CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação O
  - Exercícios

COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

- Importância de análise de algoritmos
  - Um **mesmo problema** pode, em muitos casos, ser resolvido por **vários algoritmos**.
  - Nesse caso, qual algoritmo deve ser o escolhido?

- **Critério 1:** fácil compreensão, codificação e correção
  - Geralmente, são algoritmos ineficientes
  - Este critério seria adequado se o algoritmo fosse executado poucas vezes:
    Custo de programação (Cp) > Custo de execução (Ce)

COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

- **Critério 2: eficiência** no uso dos recursos computacionais e rapidez na execução
  - Geralmente, são algoritmos mais complicados
  - Critério mais adequado para o caso de algoritmos muito utilizados (Cp < Ce)
- **Medição de eficiência:** uso de memória e tempo de execução
  - Nesta disciplina, a ênfase é dada para algoritmos eficientes no **tempo de execução**.
  - Há muitos casos em que algoritmos simples **não** são executados em **tempo viável**

COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

- **Exemplo:** Regra de Cramer para a solução de sistemas de equações lineares

$$
\begin{array}{l}
A_{11}\ x_1 + A_{12}\ x_2 + \dots + A_{1n}\ x_n = B_1 \\
A_{21}\ x_1 + A_{22}\ x_2 + \dots + A_{2n}\ x_n = B_2 \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
A_{n1}\ x_1 + A_{n2}\ x_2 + \dots + A_{nn}\ x_n = B_n
\end{array}
$$

$$
X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}
$$

COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

- Considerando n = 20, quantos determinantes seriam calculados?
  - 20 para os numeradores e 1 para o denominador

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Complexidade de Algoritmos

- Cálculo do número m de multiplicações:

multiplicações

$21\ det_{20} = 21\ (\ 20m + 20\ det_{19}\ )$

$= 21\ (\ 20m + 20\ (\ 19m + 19\ det_{18}\ ))$

$= 21\ (\ 20m + 20\ (\ 19m + 19\ (\ 18m + 18\ det_{17}\ )))$

$= 21\ (\ 20m + 20\ (\ 19m + 19\ (\ 18m + 18\ (\ 17m +$
$17\ (\ldots.\ (\ 3m + 3\ (\ 2m\ )\ldots.)))))$

Lembrando do cálculo recursivo de determinante:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \cdot detA_{-i,-j}\,.$$

Complexidade de Algoritmos

= 21 (20m + 20 (19m + 19 (18m + 18 (17m +
17 (.... (3m + 3 (2m)....)))))

$$
\begin{array}{rl}
= m\,(& 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times 20 \times 21 \; + \\
+ & 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times 20 \times 21 \; + \\
+ & 4 \times 5 \times \ldots \times 20 \times 21 \; + \\
+ & 5 \times \ldots \times 20 \times 21 \; + \\
: & \qquad : \\
+ & 19 \times 20 \times 21 \; + \\
+ & 20 \times 21 \,)
\end{array}
$$

$$21!\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \ldots\ +\frac{1}{19!}\right) \cong 8.778 \times 10^{19} \text{ multiplicações}$$

Complexidade de Algoritmos

$$21!\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\;....\;+\frac{1}{19!}\right)\cong 8.778\text{ x }\;10^{19}\text{ multiplicações}$$

- Utilizando um supercomputador atual:
  - 10^{11} multiplicações por segundo
  - Tempo gasto: 8,778 x 10^{8} s = 27,8 anos!
- Um algoritmo mais eficiente é o *Método da Eliminação de Gauss*
  - 209 divisões + 2850 multiplicações

