



CCI-22



4) Equações e Sistemas Não Lineares


Bisseccção, Posição Falsa, Ponto Fixo,
Newton-Raphson, Secante

CCI-22



- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

CCI-22



- **Introdução**
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Alguns exemplos de polinômios

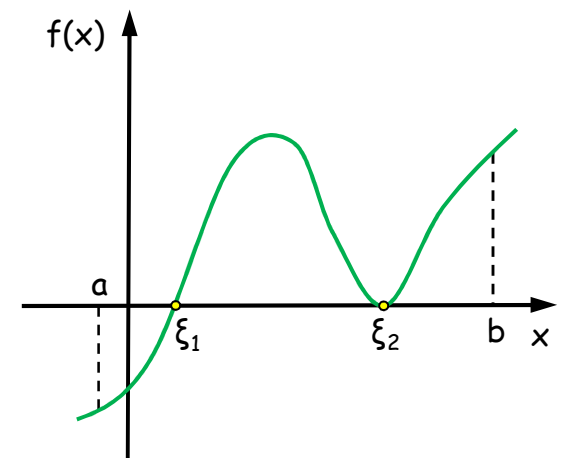
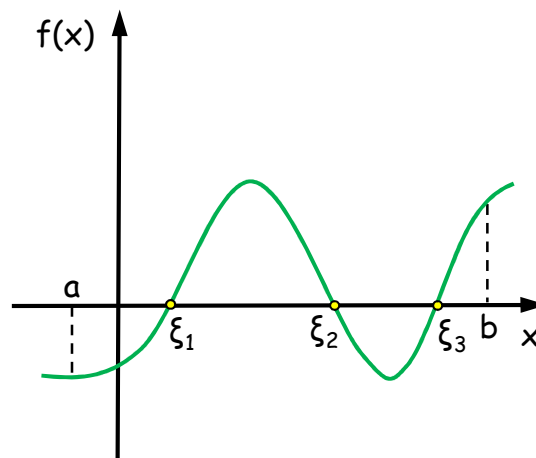
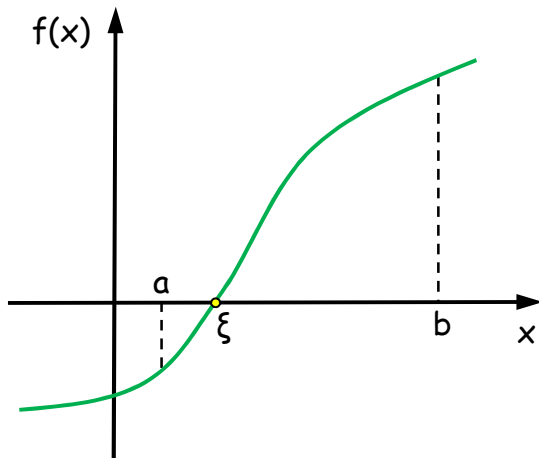
- Uma esfera de raio R e densidade específica ρ , ao flutuar na água, afunda uma quantidade x dada por:
 - $x^3 + 2Rx^2 - 4\rho R^3 = 0$
- Sejam duas cargas elétricas A e B de mesmo sinal, distantes 2 metros entre si. Coloca-se, à distância x de A e $2-x$ de B , uma carga C de sinal oposto. C permanecerá em equilíbrio se:
 - $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 32x + 32 = 0$
- Calcular os autovalores de uma matriz de ordem n é equivalente a encontrar as raízes de um polinômio de grau n

Raízes reais de funções

- Nas diversas áreas das ciências exatas, frequentemente ocorrem situações que envolvem a resolução de uma equação $f(x) = 0$, não necessariamente linear
- O objetivo deste capítulo é estudar *métodos numéricos para a resolução de equações não lineares*
- Em alguns casos (polinômios, por exemplo), as raízes podem ser reais ou complexas. Estamos principalmente interessados em encontrar as raízes reais: dada uma curva, queremos os pontos em que o eixo x é interceptado
- Esses métodos possuem duas fases:
 - 1) Isolamento de uma raiz (encontrar um intervalo que a contenha)
 - 2) Refinamento: dada uma aproximação inicial da raiz nesse intervalo, melhorá-la até se obter a precisão desejada

Isolamento das raízes

- Nesta primeira fase, é feita uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$, da qual depende fortemente o sucesso da fase seguinte
- De modo geral, é utilizado o teorema de Bolzano: considerando $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, se $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz $x = \xi$ entre a e b
- Graficamente:



Exemplo

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

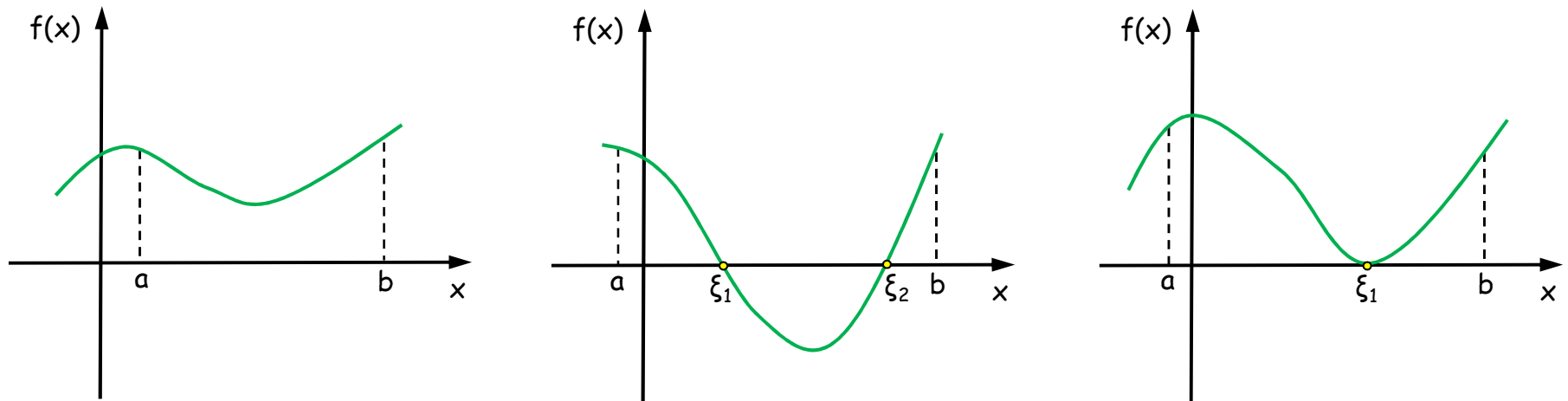
- Vamos construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando apenas os sinais:

| | | | | | | | | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|
| x | $-\infty$ | -100 | -10 | -5 | -3 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $f(x)$ | - | - | - | - | + | + | + | - | - | + | + | + |

