x) \leftrightarrow B(x)$, então $\Gamma \vdash \exists x A(x) \leftrightarrow \exists x B(x);$
 18. $A \vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow B;$
 19. $A \vdash (B \rightarrow A) \leftrightarrow A;$
 20. $\sim A \vdash (B \rightarrow A) \leftrightarrow \sim B;$
 21. $A \vdash (A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A) \leftrightarrow B;$
 22. $A \vdash (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A) \leftrightarrow A.$

Exemplo de Prova:

Vamos mostrar 20, primeiro para $\sim A \vdash (B \rightarrow A) \leftrightarrow \sim B$. Isto equivale a mostrar $\vdash \sim A \rightarrow ((B \rightarrow A) \leftrightarrow \sim B)$ pelo teorema da dedução. (A fórmula é uma forma da redução ao absurdo).

$\sim A$	\rightarrow	$((B$	\rightarrow	$A)$	\leftrightarrow	$\sim B)$
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	F	V	V

Por completeza, $\vdash \sim A \rightarrow ((B \rightarrow A) \leftrightarrow \sim B)$ e pelo “modus ponens”, $\sim A \vdash (B \rightarrow A) \leftrightarrow \sim B$ no cálculo de predicados.

Teorema (substituição por fórmula equivalente):

Seja C_A uma fórmula contendo A como parte consecutiva e seja C_B obtida de C_A substituindo A por B . Sejam x_1, \dots, x_n as variáveis livres de A ou B que se tornam dominadas por quantificadores de C_A . Seja Γ uma lista de fórmulas que não contenham x_1, \dots, x_n . Então:

Se $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$, então $\Gamma \vdash C_A \leftrightarrow C_B;$

(em particular, se $\vdash A \leftrightarrow B$, então $\vdash C_A \leftrightarrow C_B$).

Este teorema é uma consequência do teorema anterior.

Por exemplo:

Seja $C_A: R \rightarrow \forall z \underbrace{(\sim \exists x P(x, y, z) \vee Q(z))}_A$,

E para $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$ usemos $\vdash \sim \exists x P(x, y, z) \leftrightarrow \forall x \sim P(x, y, z).$

- $\vdash \sim \exists x P(x, y, z) \leftrightarrow \forall x \sim P(x, y, z) \quad \vdash A \leftrightarrow B;$
- $\vdash \sim \exists x P(x, y, z) \vee Q(z) \leftrightarrow \forall x \sim P(x, y, z) \vee Q(z) \quad \text{por 14a}$
- $\vdash \forall z (\sim \exists x P(x, y, z) \vee Q(z)) \leftrightarrow \forall z (\forall x \sim P(x, y, z) \vee Q(z)) \quad \text{por 16}$

$$4. \quad \underbrace{\vdash R \rightarrow \forall z (\underbrace{\sim \exists x P(x, y, z) \vee Q(z)}_A) \leftrightarrow R \rightarrow \forall z (\underbrace{(\forall x \sim P(x, y, z) \vee Q(z))}_B)}_{C_A} \quad \text{Por 12b} \quad C_B$$

Portanto, $\vdash C_A \leftrightarrow C_B$

Teorema (troca de variáveis quantificadas):

Seja x uma variável, $A(x)$ uma fórmula, y uma variável tal que:

1. y é livre para x em $A(x)$;
2. y não ocorre livre em $A(x)$.

e seja $A(y)$ o resultado da substituição das ocorrências livres de x por y .

Então:

23. $\forall x A(x) \leftrightarrow \forall y A(y)$;
24. $\exists x A(x) \leftrightarrow \exists y A(y)$.

Prova de 23:

- | | |
|--|------------------------|
| 1. $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$ | esquema 14; |
| 2. $\forall x A(x) \rightarrow \forall y A(y)$ | regra \forall , 1; |
| 3. $\forall y A(y) \rightarrow A(x)$ | esquema 14, |
| 4. $\forall y A(y) \rightarrow \forall x A(x)$ | regra \forall , 3; |
| 5. $\forall x A(x) \leftrightarrow \forall y A(y)$ | 2, 4, esquema 11, M.P. |

Teorema:

Sejam x e y variáveis distintas, $A(x)$, $B(x)$, $A(x, y)$ quaisquer fórmulas, A e B fórmulas que não contenham x livre.

- | | |
|--|--|
| 25. $\vdash \forall x A \leftrightarrow A$; | } Pode-se adicionar e retirar quantificadores para variáveis, desde que elas não sejam livres. |
| 26. $\vdash \exists x A \leftrightarrow A$; | |
| 27. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$; | } Ordem de quantificadores do mesmo tipo é irrelevante. |
| 28. $\vdash \exists x \exists y A(x, y) \leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$; | |
| 29. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x A(x, x)$ | } x é livre para y e vice-versa em A . |
| 30. $\vdash \exists x A(x, x) \rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$ | |
| 31. $\vdash \forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$; | |
| 32. $\vdash \exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$; | |
| 33. a) $\vdash \sim \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \sim A(x)$; | |
| b) $\vdash \sim \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \sim A(x)$; | |
| 34. $\vdash \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B(x))$; | |
| 35. $\vdash \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$; | |
| 36. $\vdash A \wedge \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A \wedge B(x))$; | |
| 37. $\vdash A \vee \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A \vee B(x))$; | |
| 38. $\vdash A \wedge \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \wedge B(x))$; | |
| 39. $\vdash A \vee \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \vee B(x))$; | |
| 40. $\vdash \exists x (A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ | (note que aqui \leftarrow não vale); |
| 41. $\vdash \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$ | (aqui também não); |

42. $\vdash A \rightarrow \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A \rightarrow B(x))$;
 43. $\vdash A \rightarrow \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \rightarrow B(x))$;
 44. $\vdash \forall x A(x) \rightarrow B \leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$
 45. $\vdash \exists x A(x) \rightarrow B \leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$;
 46. $\vdash \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B(x))$;
 47. $\vdash \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$.