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação O
  - Exercícios

Avaliação do tempo de execução

- Ex: método de ordenação *Bubble-Sort*

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
         while (i <= p) {
            if (A[i] > A[i+1]) {
                  aux = A[i];
                  A[i] = A[i+1];
                  A[i+1] = aux;
                  trocou = TRUE;
            }
            i = i + 1;
         }
      p = p - 1;    }   }
```

i					p	
32	8	40	21	3	97	15
	i				p	
8	32	40	21	3	97	15
		i			p	
8	32	40	21	3	97	15
			i		p	
8	32	21	40	3	97	15
				i	p	
8	32	21	3	40	97	15
					i p	
8	32	21	3	40	97	15
					p	i
8	32	21	3	40	15	97

Avaliação do tempo de execução

- Ex: método de ordenação *Bubble-Sort*

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
      while (i <= p) {
         if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i];
               A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux;
               trocou = TRUE;
         }
         i = i + 1;
      }
      p = p - 1;    }  }
```

i				p		
8	32	21	3	40	15	97

	i			p		
8	32	21	3	40	15	97

		i		p		
8	21	32	3	40	15	97

			i	p		
8	21	3	32	40	15	97

				i p		
8	21	3	32	40	15	97

				p	i	
8	21	3	32	15	40	97

...

3	8	15	21	32	40	97

Avaliação do tempo de execução

Operação	Tempo(ns)	Operação	Tempo(ns)	Operação	Tempo(ns)
Atrib int	1	+ - < <== int	2	+ - < <== float	15
Atrib float	2	&&	1,5	[ ]	8
* int	5	* float	20		
/ int	8	/ float	30		

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n – 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {
          if (A[i] > A[i+1]) {
              aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
              A[i+1] = aux; trocou = TRUE;
          }
          i = i + 1;
       }
       p = p – 1;   } }
```

4 ns

3,5 ns

2 ns

2 ns

33 ns

43 ns

3 ns

3 ns

Obs: supomos que vetor **A** contém números do tipo **float**

Mas quantas vezes cada trecho será executado?

Avaliação do tempo de execução

- Análise do pior caso
  - Ocorrerá quando o teste do **`if`** for sempre verdadeiro
  - O que isso significa isso?

Vetor em ordem decrescente

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {
          if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux; trocou = TRUE;
          }
          i = i + 1;
       }
     p = p - 1;    } }
```

4 ns executado 1 vez

3,5 ns executado **n** vezes

2 ns executado **n**-1 vezes

2 ns executado **p+**1 vezes a cada iteração do **while** externo

79 ns executado **p** vezes a cada iteração do **while** externo

3 ns executado **n**-1 vezes

Avaliação do tempo de execução

- Análise do pior caso
  - Ocorrerá quando o teste do `if` for sempre verdadeiro
  - O que isso significa isso?

Vetor em ordem decrescente

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n – 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {
          if (A[i] > A[i+1]) {
              aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
              A[i+1] = aux; trocou = TRUE;
          }
          i = i + 1;
       }
       p = p – 1;    } }
```

4 ns executado 1 vez

3,5 ns executado **n** vezes

2 ns executado **n**-1 vezes

2 ns Total = **n** + (**n**-1) + … + 3 + 2

79 ns Total = (**n**-1) + … + 3 + 2 + 1

3 ns executado **n**-1 vezes

Avaliação do tempo de execução

$$T(n) = 4 + 3{,}5n + 2(n\text{-}1) + 2\,(n + (n\text{-}1) + \ldots + 3 + 2) + 79\,((n\text{-}1) + (n\text{-}2) + \ldots + 2 + 1) + 3(n\text{-}1)$$

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n – 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
        while (i <= p) {
           if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux; trocou = TRUE;
           }
           i = i + 1;
        }
        p = p – 1;    } }
```

4 ns executado 1 vez

3,5 ns executado **n** vezes

2 ns executado **n**-1 vezes

2 ns Total = **n** + (**n**-1) + ... + 3 + 2

79 ns Total = (**n**-1) + ... + 3 + 2 + 1

3 ns executado **n**-1 vezes

Avaliação do tempo de execução

- Pior caso do *Bubble-Sort*:

$$T(n) = 4 + 3{,}5n + 2(n-1) + \\ 2\,(n + (n-1) + \ldots + 3 + 2) + \\ 79\,((n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1) + 3(n-1)$$

$$\mathbf{T(n) = 40{,}5n^2 - 30n - 3}$$

  - Quando n aumenta indefinidamente, o termo com n^2 predomina sobre os demais
  - T(n) é proporcional a n^2
  - Também há casos melhores: nem todos os testes do comando **`if`** são sempre verdadeiros