- Sabendo que $f(x)$ é contínua para qualquer x real, e observando as variações de sinal, podemos concluir que existem raízes nos seguintes intervalos:
 - $[-5, -3]$
 - $[0, 1]$
 - $[2, 3]$
- Como $f(x)$ é um polinômio de grau 3, isolamos todas as suas raízes


Outras situações

- Se $f(a) \cdot f(b) > 0$, então podemos ter várias situações:



- Alguns procedimentos viáveis na análise gráfica de $f(x)$:
 - Esboçar o gráfico de $f(x)$ e localizar as raízes
 - A partir da equação $f(x) = 0$, obter uma equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$, e localizar pontos de interseção
 - Utilizar programas que traçam gráficos de funções
- No caso específico de polinômios, há alguns teoremas que auxiliam as tarefas de enumeração e isolamento das raízes

CCI-22



- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Raízes reais de um polinômio

- Regra de Descartes:
 - O número de raízes reais positivas de um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais nunca é maior que o número de trocas de sinal na sequência de seus coeficientes não nulos
 - Se for menor, então será sempre por um número par
- Como as raízes negativas de $p(x)$ são as positivas de $p(-x)$, também é possível utilizar essa mesma regra na enumeração das raízes reais negativas

Exemplo

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$$

+ + - -

Uma troca de sinal: $p(x)$ tem 1 raiz positiva

$$p(-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

- + + -

Duas trocas de sinal: $p(x)$ pode ter 2 ou 0 raízes negativas

- Se $p(x)$ tiver 2 raízes negativas, não terá raízes complexas; caso contrário, terá 2 raízes complexas
- Possibilidades:

| Raízes | | |
|-----------|-----------|-----------|
| Positivas | Negativas | Complexas |
| 1 | 2 | 0 |
| 1 | 0 | 2 |

Sempre aos pares

Outro exemplo

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

+ - + - +

Quatro trocas de sinal:
 $p(x)$ pode ter 4, 2 ou 0
raízes positivas

$$p(-x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

+ + + + +

Nenhuma troca de sinal: $p(x)$
não tem raízes negativas

- Possibilidades:

| | Raízes | | |
|---|-----------|-----------|-----------|
| | Positivas | Negativas | Complexas |
| 4 | 4 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 4 |

Raízes complexas de um polinômio

- Seja o polinômio de grau n de coeficientes reais:
$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$
- Regra de Huat: Se $p(0) \neq 0$ e para algum k , $0 < k < n$, tivermos $(a_k)^2 \leq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, então $p(x)$ terá raízes complexas
- Um caso particular é a Regra da Lacuna:
 - Se $p(0) \neq 0$ e para algum k , $0 < k < n$, tivermos $a_k = 0$ e $a_{k-1} \cdot a_{k+1} > 0$, então $p(x)$ terá raízes complexas
 - Se $p(0) \neq 0$ e existirem dois ou mais coeficientes nulos sucessivos, então $p(x)$ terá raízes complexas

Exemplo

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3$$

2 ou 0 positivas

$$p(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3$$

3 ou 1 negativas

- Regra de Huat: $(a_2)^2 \leq a_1 \cdot a_3$, pois $1 < 3 \cdot 2$
 - Portanto, $p(x)$ tem raízes complexas
- Possibilidades:

| Raízes | | |
|-----------|-----------|-----------|
| Positivas | Negativas | Complexas |
| 2 | 1 | 2 |
| 0 | 3 | 2 |
| 0 | 1 | 4 |

Outro exemplo

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

+ - - + - +

4, 2 ou 0 positivas

$$p(-x) = 2x^6 + 3x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$$


+ + + + + +

não tem negativas

- Regra da Lacuna: $a_2 = 0$ e $a_1 \cdot a_3 > 0$, pois $(-3) \cdot (-2) > 0$
 - Portanto, $p(x)$ tem raízes complexas
- Possibilidades:

| Raízes | | |
|-----------|-----------|-----------|
| Positivas | Negativas | Complexas |
| 4 | 0 | 2 |
| 2 | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 6 |

CCI-22

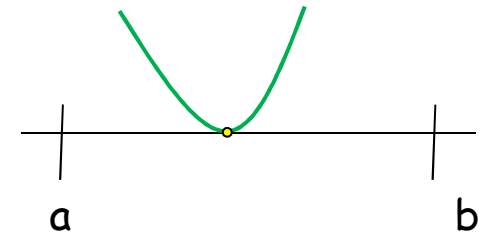
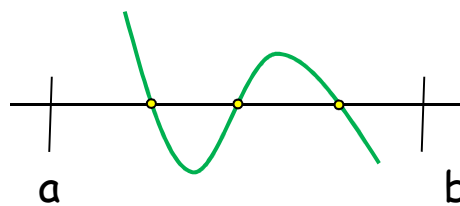


- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Isolamento das raízes de um polinômio

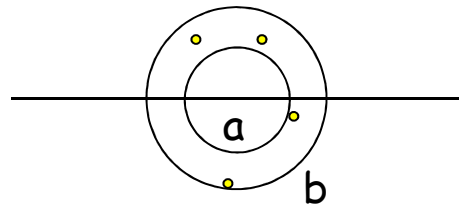
- No caso dos polinômios, o isolamento das suas raízes é feito em duas fases: localização e separação
- *Localizar as raízes reais* de um polinômio $p(x)$ é determinar um intervalo que as contenha

- Exemplos:



- *Localizar as raízes complexas* é determinar os raios interno e externo de anéis que as contenham

- Exemplo:



- Em ambos os casos, a e b são chamados respectivamente de cota inferior e superior

Localização de raízes reais

- Teorema de Laguerre: Dado o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e dado um número δ , obtemos $p(x) = q(x).(x - \delta) + R$. Se os coeficientes de $q(x)$ forem todos positivos ou nulos, e $R > 0$, então todas as raízes reais são menores que δ
- Cota de Laguerre-Thibault: Dado o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais, calcule a divisão de $p(x)$ por $x-1, x-2, x-3, \dots, x-m$, até que o quociente $q(x)$ tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, e resto $R > 0$. Esse $m > 0$ é uma cota superior das raízes reais de $p(x)$. Uma cota inferior $n < 0$ pode ser calculada de modo semelhante, multiplicando-se $p(-x)$ por -1 e seguindo o mesmo procedimento