Provas:

25. $\vdash \forall x A \leftrightarrow A$

1. $\forall x A \vdash A$ eliminando \forall , com x como x e r. Como A não tem x livre, r é livre para x em A.
2. $\vdash \forall x A \rightarrow A$ teo. de dedução, 1;
3. $A \vdash A$ trivial;
4. $A \vdash \forall x A$ introdução do \forall ;
5. $\vdash A \rightarrow \forall x A$ teo. da dedução, 4;
6. $\vdash \forall x A \leftrightarrow A$ esquema 11, 2, 5, M.P.

30. $\vdash \exists x A(x,x) \rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$

1. $A(x,x) \vdash \exists y A(x,y)$ introdução do \exists , com y como r;
2. $\exists y A(x,y) \vdash \exists x \exists y A(x,y)$ idem com x como r;
3. $A(x,x) \vdash \exists x \exists y A(x,y)$ 1, 2, M.P., etc..
4. $\exists x A(x,x) \vdash \exists x \exists y A(x,y)$ d), 3;
5. $\vdash \exists x A(x,x) \rightarrow \exists x \exists y A(x,y)$ teo. de dedução, 4;

33a. $\vdash \sim \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \sim A(x)$;

1. $\sim \exists x A(x), A(x) \vdash \sim \exists x A(x)$ teorema página 18;
2. $\sim \exists x A(x), A(x) \vdash \exists x A(x)$ c), x como r;
3. $\sim \exists x A(x) \vdash \sim A(x)$ redução ao absurdo, 1,2 (ver prova do tertium non datur);
4. $\sim \exists x A(x) \vdash \forall x \sim A(x)$ a), 3, ($\sim \exists x A(x)$ não tem x livre);
5. $\vdash \sim \exists x A(x) \rightarrow \forall x \sim A(x)$ teorema da dedução, 4;
6. $\forall x \sim A(x), A(x) \vdash A(x)$ teorema página 18;
7. $\forall x \sim A(x), A(x) \vdash \sim A(x)$ b), x como r;
8. $\forall x \sim A(x), A(x) \vdash \sim \forall x \sim A(x)$ redução ao absurdo, 6, 7;
9. $\underbrace{\forall x \sim A(x)}_{\Gamma}, \underbrace{\exists x A(x)}_{C} \vdash \underbrace{\sim \forall x \sim A(x)}_{d), 8};$

Γ

C

Γ e C não têm x livre;

10. $\forall x \sim A(x), \exists x A(x) \vdash \forall x \sim A(x)$ teorema página 18;
11. $\forall x \sim A(x) \vdash \sim \exists x A(x)$ redução ao absurdo, 9, 10;
12. $\vdash \forall x \sim A(x) \rightarrow \sim \exists x A(x)$ teorema de dedução. 11;
13. $\vdash \sim \exists x A(x) \leftrightarrow \forall x \sim A(x)$ esqu. 11, 5, 12, M.P.;

33b. $\vdash \sim \forall x A(x) \leftrightarrow \exists x \sim A(x)$

1. $\vdash \exists x \sim A(x) \leftrightarrow \sim \sim \exists x \sim A(x)$ dupla negação;
2. $\vdash \sim (\sim \exists x \sim A(x)) \leftrightarrow \sim (\forall x \sim \sim A(x))$ 33a, 15 pg 52;

3. $\vdash \exists x \sim A(x) \leftrightarrow \sim \forall x A(x)$ dupla negação, cadeia de equivalência, 1, 2;

O teorema da página 13 agora pode ser estendido para o Cálculo de Predicados com \vdash no lugar de \models . A fórmula E^* é formada trocando \wedge e \vee , cada predicado por sua negação e \forall por \exists (e vice-versa). Então $\vdash \sim E \leftrightarrow E^*$ (no cálculo de predicados).

Exemplo:

Seja $E: \sim \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$;

Então $E^*: \sim \forall x \sim P(x) \wedge \exists x \sim Q(x)$.

No caso:

$$\begin{aligned} & \vdash \sim(\sim \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \\ & \leftrightarrow \sim \sim \exists x P(x) \wedge \sim \forall x Q(x) && \text{de Morgan, 36;} \\ & \leftrightarrow \sim \sim \exists x P(x) \wedge \exists x \sim Q(x) && 33b; \\ & \leftrightarrow \sim \forall x \sim P(x) \wedge \exists x \sim Q(x) && 33a; \end{aligned}$$

Ou seja, pela cadeia de equivalências, $\vdash \sim E \leftrightarrow E^*$.

O corolário também vale: toda fórmula E é equivalente a outra fórmula F ($\vdash E \leftrightarrow F$) na qual \sim só é aplicada a predicados.