Avaliação do tempo de execução

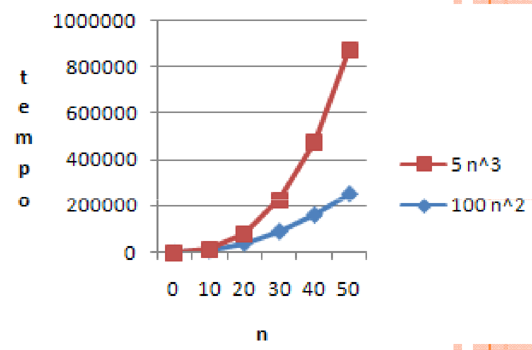
- Casos mais estudados:
  - Pior caso
  - Caso médio
- Razões para estudar o pior caso:
  - O tempo de execução do pior caso de um algoritmo é o *limite superior* do tempo de execução para uma entrada qualquer.
  - Para alguns algoritmos, o pior caso ocorre com bastante frequência.
  - Geralmente, o caso médio não é fácil de ser calculado. Várias vezes, ele é quase tão ruim quanto o pior caso.

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação O
  - Exercícios

Razão de crescimento desse tempo

- Ex1: Sejam A1 e A2 dois algoritmos que resolvem o mesmo problema, e com os respectivos tempos de execução:
  - $T_1(n) = 100n^2$
  - $T_2(n) = 5n^3$

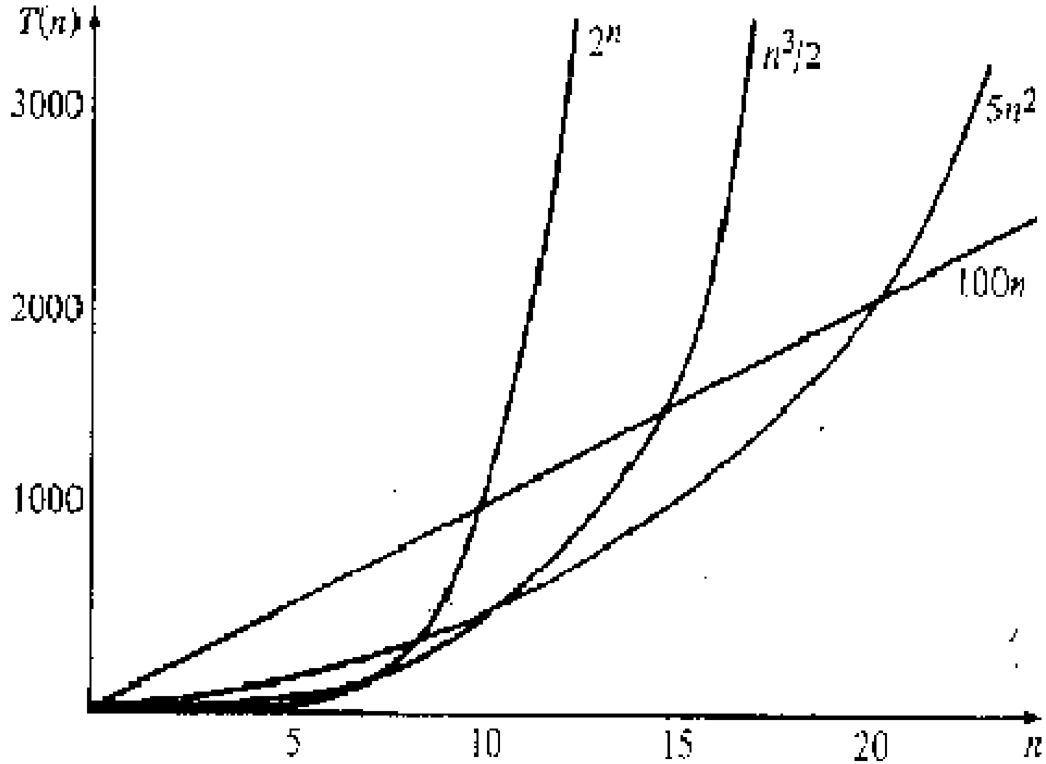


- Qual desses algoritmos é o melhor?
  - Dependerá do valor de n
    - Empate: $100n^2 = 5n^3 \Rightarrow n = 20$
    - Para $n < 20$, A2 é melhor
    - Para $n > 20$, A1 é melhor