Exemplo

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

| | | | | | | |
|---|---|---|----|----|-----|-----|
| | 1 | 1 | -9 | -1 | 20 | -12 |
| 1 | | 1 | 2 | -7 | -8 | 12 |
| | 1 | 2 | -7 | -8 | 12 | 0 |
| | 1 | 1 | -9 | -1 | 20 | -12 |
| 2 | | 2 | 6 | -6 | -14 | 12 |
| | 1 | 3 | -3 | -7 | 6 | 0 |
| | 1 | 1 | -9 | -1 | 20 | -12 |
| 3 | | 3 | 12 | 9 | 24 | 132 |
| | 1 | 4 | 3 | 8 | 44 | 120 |

≥ 0 > 0

3 é uma cota superior de $p(x)$

Exemplo (continuação)

$$p(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12$$

| | | | | | | |
|---|---|----|----|-----|-----|-----|
| | 1 | -1 | -9 | 1 | 20 | 12 |
| 1 | | 1 | 0 | -9 | -8 | 12 |
| | 1 | 0 | -9 | -8 | 12 | 24 |
| | 1 | -1 | -9 | 1 | 20 | 12 |
| 2 | | 2 | 2 | -14 | -26 | -12 |
| | 1 | 1 | -7 | -13 | -6 | 0 |
| | 1 | -1 | -9 | 1 | 20 | 12 |
| 3 | | 3 | 6 | -9 | -24 | -12 |
| | 1 | 2 | -3 | -8 | -4 | 0 |
| | 1 | -1 | -9 | 1 | 20 | 12 |
| 4 | | 4 | 12 | 12 | 52 | 288 |
| | 1 | 3 | 3 | 13 | 72 | 300 |

Todas as raízes
de $p(x)$
pertencem a
[-4, 3]

-4 é uma cota inferior de $p(x)$

Localização de raízes complexas

- Cota de Kojima: Dado o polinômio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, toda raiz ξ , real ou complexa, está em um anel de raio externo $R = q_1 + q_2$, onde q_1 e q_2 são os maiores valores de $|a_i/a_0|^{1/i}$, para $1 \leq i \leq n$
- Considerando o polinômio $p(1/x)$, o raio interno r é calculado de modo semelhante:
 $r = 1/(q_1 + q_2)$

Exemplo

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -9, a_3 = -1, a_4 = 20, a_5 = -12$
- Valores: $\{ 1^1; 9^{1/2}; 1^{1/3}; 20^{1/4}; 12^{1/5} \} = \{1; 3; 1; 2,115; 1,644\}$
- $q_1 = 3$ e $q_2 = 2,115 \Rightarrow R = 5,115$
- Toda raiz ξ satisfaz $|\xi| < 5,115$
- As raízes de $p(1/x)$ são as mesmas do polinômio $-12x^5 + 20x^4 - x^3 - 9x^2 + x + 1$
- Valores: $\{(20/12)^1; (1/12)^{1/2}; (9/12)^{1/3}; (1/12)^{1/4}; (1/12)^{1/5}\} = \{1,667; 0,289; 0,909; 0,537; 0,608\}$
- $q_1 = 1,667$ e $q_2 = 0,909 \Rightarrow r = 0,388$
- Toda raiz ξ satisfaz $|\xi| > 0,388$

Separação de raízes reais

- Separar as raízes de um polinômio é encontrar uma sequência de subintervalos distintos, tais que cada um contenha exatamente uma raiz real, e cada raiz real esteja contida em um desses subintervalos
- Teorema de Budan: Seja $p^{(k)}(c)$ o valor da k -ésima derivada do polinômio $p(x)$ calculada para $x = c$. Seja V_c o número de variações de sinal na sequência $p(c), p'(c), p''(c), \dots, p^{(n)}(c)$, onde n é o grau de $p(x)$. Então, o número de raízes de $p(x)$ no intervalo (a,b) é igual ou menor que $|V_a - V_b|$. Se for menor, será por um número par
 - Eventuais valores nulos devem ser desprezados na contagem de variações
 - Este teorema não dá informações sobre a multiplicidade das raízes, ou seja, uma mesma raiz pode ser contada várias vezes...

Exemplo

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

- Pela regra de Descartes, como há duas variações de sinal, $p(x)$ tem 2 ou 0 raízes positivas
- Derivadas de $p(x)$:
 - $p'(x) = 3x^2 - 4x - 1$; $p''(x) = 6x - 4$; $p'''(x) = 6$
- Por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 3. Portanto, tomemos $(a,b) = (0;3)$:
 - $p(0)=2$; $p'(0)=-1$; $p''(0)=-4$; $p'''(0)=6$
 - $p(3)=8$; $p'(3)=10$; $p''(3)=14$; $p'''(3)=6$
- $V_0=2$ e $V_3=0$: há 2 ou 0 raízes em $(0;3)$
- Dividindo-se o intervalo em $(0;3/2)$ e $(3/2;3)$, é possível verificar que $V_{3/2}=1$: podemos concluir que há uma raiz em cada um desses subintervalos

Outro exemplo

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1$$

- Pela regra de Descartes, $p(x)$ tem 2 ou 0 raízes positivas e 1 raiz negativa
- Por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 9, e a inferior é -1
- Análise gráfica:

| x | p(x) |
|----|------|
| -1 | -29 |
| 0 | 1 |
| 1 | 13 |
| 2 | 13 |
| 3 | 7 |
| 4 | 1 |
| 5 | 1 |
| 6 | 13 |
| 7 | 43 |


- De fato, é fácil comprovar que há uma raiz negativa em $[-1;0]$
- A tabela parece indicar que não há raízes positivas...
- No entanto, $p(4,5) = -0,125$, ou seja, há uma raiz em $[4;4,5]$ e outra em $[4,5;5]$
- É preciso ter muito cuidado com as análises gráficas...