No exemplo acima,

$$\sim(\sim \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x \sim Q(x).$$

Teorema:

Toda fórmula tem uma forma frenex equivalente.

Já vimos isto várias vezes. Vejamos a migração dos quantificadores para frente:

$$\begin{aligned} & \vdash \sim \exists x P(x) \vee \forall x Q(x) \\ & \leftrightarrow \forall x \sim P(x) \vee \forall x Q(x) && 33a; \\ & \leftrightarrow \forall x (\sim P(x) \vee \forall x Q(x)) && 37; \\ & \leftrightarrow \forall x (\sim P(x) \vee \forall y Q(y)) && \text{Corolário;} \\ & \leftrightarrow \forall x \forall y (\sim P(x) \vee Q(y)) && 37. \end{aligned}$$

E a cláusula correspondente (b) página 47) é $(\sim P(x) \vee Q(x))$.

Cálculo de Predicados com Igualdade

Temos usado funções de Skolen, e já foi sentida a necessidade de se comparar valores assumidos pelas variáveis.

Vamos estender então a linguagem objeto para lidar com esses conceitos adicionais.

Inicialmente, vamos admitir na linguagem “nomes de funções”, f , $f(x)$, $f(x,y)$, $f(x,y,z)$, etc. Assume-se que escolhidos x , y , z, \dots de D , as funções assumem valores em D ; isto é, por exemplo, $f(x,y,z): D^3 \rightarrow D$. Para D finito, esses valores podem ser dados por uma tabela.

Define-se então “termos”: são as variáveis, mais os termos compostos, formados por nomes de funções com termos no lugar das variáveis. Por exemplo, $f(g(x), h(x), h(h(y)))$ é um termo.

Na definição de “fórmula”, no lugar de “átomo” podemos colocar “termo”. Para um dado D , vamos assumir que cada termo pode ser avaliado, por exemplo, por uma tabela.

Exemplo:

Seja $D = \{1,2\}$. Vejamos as tabelas para o termo $f(f(x))$ e para a fórmula $\forall x (P(f(f(x))) \rightarrow \sim P(f(x)))$.

x	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
1	1	1	2	2	V	V	F	F
2	1	2	1	2	V	F	V	F

Para o termo $f(f(x))$ teremos a tabela:

f	x	f(f(x))
f ₁	1	1
f ₁	2	1
f ₂	1	1
f ₂	2	2
f ₃	1	1
f ₃	2	2
f ₄	1	2
f ₄	2	2

E a tabela final:

	P	f	P(f(f(x)))		~P(f(x))		→		fórmula
			x=1	x=2	x=1	x=2	x=1	x=2	
1	P ₁	f ₁	V	V	F	F	F	F	F
2	P ₁	f ₂	V	V	F	F	F	F	F
3	P ₁	f ₃	V	V	F	F	F	F	F
4	P ₁	f ₄	V	V	F	F	F	F	F
5	P ₂	f ₁	V	V	F	F	F	F	F
6	P ₂	f ₂	V	F	F	V	F	V	F
7	P ₂	f ₃	V	F	V	F	V	V	V
8	P ₂	f ₄							V
9	P ₃	f ₁							V
10	P ₃	f ₂							F
11	P ₃	f ₃							V
12	P ₃	f ₄							F
13	P ₄	f ₁							V
14	P ₄	f ₂							V
15	P ₄	f ₃							V
16	P ₄	f ₄							V

Exercício; Completar os espaços vazios da tabela.

Pode-se estender a idéia de “ r é livre para x em $A(x)$ ” para quando r é um termo: o termo r é livre para c em $A(x)$ quando, substituindo r pelas ocorrências livres de x , as variáveis de r continuam livres.

Todos os resultados da teoria de modelos e da teoria de provas para o cálculo de predicados são mantidos sob esta extensão (com modificações nas regras \forall e \exists , onde r agora é um termo).

Igualdade

O cálculo de predicados com igualdade pode ser considerado como uma extensão do cálculo de predicados, com um predicado especial $=$, que assume valores V ou F. A interpretação é óbvia. Por exemplo, com $D = \{1,2\}$ temos:

x	y	$x=y$
1	1	V
1	2	F
2	1	F
2	2	V

Que é um dos 16 predicados possíveis $P(x,y)$

Podemos então montar tabelas de verdade para fórmulas contendo igualdade. Por exemplo, seja $D = \{1,2\}$ e a fórmula $\forall x (P(f(x)) \vee \exists y x = f(f(y)))$.

A tabela tem 16 entradas:

	P	f	P(f(x))		f(f(y))		$\exists y x = f(f(y))$		fórmula
			x=1	x=2	y=1	y=2	x=1	x=2	
1	P_1	f_1	V	V	1	1	V	F	V
2	P_1	f_2	V	V	1	2	V	V	V
3	P_1	f_3	V	V	1	2	V	V	V
4	P_1	f_4	V	V	2	2	F	V	V
5	P_2	f_1			1	1	V	F	V
6	P_2	f_2	V	F	1	2	V	V	V
7	P_2	f_3			1	2	V	V	V
8	P_2	f_4			2	2	F	V	F
9	P_3	f_1	F	F	1	1	V	F	F
10	P_3	f_2			1	2	V	V	V
11	P_3	f_3			1	2	V	V	V
12	P_3	f_4			2	2	F	V	V
13	P_4	f_1			1	1	V	F	
14	P_4	f_2			1	2	V	V	
15	P_4	f_3			1	2	V	V	
16	P_4	f_4			2	2	F	V	

Exercício: Completar a tabela.