A1 é considerado o melhor

RAZÃO DE CRESCIMENTO DESSE TEMPO

- Ex2: Considere 4 algoritmos que resolvem o mesmo problema de tamanho n.
- Abaixo, seus respectivos tempos de execução:
  - $T_1(n) = 100n$
  - $T_2(n) = 5n^2$
  - $T_3(n) = n^3/2$
  - $T_4(n) = 2^n$



RAZÃO DE CRESCIMENTO DESSE TEMPO

- Suponha que esse problema precise ser resolvido em no máximo 1.000 segundos.

$T(n)$	n para 10^3 seg
$100n$	10
$5n^2$	14,14
$n^3/2$	12,60
2^n	9,97

- Os problemas solucionáveis pelos 4 algoritmos têm tamanho da mesma ordem de magnitude (em torno de 10).

Razão de crescimento desse tempo

- Considerando uma máquina mais rápida, elevemos esse tempo para 10.000 segundos.

T(n)	n para 10^3 seg	n para 10^4 seg	Ganho
100n	10	100	10
$5n^2$	14,14	44,72	3,16
$n^3/2$	12,60	27,14	2,15
2^n	9,97	13,28	1,33

- Repare que o algoritmo 4 só poderá resolver um problema **1,33 vezes** maior...

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação O
  - Exercícios

NOTAÇÃO O

- Seja o tempo de execução de um algoritmo igual a uma somatória de termos (funções do tamanho da entrada):
  - $T_1(n) = c_1.n^3 + c_2.n^2 + c_3.n + c_4$
  - $T_2(n) = 2^n + n^3/2 + 5n^2 + 100n$

$T_1(n) = O(n^3)$

$T_2(n) = O(2^n)$

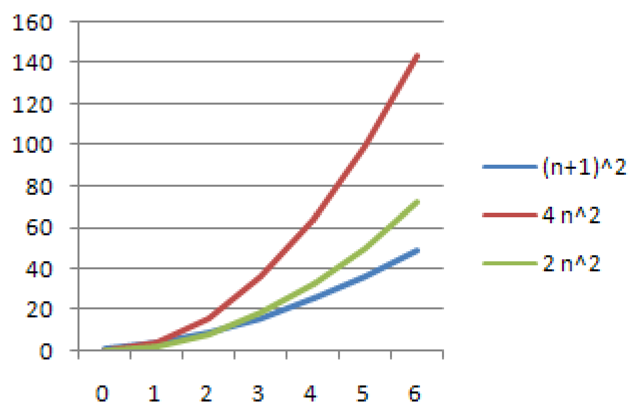
- À medida que **n** aumenta indefinidamente, um dos termos passa a ter domínio sobre os demais:
  - $\mathbf{T_1(n)}$ é proporcional a $\mathbf{n^3}$**: é da ordem de** $\mathbf{n^3}$
  - $\mathbf{T_2(n)}$ é proporcional a $\mathbf{2^n}$: **é da ordem de** $\mathbf{2^n}$

Notação O

- **Definição: T(n) = O (f(n))** , ou seja, **T(n)** é da ordem de **f(n)** se e somente se existirem **constantes positivas c** e $\mathbf{n_0}$ tais que, para qualquer $\mathbf{n \geq n_0}$, **$T(n) \leq c.f(n)$**
- Ex1: $T(n) = (n+1)^2 = O(n^2)$
  - $\mathbf{(n+1)^2 \leq 4n^2}$, $n \geq 1$ (basta escolher $n_o = 1$ e $c = 4$)
  - Poderia ser c = 2?