MatLab



- `roots(C)`
 - Vetor coluna com as raízes do polinômio com coeficientes do vetor C (os coeficientes são interpretados como em $C(1)*X^N + \dots + C(N)*X + C(N+1)$)
- `poly(R)`
 - Vetor linha com os coeficientes do polinômio cujas raízes estão no vetor R
- `polyval(C,x)`
 - Avalia em x o polinômio cujos coeficientes estão no vetor C

CCI-22



- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- **Métodos iterativos**
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Métodos iterativos

Através do isolamento de raízes

Específico de cada método


Veremos a seguir

- Na resolução de equações não lineares, qualquer método iterativo possui 4 partes:
 - Estimativa inicial: uma aproximação para a raiz
 - Atualização: uma fórmula que recalcula a solução
 - Critério de parada: uma condição de término para o processo iterativo
 - Avaliador de exatidão: associado ao critério de parada, provê uma estimativa do erro cometido

Critérios de parada

- No cálculo da raiz de $f(x) = 0$ através de um processo iterativo, sejam:
 - x_i : a solução obtida no passo i
 - ε_1 e ε_2 : valores de tolerância estabelecidos
 - L : número máximo permitido de iterações
 - De modo geral, pode-se interromper esse processo das seguintes maneiras:
 - $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon_1 \cdot \max\{1, |x_i|\}$ } erro relativo, se $|x_i| > 1$
erro absoluto, caso contrário
 - $|f(x_i)| < \varepsilon_2$
 - $i > L$
- Muitas iterações... O intervalo inicial deve ser bem escolhido

CCI-22

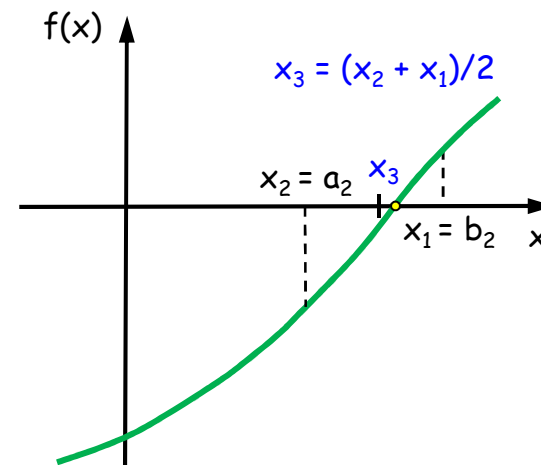
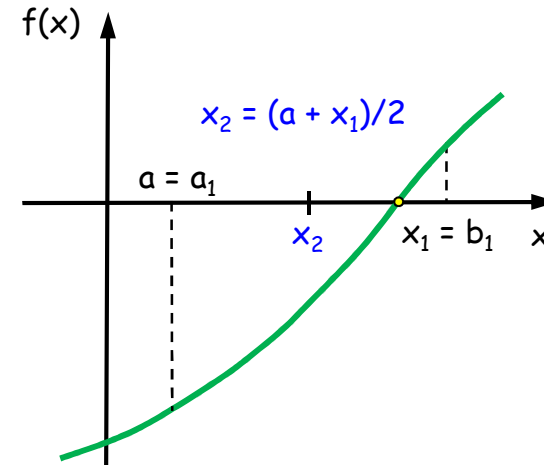
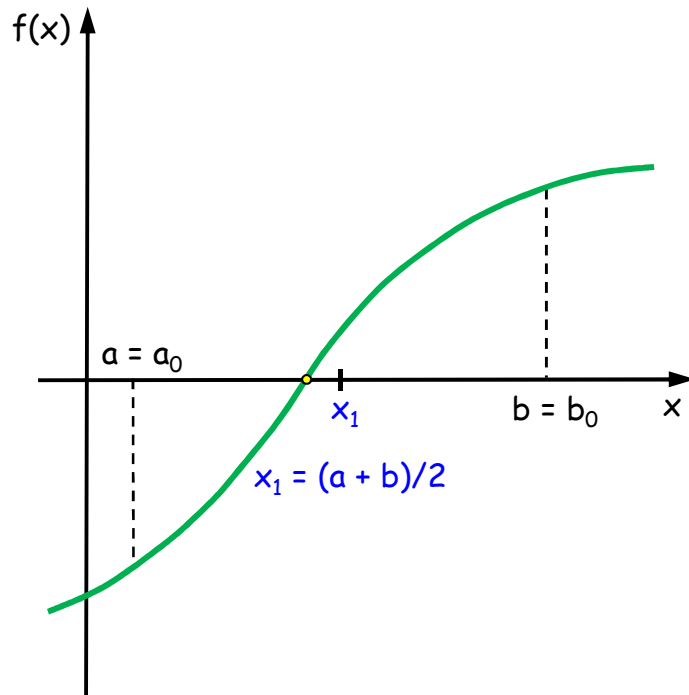


- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Bisseção

- Seja $[a,b]$ um intervalo que contenha uma raiz de $f(x)$, onde $f(a).f(b) < 0$
- Algoritmo:
 - Calcula-se o ponto médio do intervalo: $x_m = (a+b)/2$
 - Se $f(x_m) \neq 0$, escolhe-se o subintervalo de $[a,b]$ em que f tenha sinais opostos nas extremidades:
 $f(a).f(x_m) < 0$ ou $f(x_m).f(b) < 0$
 - Repete-se o processo até que algum critério de parada seja satisfeito

Bisseccção: análise gráfica



Exemplo

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$$

- Enumeração: pela regra de Descartes, $p(x)$ tem 2 ou 0 raízes positivas e 1 raiz negativa
- Localização: por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 5 e a inferior é -1
- Separação: por análise gráfica, percebe-se que há apenas uma raiz negativa em $[-1;0]$
- Aplicação do Método da Bisseccção:

| i | a | $f(a)$ | b | $f(b)$ | x_m | $f(x_m)$ |
|-----|---------|---------|-----------|-------------|------------|--------------|
| 1 | -1,0 | -2 | 0,0 | 21 | -0,5 | 11,125 |
| 2 | -1,0 | -2 | -0,5 | 11,125 | -0,75 | 5,015625 |
| 3 | -1,0 | -2 | -0,75 | 5,015625 | -0,875 | 1,626953120 |
| 4 | -1,0 | -2 | -0,875 | 1,626953120 | -0,9375 | -0,156005860 |
| 5 | -0,9375 | -0,1560 | -0,875 | 1,626953120 | -0,90625 | 0,743011480 |
| 6 | -0,9375 | -0,1560 | -0,90625 | 0,743011480 | -0,921875 | 0,296398710 |
| 7 | -0,9375 | -0,1560 | -0,921875 | 0,070171830 | -0,9296875 | 0,070171830 |
| ... | ... | | ... | | ... | ... |

| x | $p(x)$ |
|-----|--------|
| -1 | -2 |
| 0 | 21 |
| 1 | 34 |
| 2 | 43 |
| 3 | 54 |
| 4 | 73 |