Vamos considerar duas fórmulas especiais:

1. $\exists x \forall y (P(y) \rightarrow y=x)$;

Esta fórmula é V quando:

- a) O P é falso para todo y em D;
- b) O P é verdadeiro para um só x em D;

Ou seja, ela traduz: “existe no máximo um x tal que P(x)”.

$$2. \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y=x));$$

Esta diz: “existe exatamente um único x tal que P(x)”.

O que é freqüentemente escrito: $\exists ! x P(x)$ e, para uma fórmula qualquer, $\exists ! x A(x)$.

O cálculo de predicados com igualdade pode ser montado com mais três esquemas de axiomas:

$$16a: \vdash x = x;$$

$$16b: \vdash x = y \rightarrow (x = y \rightarrow y = z);$$

$$17: \vdash x_i = y_i \rightarrow (P(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow P(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n));$$

$$18: \vdash x_i = y_i \rightarrow (f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n));$$

Teorema:

Para variáveis x, y, z teremos r, s, t,.....

- 1. $\vdash x = x;$
- 2. $\vdash x = y \rightarrow y = x;$
- 3. $\vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z;$
- 4. $r = s \vdash P(t_1, \dots, r, \dots) \leftrightarrow P(t_1, \dots, s, \dots);$
- 5. $r = s \vdash f(t_1, \dots, r, \dots) = f(t_1, \dots, s, \dots);$

Prova:

Seguem dos axiomas. Por exemplo, para 16b, faça x substituir z, dando $\vdash x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$. Portanto para provar 2 (simetria de igualdade) basta usar a forma acima de 16b e mais 16a.

Teorema (da substituição)

- a. Para termos: sejam r e s termos quaisquer, t_r um termo contendo r como parte consecutiva, t_s o resultado de substituição de r por s em t_r , então: $r = s \vdash t_r = t_s$.
- b. Para fórmulas: seja ainda C_r uma fórmula contendo r como parte consecutiva, C_s a fórmula resultante da substituição desse r por s, x_1, \dots, x_n as variáveis de r ou s que se tornam dominadas por quantificadores em C. Seja Γ uma lista de fórmulas que não contenham x_1, \dots, x_n livres, então: se $\Gamma \vdash r = s$ então $\Gamma \vdash C_r \leftrightarrow C_s$.

Prova

Semelhante ao teorema da página 50. Construa C_s a partir de s “para fora”. Por exemplo, seja $r = g(x)$ e $s: f(h(x))$, então:

- 1. $\vdash g(x) = f(h(x))$ hipótese
- 2. $\vdash P(g(x), y) \leftrightarrow P(f(h(x)), y);$
- 3. $\vdash \exists x P(g(x), y) \leftrightarrow \exists x P(f(h(x)), y);$
- 4. $\vdash Q(z) \vee \exists x P(g(x), y) \leftrightarrow Q(z) \vee \exists x P(f(h(x)), y);$
- 5. $\vdash \forall z (Q(z) \vee \exists x P(g(x), y)) \leftrightarrow \forall z (Q(z) \vee \exists x P(f(h(x)), y));$

Teoria Formal dos Números

A partir do cálculo de predicados com igualdade é relativamente simples montar uma teoria formal para a aritmética. Trata-se de estender a linguagem objeto para introduzir uma estrutura que pode ser interpretada na teoria dos números, ou seja, os axiomas introduzidos são verdadeiros quando entendidos na interpretação da teoria (informal) dos números.

Os símbolos formais usados são:

$\leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, \sim, \forall, \exists, =, +, *, ', 0, a, b, c, \dots, 1$.

Ou seja, adicionam-se $+, *, ', 0$ e as variáveis (na linguagem objeto) a, b, c, \dots e o índice 1 . Note que agora a metavariable c pode assumir valores $a, b, \dots, a_{11}, a_{111}, \dots$. Os “termos” agora são mais restritos.

Definição de termos:

1. 0 é um termo;
2. As variáveis $a, b, c, \dots, a_1, b_1, \dots$ são termos;
3. Se r e s são termos, então $r', r+s, r*s$ também são termos;
4. Os únicos termos são os obtidos da aplicação das regras 1, 2, 3.

Note que “ $r+s$ ” não é um termo na linguagem objeto. “ $a'+b_{111}$ ” é. Como é “ $(a'*b)+(c'*d)$ ”.

Definição (de fórmulas):

1. Se r e s são termos, então $r = s$ é uma fórmula;
2. Se A e B são fórmulas, então $A \leftrightarrow B, A \rightarrow B, A \wedge B, A \vee B, \sim A$ são fórmulas;
3. Se A é uma fórmula e x uma variável, então $\forall x A$ e $\exists x A$ são fórmulas;
4. As únicas fórmulas.....(etc).

Nesta definição, r, A e x são símbolos metalinguísticos. $\forall x (A \vee B)$ não é uma fórmula na linguagem objeto, mas $\forall a (a=0 \vee \exists b a=b)$ é.

Pode-se usar também abreviações metalinguísticas. Assim, $a \neq b$ pode abreviar $\sim(a=b)$ e $a < b$ para $\exists c (c' + a = b)$.