Sim, mas $n_0 = 3$

n	0	1	2	3	4	5
$(n+1)^2$	1	4	9	16	25	36
$4n^2$	0	4	16	36	64	100
$2n^2$	0	2	8	18	32	50



NOTAÇÃO O

- Ex2: Pior caso do *Bublle–Sort*

  $T(n) = 40{,}5n^2 – 30n – 3 = O(n^2)$

  - **$T(n) \leq 40{,}5n^2$** (sendo $n_o = 1$ e $c = 40{,}5$)

- Ex3: Seja $T(n)$ o polinômio de grau $p \in N^+$, onde $a_0 \geq 0$:

$$T(n) = a_0.n^p + a_1.n^{p-1} + \ldots + a_{p-1}.n + a_p$$

$$\leq a_0.n^p + |a_1|.n^{p-1} + \ldots + |a_{p-1}|.n + |a_p|$$
$$\leq a_0.n^p + |a_1|.n^p + \ldots + |a_{p-1}|.n^p + |a_p|.n^p$$
$$\leq (a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{p-1}| + |a_p|).n^p$$
$$\leq c.n^p, \text{ para } n \geq 1$$

$T(n) = O(n^p)$

NOTAÇÃO O

- $T(n) = O(f(n))$
  - $f(n)$ é um limite superior para a taxa de crescimento de $T(n)$
  - Dado $T(n)$, temos uma única $f(n)$?
    - Não, pois várias funções podem satisfazer a definição.
    - Exemplo: $T(n) = 4n^2 + 3n + 1$
    - $T(n)$ é $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n^{10})$
    - No entanto, $T(n)$ não é $O(n)$
  - Na análise de algoritmos, as taxas mais usadas são n^2, n^3, n^i, $\log n$, $n.\log n$, 2^n, 3^n, etc.

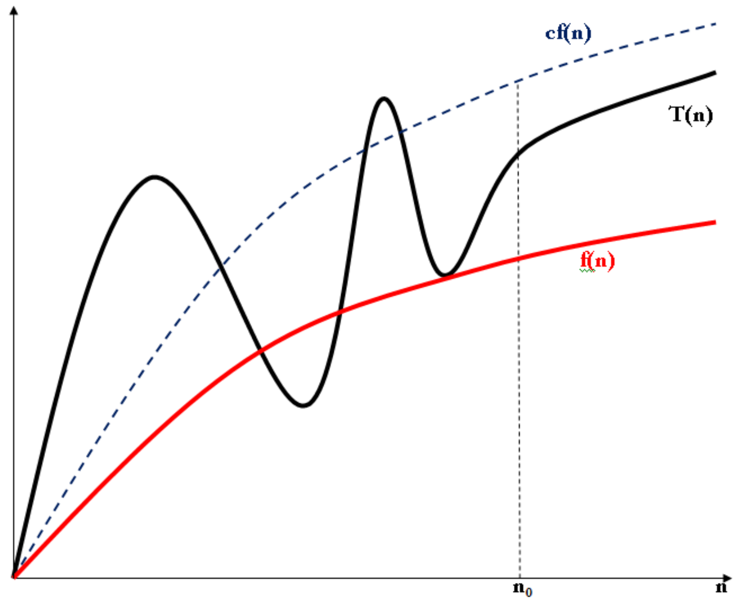
Dentre todas as possíveis funções **f(n)**, o objetivo é encontrar a que tenha o menor crescimento possível

NOTAÇÃO O

- Notações similares:
  - $T(n) = O(f(n))$
    - $T(n) \leq c.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - $f(n)$ é um limite superior para $T(n)$
  - $T(n) = \Omega(f(n))$
    - $T(n) \geq c.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - $f(n)$ é um limite inferior para $T(n)$
  - $T(n) = \Theta(f(n))$
    - $T(n) \leq c_1.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - $T(n) \geq c_2.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - $f(n)$ é um limite inferior e superior de $T(n)$