Estimativa do número de iterações

- Dada uma precisão ε e um intervalo inicial $[a_0, b_0]$, é possível calcular o número i de iterações do Método da Bissecção até que se tenha $b_i - a_i < \varepsilon$:

- $b_i - a_i = (b_{i-1} - a_{i-1})/2 = (b_0 - a_0)/2^i$

- Deseja-se que $b_i - a_i < \varepsilon$:

- $(b_0 - a_0)/2^i < \varepsilon$

- $2^i > (b_0 - a_0)/\varepsilon$

- $i > (\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon) / \log 2$

O número de iterações tende a ser grande devido a este valor


- Se essa condição for satisfeita, então no final do passo i teremos um intervalo $[a_i, b_i]$ que contém a raiz ξ tal que

$$\forall x \in [a_i, b_i] \Rightarrow |x - \xi| \leq b_i - a_i < \varepsilon$$

Bisseccção: análise geral

- Vantagens:
 - Se a função $f(x)$ for contínua no intervalo inicial $[a,b]$, o método da bissecção gera uma sequência convergente
 - Facilidade de implementação, pois as iterações envolvem cálculos simples
- Desvantagens:
 - A convergência é lenta
 - Exige o conhecimento prévio da região onde se encontra a raiz
 - A extensão desse método para problemas multivariáveis é complexa

CCI-22

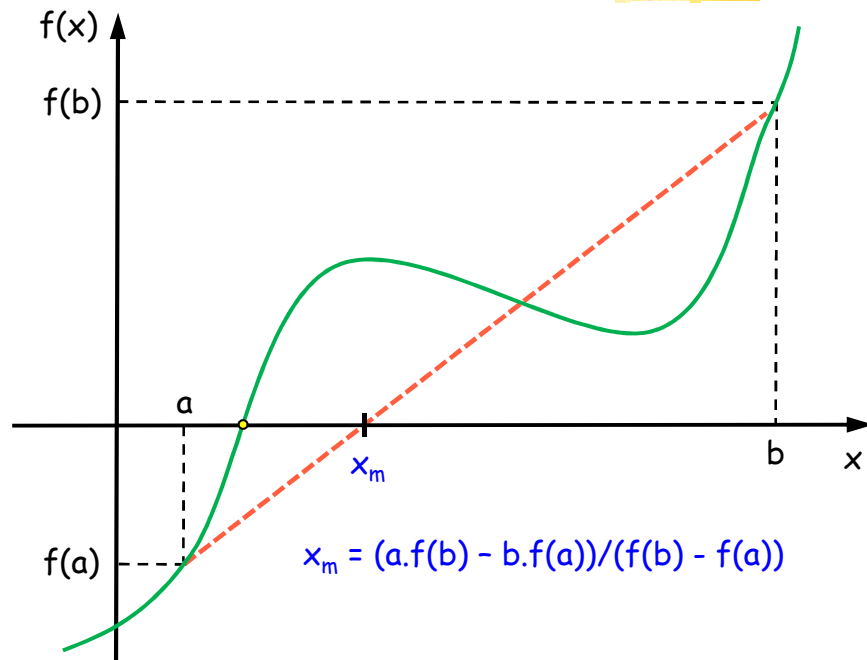


- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - **Posição Falsa**
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Posição Falsa

- Dado o intervalo $[a,b]$, vimos que o Método da Bissecção encontra um novo intervalo através de uma *média aritmética* entre a e b :
 - $x_m = (a + b)/2$
- Por outro lado, o Método da Posição Falsa calcula uma *média ponderada* entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:
 - $x_m = (a \cdot |f(b)| + b \cdot |f(a)|) / (|f(b)| + |f(a)|)$
 - Como $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, é equivalente a $x_m = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a))$

Posição Falsa: análise gráfica



x_m é a interseção do eixo x com a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

- Equação da reta: $(x - a)/(f(x) - f(a)) = (b - a)/(f(b) - f(a))$
- No eixo x : $x = x_m$ e $f(x_m) = 0$
- $x_m - a = -f(a).(b - a)/(f(b) - f(a))$
- $x_m - a = (a.f(a) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$
- $x_m = (a.f(b) - a.f(a) + a.f(a) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$
- $x_m = (a.f(b) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$

Exemplo

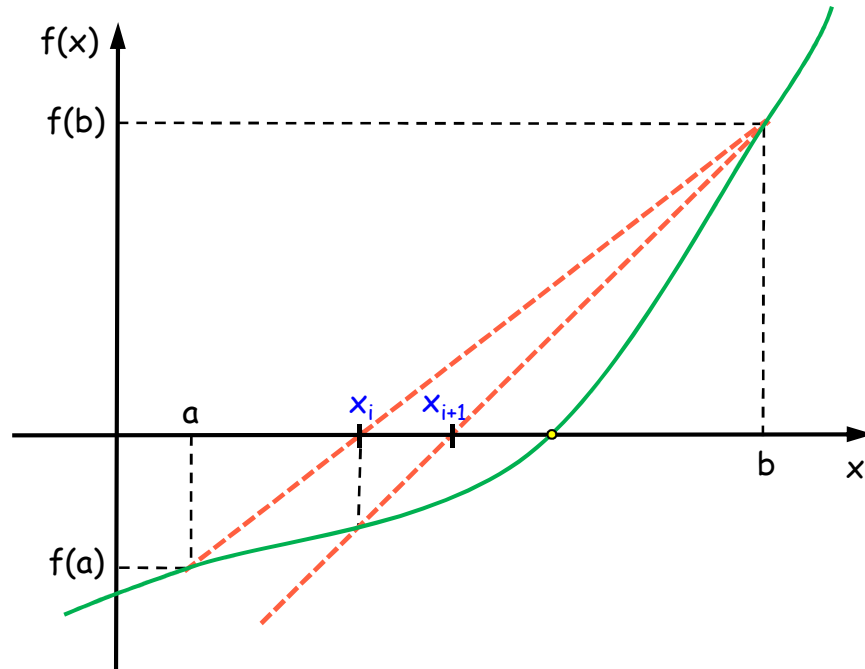
$$f(x) = x \cdot \log x - 1$$

$$[a_0, b_0] = [2; 3]$$

- $f(a_0) = -0,3979 < 0$
- $f(b_0) = 0,4314 > 0$
- $x_0 = (a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)) / (f(b_0) - f(a_0)) = 2,4798$
- $f(x_0) = -0,0219 < 0$
- Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ têm mesmo sinal, $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$
- $x_1 = (a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)) / (f(b_1) - f(a_1)) = 2,5049$
- $f(x_1) = -0,0011 < 0$
- Como $f(a_1)$ e $f(x_1)$ têm mesmo sinal, $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$
- E assim por diante, até que o critério de parada seja satisfeito