O sistema formal N então irá conter:

- a) Todos os axiomas do cálculo de predicados, onde para os esquemas \forall e \exists e regras \forall e \exists , r pode ser um termo como definido acima.
- b) Os seguintes axiomas adicionais (vamos numerá-los após os axiomas da igualdade)

19. $\vdash A(0) \wedge \forall x (A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow A(x)$. Este é um esquema de axiomas, onde $A(x)$ é qualquer fórmula com a (meta) variável x livre.

20. $\vdash a' = b' \rightarrow a = b$;

21. $\vdash \sim(a' = 0)$;

22. $\vdash a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c)$, que corresponde a 16b;

23. $\vdash a = b \rightarrow a' = b'$;

24. $\vdash a + 0 = a$;

25. $\vdash a + b' = (a + b)'$;

26. $\vdash a * 0 = 0$;

27. $\vdash a * b' = a * b + a$.

Essencialmente, N é o cálculo de predicados aumentado dos axiomas (não-lógicos) 19 a 27.

Esses axiomas podem ser considerados como hipóteses Γ nos resultados sobre deducibilidade. Também, os axiomas “abertos” 20 a 27 podem ser considerados sinônimos de axiomas “fechados”.

(por exemplo: $\forall a \forall b (a = b \rightarrow a' = b')$).

Pode-se dizer que B é provável em N, $\vdash B$ em N, sse para alguma lista A_1, A_2, \dots, A_n de axiomas não-lógicos de N, $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash B$ no cálculo de predicados, ou, equivalentemente, $\forall A_1, \forall A_2, \dots, \forall A_n \vdash B$ onde $\forall A_i$ é o fechamento de A_i .

A interpretação natural de N (que faz com que os axiomas ou hipóteses 19 a 27 sejam “verdadeiras”) é a aritmética dos números naturais. Assim, nele, $0' = 1$, $0'' = 1' = 2$, $0''' = 1'' = 2' = 3$, etc.

O esquema 19 e axiomas 20 e 21 são, essencialmente, os axiomas III, IV, V de Peano. O axioma I de Peano diz que 0 é um número natural, e o II diz que se n é um número natural, n' também é. Esses dois axiomas estão “embutidos” na lista de símbolos e na definição de “termo”.

Os axiomas 22 a 27 merecem comentários: os axiomas 22 e 23 são axiomas para a igualdade, e substituem os axiomas 16 e 18. os axiomas 24 a 27 não são estritamente necessários (os 5 axiomas de Peano são suficientes para a aritmética).

Vamos dar alguns exemplos de prova:

1. $\vdash a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c)$ axioma 22;
2. $\vdash a \rightarrow 0 = a \rightarrow (a + 0 = a \rightarrow a = a)$;
3. $\vdash a + 0 = a$ axioma 24;
4. $\vdash a = a$ 2, 3, M.P.

Portanto a reflexividade de igualdade em N pode ser deduzida.

1. $a = b \vdash a * 0 = b + 0$ simetria da =;
2. $\vdash (c = b) \rightarrow (c + 0 = b + 0)$ teorema de dedução;
3. $\vdash a + c' = (a + c)'$ axioma 25;
4. $\vdash b + c' = (b + c)'$ axioma 25;
5. $\vdash a + c = b + c \rightarrow (a + c)' = (b + c)'$ axioma 23;
6. $\vdash a + c = b + c \rightarrow a + c' = b + c'$ 5, 3, 4, axioma 22;
7. $\vdash \forall c (a + c = b + c \rightarrow a + c' = b + c')$ introdução do \forall ;
8. $\vdash (a + 0 = b + 0) \wedge \forall c (a + c = b + c \rightarrow a + c' = b + c') \rightarrow a + c = b + c$ axioma 19, c como x;

ou: $a = b \vdash a + c = b + c$;

ou: $\vdash (a = b) \rightarrow (a + c = b + c)$;

9. $a = b \rightarrow a + c = b + c$ 1, 7, 8, M.P., etc;

Com esse resultado pode-se provar a associatividade de soma, $(a + b) + c = a + (b + c)$. (Exercício)

Assim como $\exists c (c' + a = b)$ representa formalmente a abreviação de $a < b$, também $\exists c (a * c = b)$ representa $a \mid b$ (a divide b). que a é um número primo pode ser representado por $1 < a \wedge \sim \exists c (1 < c \wedge c < a \wedge c/a)$, já usando as abreviações anteriores.

Exercício:

Escreva o predicado “a é um número primo” sem usar as abreviações $<$ e $/$.

Como os termos só contêm os operadores $'$, $+$ e $*$, as funções esprimíveis formalmente são só os polinômios.

Suponha que $f(x_1, \dots, x_n)$ seja uma função numérica qualquer. Pode-se montar um predicado $F(x_1, \dots, x_n, y)$ que é \forall sse $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Esse predicado chama-se representante de f .

Por exemplo, a função fatorial, $x! = y$, pode ser escrita como $!(x, y)$ e, por exemplo:

$$\exists u \exists v [!(x + 1, u) \wedge !(x, v) \wedge u = v * (x + 1)];$$

diz que $(x + 1)! = x! * (x + 1)$.

Portanto, N é adequado para a teoria (informal) de números, embora um tanto “desajeitado”.

Outros sistemas formais, como N , podem ser facilmente estabelecidos como extensões do Cálculo de Predicados.