Big-Omega

Big-Teta



CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação O
  - Exercícios

Exercícios

- 1. Provar que $n^3 \neq O(n^2)$

  - Por absurdo, suponhamos que $\mathbf{n^3 = O(n^2)}$
  - Pela definição, existem constantes positivas **c** e $\mathbf{n_0}$ tais que, para $n \geq n_o$, $\mathbf{n^3 \leq c.n^2}$
  - Logo, $\mathbf{c} \geq \mathbf{n}$. Portanto, à medida que **n** cresce indefinidamente, **c** também crescerá
  - Isso contraria a definição de **c** ser constante

Exercícios

- 2. Provar que $3^n \neq O(2^n)$

  - Por absurdo, suponhamos que $\mathbf{3^n = O(2^n)}$
  - Pela definição, existem constantes positivas **c** e $\mathbf{n_0}$ tais que, para $n \geq n_o$, $\mathbf{3^n \leq c.2^n}$
  - Logo, $\mathbf{c} \geq \mathbf{(3/2)^n}$. Portanto, à medida que **n** cresce indefinidamente, $\mathbf{(3/2)^n}$ também crescerá
  - Assim, para qualquer valor de **n**, não existe uma constante que exceda $\mathbf{(3/2)^n}$

EXERCÍCIOS

- 3. Analisar o pior caso de algoritmo ao lado, que calcula o valor de n^n

```
int func(int n)   {
    int i, r;
    r = 1;
    for (i=1; i<=n; i++)
        r = r*n;
    return r;
}
```

```
int func(int n)   {
    int i, r;
    r = 1;
    i = 1;
    while (i <= n)  {
        r = r*n;
        i++;
    }
    return r;
}
```

t_1 1 vez

t_2 n+1 vezes

t_3 n vezes

$$
\begin{aligned}
T(n) &= t_1 + t_2.(n+1) + t_3.n \\
&= t_1 + t_2 + t_2.n + t_3.n \\
&= c_1 + c_2.n
\end{aligned}
$$

$T(n) = O(n)$

EXERCÍCIOS

- 4. Analisar o pior caso do algoritmo abaixo:

```
int func (int n)   {
     int  a, b, c, r;
     b = n;  c = n;  r = 1;
     while  (b >= 1)  {
        a = b % 2;
        if  (a == 1)
           r = r * c;
        c = c * c * c;
        b = b / 2;
     }
     return r;
}
```

t_1 1 vez

t_2 x + 1 vezes

t_3 x vezes

$x = ?$

$x = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

n	b	iterações
2	2,1,0	2
3	3,1,0	2
4	4,2,1,0	3
16	16,8,4,2,1,0	5
17	17,8,4,2,1,0	5
31	31,15,7,3,1,0	5
$2^{x-1} \leq n < 2^x$	...	x

EXERCÍCIOS

- 4. Analisar o pior caso do algoritmo abaixo:

```
int func (int n)  {
    int  a, b, c, r;
     b = n;  c = n;  r = 1;
     while  (b >= 1)  {
        a = b%2;
        if  (a == 1)
            r = r*c;
        c = c*c*c;
        b = b/2;
     }
     return r;
}
```

t_1 1 vez

t_2 x + 1 vezes

t_3 x vezes

$$x = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

$$\begin{aligned} T(n) &= t_1 + t_2.(x+1) + t_3.x \\ &= t_1 + t_2 + (t_2 + t_3).x \\ &= c_1 + c_2.x \\ &= c_1 + c_2.(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) \\ &= c_1 + c_2 + c_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \\ &= c_3 + c_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \\ &\le c_3 + c_2.\log_2 n \end{aligned}$$

$$T(n) = O(\log n)$$

Exercícios

- 5. Analisar o pior caso do cálculo recursivo de fatoriais

```
int fat(int n) {
   if (n <= 1) fat = 1;
   else fat = fat(n-1) * n;
}
```

d

c

$T(n) = d$, se $n \leq 1$
$T(n) = c + T(n-1)$, se $n > 1$

Para $n > 1$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= c + T(n-1) \\
&= c + c + T(n-2) \\
&= 2c + T(n-2) \\
&= 3c + T(n-3) \\
&\ldots \\
&= (n-1)c + T(1) \\
&= (n-1)c + d
\end{aligned}
$$

$T(n) = O(n)$