Posição Falsa: análise geral

- De modo geral, suas vantagens e desvantagens são análogas às do Método da Bisseccção
- Se a função for côncava ou convexa em $[a,b]$, então uma das extremidades permanecerá fixa
- Exemplo:



- Cuidado com o critério de parada: neste caso, o intervalo $[a_i, b_i]$ nunca ficará suficientemente pequeno, pois b_i permanece constante...
- É possível modificar o método, prevendo casos como este

CCI-22



- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - **Ponto Fixo**
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método do Ponto Fixo

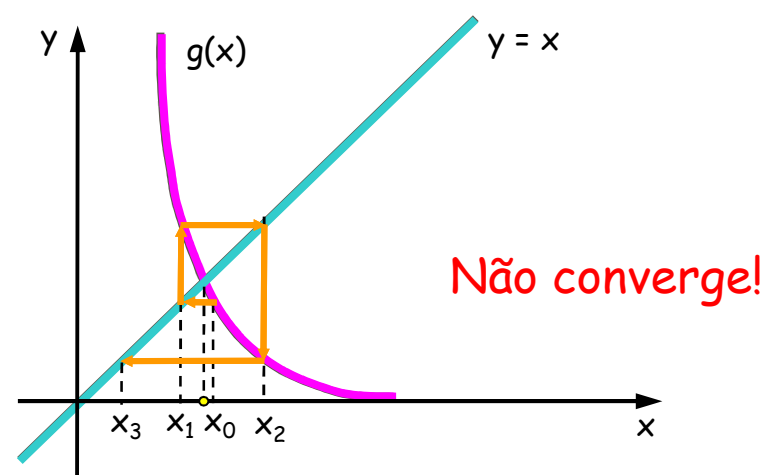
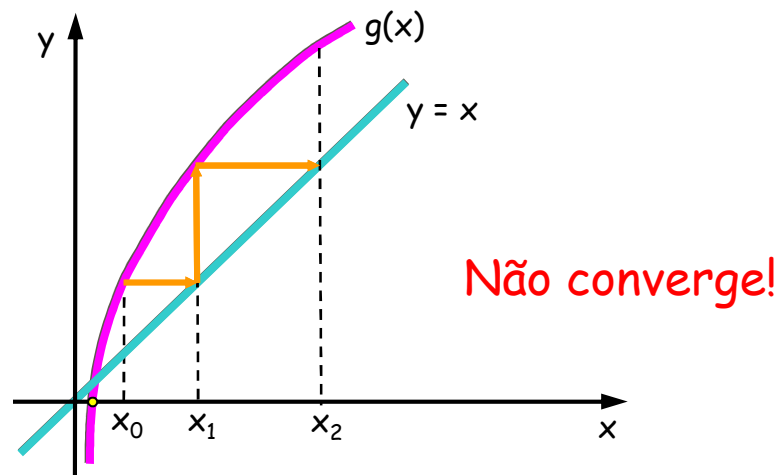
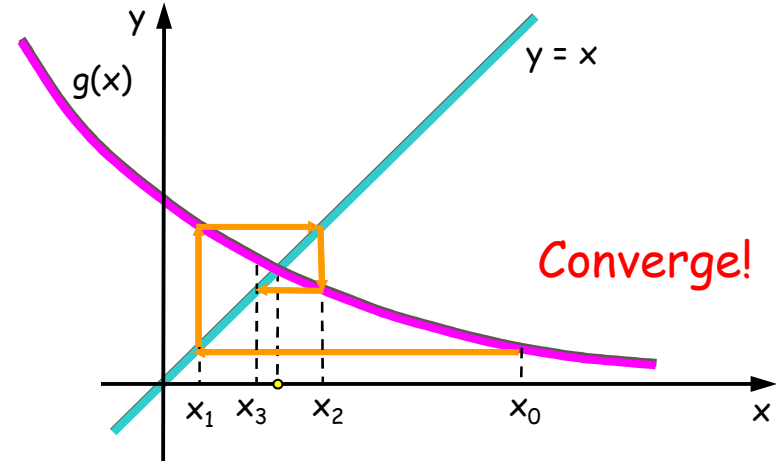
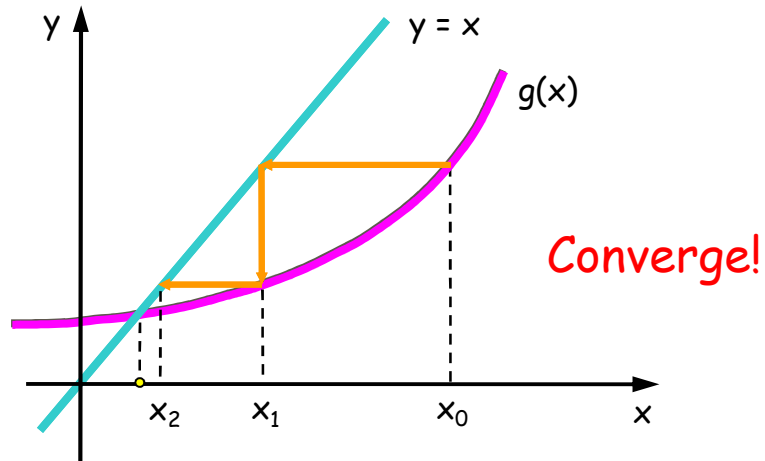
- Seja uma função $f(x)$ contínua e não linear em $[a,b]$, onde está uma única raiz ξ
- O Método do Ponto Fixo consiste em:
 - transformar a equação $f(x) = 0$ na equivalente $x = g(x)$, de tal modo que $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = \xi$
 - a partir de $x_0 \in [a,b]$, gerar a sequência $\{x_i\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{i+1} = g(x_i)$
- O problema de se encontrar a raiz em $f(x)$ foi transformado no problema de se encontrar o ponto fixo de $g(x)$
- $g(x)$ é chamada de *função de iteração*

Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

- Possíveis funções de iteração para $f(x)$:
 - $g_1(x) = 6 - x^2$
 - $g_2(x) = \pm(6 - x)^{1/2}$
 - $g_3(x) = (6/x) - 1$
 - $g_4(x) = 6/(x+1)$

Algumas situações possíveis



Convergência

- Teorema: Sejam um intervalo I *aproximadamente centrado* numa raiz ξ de $f(x)$, e $g(x)$ uma função de iteração. A sequência $\{x_i\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ convergirá para ξ se:
 - $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I
 - $x_0 \in I$
 - $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$

Demonstração

- 1ª parte: Se $x_0 \in I$, então $x_i \in I, i \geq 0$
 - $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = g(\xi)$
 - Para $i \geq 0, x_{i+1} = g(x_i) \Rightarrow x_{i+1} - \xi = g(x_i) - g(\xi)$
 - Como $g(x)$ é contínua e diferenciável em I , pelo *Teorema do Valor Médio*, se $x_i \in I$ então existe c_i entre x_i e ξ tal que $g'(c_i) \cdot (x_i - \xi) = g(x_i) - g(\xi)$
 - $x_{i+1} - \xi = g'(c_i) \cdot (x_i - \xi), i \geq 0$
 - $|x_{i+1} - \xi| = |g'(c_i)| \cdot |x_i - \xi|, i \geq 0$
 - $|x_{i+1} - \xi| < |x_i - \xi|, i \geq 0$, pois $|g'(c_i)| \leq M < 1$
 - Como I está aproximadamente centrado em ξ , se $x_i \in I$ então $x_{i+1} \in I, i \geq 0$

Demonstração

- 2ª parte: $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \xi$

- Vimos que $|x_{i+1} - \xi| = |g'(c_i)| \cdot |x_i - \xi|$, $i \geq 0$, onde c_i está entre x_i e ξ , e sabemos que $|g'(c_i)| \leq M < 1$

- $|x_1 - \xi| = |g'(c_0)| \cdot |x_0 - \xi| \leq M \cdot |x_0 - \xi|$ — c_0 está entre x_0 e ξ

- $|x_2 - \xi| = |g'(c_1)| \cdot |x_1 - \xi| \leq M^2 \cdot |x_0 - \xi|$ — c_1 está entre x_1 e ξ

- Generalizando:

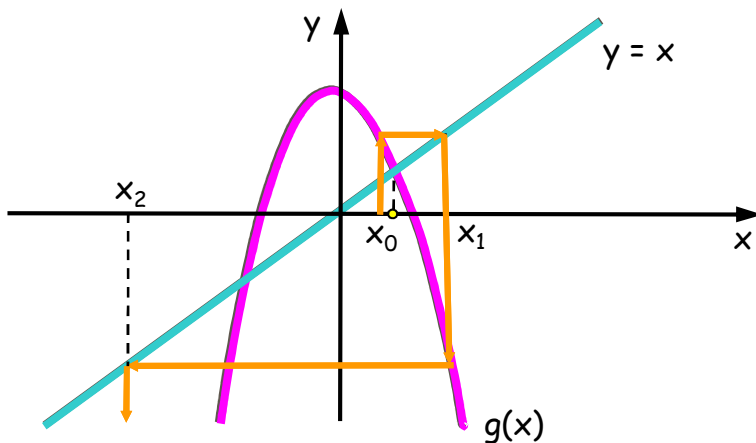
- $|x_i - \xi| = |g'(c_{i-1})| \cdot |x_{i-1} - \xi| \leq M^i \cdot |x_0 - \xi|$, $i > 0$ — c_{i-1} está entre x_{i-1} e ξ

- $0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i - \xi| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} M^i \cdot |x_0 - \xi| = 0$, pois $0 < M < 1$

- Portanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_i - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \xi$

Voltando ao exemplo anterior

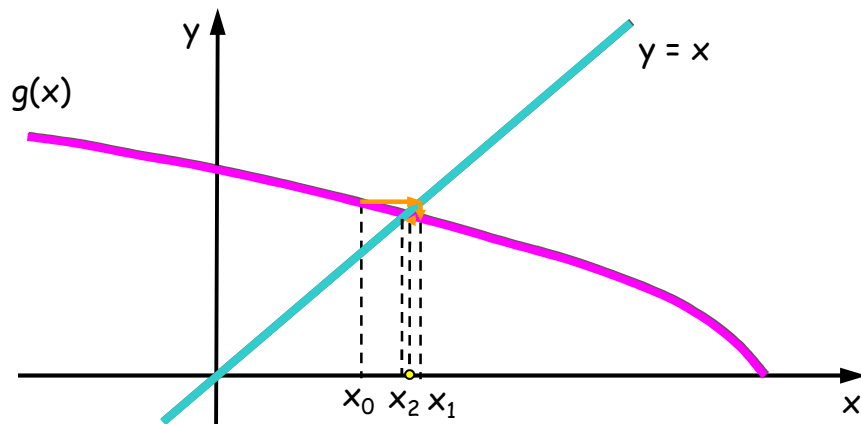
- Sabemos que as raízes de $f(x) = x^2 + x - 6$ são $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
- Consideremos $g_1(x) = 6 - x^2$ e $x_0 = 1,5$:
 - $x_1 = g(x_0) = 6 - 1,5^2 = 3,75$
 - $x_2 = g(x_1) = 6 - 3,75^2 = -8,0625$
 - $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8,0625)^2 = -59,003906$
 - $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59,003906)^2 = -3475,4609$
- A sequência $\{x_i\}$ diverge...



- $g_1(x) = 6 - x^2 \Rightarrow g'_1(x) = -2x$
- $g_1(x)$ e $g'_1(x)$ são contínuas em \mathbb{R}
- $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
- O intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ não satisfaz o teorema, pois não contém as raízes, nem x_0 ...