Por exemplo, sejam os símbolos formais:

$$\sim, \rightarrow, \wedge, \vee, \forall, \exists, =, *, ', 1, a, b, c, \dots, 1.$$

Definição de “termo”:

1. “1” é um termo;
2. as variáveis $a, b, \dots, a_1, a_{11}, \dots$ são termos;
3. se r é um termo, $r * s$ e r' também são;
4. os únicos termos.....etc.

A definição de “fórmula” é a mesma da página 55.

Os axiomas adicionais são:

$$G19: a = b \rightarrow (a = c \rightarrow b = c);$$

$$G20: a = b \rightarrow a * c = b * c;$$

$$G21: a = b \rightarrow c * a = c * b;$$

$$G22: (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$G23: a * 1 = a;$$

$$G24: a * a' = 1.$$

O sistema formal resultante, G , pode ser interpretado por qualquer grupo de G , que normalmente é definido como um conjunto g fechado para uma operação $*$ associativa, e que possui um elemento “identidade” 1 (ou “E”) e inversos a' para todo $a \in g$.

Teorema da Incompleteza de Gödel

Já vimos que o cálculo de predicados é completo, no sentido que, nele, se $\models A$ então $\vdash A$. Também vimos que ele é consistente, no sentido de que não existe A tal que $\vdash A$ e $\vdash \sim A$. Por outro lado, embora o cálculo de proposição seja decidível, o cálculo de predicados não é: é impossível construir um procedimento automático (algoritmo ou programa) tal que, dada uma fórmula qualquer A , decide se $\vdash A$ ou $\vdash \sim A$ (ou $\sim \vdash A$).

Gödel mostrou:

1. que não é possível provar a consistência de um sistema formal suficientemente rico para englobar a aritmética, a não ser que usem

2. qualquer sistema formal desse tipo (inclusive o nosso N) é inerentemente incompleto.

Podemos associar a cada símbolo, fórmula e prova do sistema formal um único número inteiro (isto é, codificar as fórmulas) de várias maneiras.

()	∨	∧	∃	∀	~	=	0	,
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Seja a fórmula:

$$\frac{(\forall y)(\forall x)(x=y)'}{1614216112111814102}$$
$$n = 2^1 * 3^6 * 5^{14} * 7^2 * 11^1 * \dots$$

Uma outra maneira ´se considerar um alfabeto completo:

$$\vdash () \vee \wedge \exists \forall \sim = 0, \underbrace{A B Z}_{a b z} \quad 1$$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 25 símbolos 35 25 símbolos 60 61

No caso anterior (sem parêntesis).

$$\forall y \forall x (x = y) \quad 6 \quad 59 \quad 6 \quad 58 \quad 58 \quad 8 \quad 59 \quad 10$$
$$10+59*62+8*62^2+58*62^3+.....=n|_{10}10=3.7016098E12$$

Analogamente, uma prova formal no sistema pode ser associada a um único número.

Por exemplo: “A seqüência de fórmulas cujo n^oG é x é uma demonstração de fórmula com n^oG z ”, denota uma relação entre os “números” x e z :

Que pode ser V ou F – esse predicado é decidível! (Como?).

Considere a fórmula:

$$\exists x (x = y');$$

Digamos que seu número de Gödel é m . Vamos colocar o próprio m no lugar de y ;

$$\exists x (x = m');$$

Isto é, criamos uma nova fórmula colocando m onde estava y . Seu $n^\circ G$ será dado por:

$$\text{sub}(m, y, m);$$

(ou $\text{sub}(m, 59, m)$) que é uma função computável:

“O $n^\circ G$ da fórmula obtida substituindo na fórmula de $n^\circ G$ m a variável y por m ”.

Considere agora a fórmula:

$$\forall x \sim \text{Dem}(x, z) \text{ (a fórmula cujo } n^\circ G \text{ é } z \text{ não é demonstrável);}$$

z é um número; vamos colocar outro número no lugar dele:

$$\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(y, 59, y)); (1);$$

Que diz que a fórmula cujo $n^\circ G$ é $\text{sub}(y, 59, y)$ não é demonstrável. (1), por sua vez, é uma fórmula, e tem um n° de Gödel.

Seja n esse número. Considere:

$$\forall x \sim \text{Dem}(x, \text{sub}(n, 59, n)); (2);$$

Como foi obtida (2)? Substitui-se na fórmula de número n , (1), a variável y , (59), por n . O $n^\circ G$ de (2) é, portanto, $\text{sub}(n, 59, n)$!

O que diz (2)? Que a fórmula de $n^\circ G$ $\text{sub}(n, 59, n)$ (ela própria) não é demonstrável!

Então (2) é (metamatemáticamente) verdadeira e não é demonstrável no sistema formal. (vide paradoxos)

“Ueber Formal Unentscheidbare: Saetze der Priniepia Mathematica und Verwandter Systeme)” (Gödel, 1931).

Alguns detalhes adicionais:

Dissemos que quando uma prova formal do sistema pode ser codificada também é o seu (único) $n^\circ G$.

Vamos dar um exemplo. A prova de $c = a$. Ela pode ser re-escrita sem usar o símbolo \rightarrow .

1. $\vdash \sim(a = b) \vee (\sim(a = c) \vee (b = c))$
ou $\vdash \sim(a = b) \vee \sim(a = c) \vee b = c$
2. $\vdash \sim(a + 0 = a) \vee (\sim(a + 0 = a) \vee (a = a))$
ou $\vdash \sim(a + 0 = a) \vee a = a$
3. $\vdash a + 0 = a$
4. $\vdash a = a$

$$\vdash \sim(a=b) \vee \sim(a=c) \vee b=c \vdash \sim(a+0=a) \vee a=a \vdash a+0=a \vdash a=a;$$
$$m = 36 + 8 * 62 + 36^2 * 62 + 0 * 62^3 + 36^4 * 62 + \dots + 7 * 62^{39} + 0 * 62^{40}$$

Onde 138932 é o nº G da $a = a -$ nesse caso, o predicado avalia a V.

Como não temos a vírgula no nosso alfabeto, vamos usar a barra |. Também para simplificar, vamos usar D para Dem e s para a função sub.

$$\forall x \sim D(x \mid s(n \mid 59 \mid n))$$

Ou seja:

$$\text{Sub}(n, 59, n) = 2^{+2} * 62^2 + 49 * 62^3 + 61 * 62^{15} + \dots + 6 * 62 \equiv 5.334206326\text{E}27$$

Calcule o n° G da fórmula (1) – ou seja, calcule o valor de n , com as simplificações adotadas acima.

Note que a inserção de novos símbolos no alfabeto (vírgula, algarismos, etc) não altera em nada o raciocínio, somente mudando a base (62) na representação dos mínimos de Gödel.

Uma extensão interessante do Cálculo de Predicados, especialmente do ponto de vista de notação, é a de permitir quantificação de proposições e predicados. Chega-se assim ao C.P. de 2ª ordem.

$$\forall P \forall x (P(x) \vee \sim P(x))$$

que é um modo suscito de descrever o “*tartium non datur*” para predicados.

Seja A uma proposição (ou mesmo uma fórmula sem x livre). Então:

$$\forall A \forall B (\forall x (A \rightarrow B(x)) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall x B(x)))$$

é outro modo de se escrever 42 – naquele caso, $\forall A \forall B$ não estava escrito explicitamente, mas estava contido no enunciado do teorema.

Na Teoria de Números, o esquema de axiomas 19, pode ser re-escrito assim:

$$\forall A \{ (A(0) \wedge \forall x \forall y (A(x) \wedge y = x' \rightarrow A(y)) \rightarrow \forall x A(x) \};$$

No Cálculo de Predicados com igualdade, a definição do predicado especial $_ = _$, ou de $x = y$, pode ser considerada como uma abreviação de:

$$\forall P (P(x) \leftrightarrow P(y));$$

Que é uma definição de igualdade através de propriedades (todas as propriedades que x tem, y também tem e vice-versa).

Digamos que se queira dizer que qualquer predicado $Q(x, y)$ equivalente a $x = y$ tem que ser simétrico. Isso pode ser escrito:

$$\forall Q (\forall x \forall y (Q(x, y) \leftrightarrow P(P(x) \leftrightarrow P(y))) \rightarrow \forall x \forall y (Q(x, y) \rightarrow Q(y, x)));$$

Pode-se dizer, também, que $\forall x \forall y P(x, y)$ não é válida, pode-se escrever:

$$\sim \forall P \forall x \forall y P(x, y);$$

ou, equivalentemente:

$$\exists P \exists x \exists y \sim P(x, y).$$

No Cálculo de Proposições, pode-se agora escrever o teorema que diz que para cada proposição X (usando letras maiúsculas para indicar variáveis cujos valores são proposições) existe outra, Y , tal que só uma das duas é verdadeira.

$$\forall X \exists Y ((X \vee Y) \wedge \sim (X \wedge Y));$$

Também pode-se dar regras para eliminar quantificadores:

$$\forall X ((A \vee X) \wedge (B \vee \sim X)) \leftrightarrow A \wedge B$$

$$\exists X ((A \vee X) \wedge (B \vee \sim X)) \leftrightarrow A \vee B$$

Fórmulas válidas no C.P. são válidas no C.P.₂, mesmo com a adição de quantificadores para predicados, onde eles eram implícitos.

Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \vdash_2 \forall A (\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall y \exists x A(x, y)) & 32; \\ \vdash_2 \forall A \forall B (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B(x))) & 34; \\ \vdash_2 \forall A \forall B (A \wedge \exists x B(x) \leftrightarrow \exists x (A \wedge B(x))) & 38 \end{array}$$

(onde A não tem x livre);

O C.P.₂ pode ser axiomatizado, produzindo um sistema formal. No entanto, não existe um conjunto de axiomas completo para ele – como N , o C.P.₂ é inerentemente incompleto (Gödel, 1931).

Note que predicados podem ter propriedades. Os símbolos para predicados podem ser tratados como variáveis (do “tipo” predicado) no C.P.₂. Assim, pode-se escrever:

$$\forall F \varphi(F) \rightarrow \varphi(G);$$

Onde $\varphi(F)$ é uma fórmula que tem a var_2 F livre, mas não tem a var_2 G livre, e $P(G)$ é obtido pela substituição uniforme de F por G em $\varphi(F)$. Aqui, φ é um predicado de predicado.

Assim como as fórmulas válidas do Cálculo de Proposições deram fórmulas válidas no C.P., aqui também as fórmulas válidas no C.P. podem dar fórmulas válidas no C.P.₂. Assim:

$$\vdash_2 \sim \exists P \varphi(P) \leftrightarrow \forall P \sim \varphi(P) \quad 33a$$

e:

$$\vdash_2 \forall P (\varphi(P) \rightarrow Q(P)) \rightarrow (\exists P \varphi(P) \rightarrow \exists P Q(P))$$

uma vez que:

$$\vdash_1 \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$$

As propriedades de predicados podem ser definidas em termos das variáveis do sistema formal. Assim podemos ter:

$$\text{Ref (R): } \forall x R(x, x);$$

$$\text{Sim (R): } \forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x));$$

$$\text{Trans (R): } \forall x \forall y \forall z (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$$

Assim, Ref (=), Sim (=), Trans (=) são verdadeiros. Tran (<) é verdadeiro e Sim (<) é falso.

$$\text{Inc (P, Q): } \forall x (\sim P(x) \vee \sim Q(x));$$

$$\text{Imp (P, Q): } \forall x (P(x) \rightarrow Q(x));$$

Este último podendo ser escrito $P \xrightarrow{2} Q$. Assim

$$\vdash_2 \forall P \forall Q (P \xrightarrow{2} (Q \xrightarrow{2} (P \wedge Q)));$$

O Conceito de Número

Como em C.P.₂ temos predicados de predicados, nele podemos representar números, como propriedades de predicados. Assim:

$$\text{Terra (x)}$$

$$\text{Deus (x)}$$

São predicados que são \forall só pra um valor de x (o segundo não, por exemplo, na mitologia grega).

Podemos escrever:

$$0(P): \sim \exists x P(x);$$

$$1(P): \exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow = (x, y)));$$

$$2(P): \exists x \exists y (\sim = (x, y) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge \forall z (P(z) \rightarrow = (x, z) \vee = (y, z)));$$

E a equivalência numérica de dois predicados, E N(P, Q), diz que os elementos para os quais P é V podem ser colocados em correspondência 1:1 com os elementos para os quais Q é V.

A adição de números pode então ser reduzida a disjunção de predicados incompatíveis. Se P e Q são incompatíveis e m(P) e n(Q) então m + n (P \vee Q).

Uma igualdade como 1 + 1 = 2 reduz-se a uma fórmula (provável em C.P.₂):

$$\forall P \forall Q (\text{Inc (P, Q)} \wedge 1(P) \wedge 1(Q)) \rightarrow 2 (P \vee Q).$$

Teoria de Conjuntos

Um conjunto pode ser dado pela enumeração de seus elementos ou por um predicado que é V para os elementos do conjunto. Por exemplo:

$$A = \{1, 2, 3\};$$

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 5\};$$

Mesmo no 1º caso, pode-se escrever um predicado descritivo de A:

$$A = \{x \mid x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3\}$$

Para um dado predicado, o conjunto correspondente é único. Para um dado conjunto, pode-se escrever mais do que um predicado – eles são equivalentes:

$$\text{Eq}(P, Q): \forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x));$$

Assim, o conceito de número como propriedade de predicados é essencialmente o mesmo conceito (cardinalidade) de propriedade de conjuntos.

Os outros conceitos comuns da teoria de conjuntos são exprimíveis no C.P.₂: se P_1 e P_2 são predicados que definem dois conjuntos, A_1 e A_2 :

$$A_1 \cup A_2 \quad \text{corresponde a} \quad P_1 \vee P_2;$$

$$A_1 \cap A_2 \quad \text{corresponde a} \quad P_1 \wedge P_2;$$

$$A_1 \subset A_2 \quad \text{corresponde a} \quad \forall x (P_1(x) \rightarrow P_2(x)) \text{ ou } P_1 \xrightarrow{2} P_2;$$

$$\#A_1 = \#A_2 \quad \text{corresponde a} \quad \text{EN}(P_1, P_2);$$

O conjunto de subconjuntos de um dado conjunto D pode ser dado por um predicado₂, $\text{Sub}(P, D)$, que é V sse $P \xrightarrow{2} D$.

Assim como um predicado $P(x)$ define um conjunto $\{x \mid P(x)\}$, também um predicado₂, $F(P)$, define um conjunto de conjuntos. A união de todos esses conjuntos é dada por:

$$\{x \mid \exists P (F(P) \wedge P(x))\}$$

Com a expressão $\exists P (F(P) \wedge P(x))$ em C.P.₂. A interseção deles é dada por $\{x \mid \forall P (F(P) \rightarrow P(x))\}$

É importante que se distinga predicado₁ de predicados de predicados (ou predicado₂). Senão vejamos: seja $P(F)$ um predicado. Então $P(P)$ pode ser V ou F (por exemplo, “o predicado Sim é simétrico”, $\text{Sim}(\text{Sim})$, é F, porque Sim só tem um argumento).

$P(P)$ exprime a propriedade de que P é aplicável a si mesmo. Escrevamos $\text{ASM}(P)$ para isso. Então $\text{ASM}(\sim\text{ASM})$ e $\sim\text{ASM}(\sim\text{ASM})$ tem sentido. Mas $\sim\text{ASM}(\sim\text{ASM})$ ou é V (e nesse caso $\text{ASM}(\sim\text{ASM})$ é V) ou é F (e nesse caso $\text{ASM}(\sim\text{ASM})$ é F), ou seja:

$$\text{ASM}(\sim\text{ASM}) \leftrightarrow \sim\text{ASM}(\sim\text{ASM})$$

Que é outra forma de paradoxo de Russel.