Ainda o mesmo exemplo

- Consideremos agora $g_2(x) = (6 - x)^{1/2}$ e $x_0 = 1,5$:
 - $x_1 = g(x_0) = (6 - 1,5)^{1/2} = 2,12132$
 - $x_2 = g(x_1) = (6 - 2,12132)^{1/2} = 1,96944$
 - $x_3 = g(x_2) = (6 - 1,96944)^{1/2} = 2,00763$
 - $x_4 = g(x_3) = (6 - 2,00763)^{1/2} = 2,00048$
- A sequência $\{x_i\}$ está convergindo para $\xi_2 = 2$



- $g_2(x) = (6 - x)^{1/2} \Rightarrow$
 $g'_2(x) = -1/(2(6 - x)^{1/2})$
- $g_2(x)$ é contínua em \mathbb{R} para $x \leq 6$
- $g'_2(x)$ é contínua em \mathbb{R} para $x < 6$
- $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow |1/(2(6 - x)^{1/2})| < 1$
 $\Leftrightarrow x < 5,75$
- O intervalo $I = [1,5;2,5]$ satisfaz as condições do teorema

Outro exemplo

- Seja $f(x) = x^2 - x - 2$, com $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 2$
- Sejam duas funções de iteração:
 - $g_1(x) = x^2 - 2$
 - $g_2(x) = (2 + x)^{1/2}$
- $g'_1(x) = 2x$: $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
O intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ não satisfaz o teorema
- $g'_2(x) = 1/(2(2 + x)^{1/2})$: $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow x > -7/4$
O intervalo $I = [0;3]$, por exemplo, satisfaz o teorema
- Consideremos $g_2(x) = (2 + x)^{1/2}$, $x_0 = 0$:
 - $x_1 = g(x_0) = (2 + x_0)^{1/2} = 1,41421$
 - $x_2 = g(x_1) = (2 + x_1)^{1/2} = 1,84775$
 - $x_3 = g(x_2) = (2 + x_2)^{1/2} = 1,96157$
 - $x_4 = g(x_3) = (2 + x_3)^{1/2} = 1,98036$
- A sequência está convergindo para $\xi_2 = 2$

Ordem da convergência

- Sejam $\{x_i\}$ uma sequência que converge para a raiz ξ , $e_i = x_i - \xi$ o erro na iteração $i \geq 0$ e $0 \leq K < 1$ uma constante
- Se $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_{i+1}| / |e_i| = K > 0$, dizemos que $\{x_i\}$ tem *ordem de convergência linear e constante assintótica de erro K*
- Se $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_{i+1}| / |e_i| = 0$: a convergência será superlinear
 - Se houver constantes $p > 1$ e $C > 0$ tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_{i+1}| / |e_i|^p = C$, então p será a *ordem de convergência* dessa sequência, e C será a *constante assintótica de erro*
 - Quanto maior o valor de p , maior a rapidez de convergência do método iterativo
- No Método do Ponto Fixo, pode-se demonstrar que $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_{i+1}| / |e_i| = g'(\xi) < 1$, ou seja, a ordem de convergência é linear


Demonstração

- Na demonstração do teorema da convergência, vimos que $x_{i+1} - \xi = g'(c_i) \cdot (x_i - \xi)$, $i \geq 0$, onde c_i está entre x_i e ξ
- Portanto, $(x_{i+1} - \xi)/(x_i - \xi) = g'(c_i)$
- Tomando o limite quando $i \rightarrow \infty$:
 - $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{i+1} - \xi)/(x_i - \xi) = \lim_{i \rightarrow \infty} g'(c_i) = g'(\lim_{i \rightarrow \infty} c_i) = g'(\xi)$
- Logo, $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i = g'(\xi) = C$
- Além disso, $|C| < 1$, pois $g'(x)$ satisfaz as hipóteses do teorema da convergência
- Neste caso, a convergência será mais rápida quanto menor for $|g'(\xi)|$

Ponto Fixo: análise geral

- Vantagens:
 - Convergência rápida
- Desvantagens:
 - Obtenção de uma função de iteração
 - Determinação de um intervalo inicial válido
 - Difícil implementação
- A importância deste método está mais no estudo dos seus conceitos que em sua eficiência computacional

CCI-22

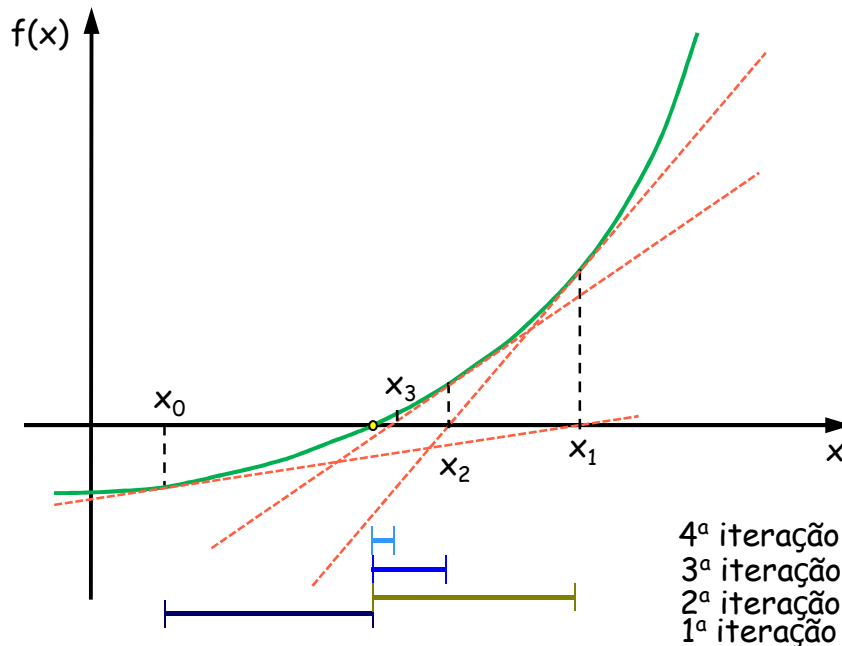


- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - **Newton-Raphson**
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método de Newton-Raphson

- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ que contém uma única raiz, e um ponto inicial x_0 , é possível encontrar uma aproximação para essa raiz a partir da interseção do eixo x com a reta tangente à curva em x_0
- O ponto inicial x_0 é escolhido em função do comportamento da curva nas proximidades da raiz
- Cálculo das aproximações: $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Newton-Raphson: análise gráfica



- Seja o ponto $(x_i, f(x_i))$
- Traça-se a reta $L_{i+1}(x)$ tangente à curva nesse ponto:
$$L_{i+1}(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$
- No cruzamento com o eixo x , $L_{i+1}(x) = 0$:
$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$
- Portanto, $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Caso particular do Ponto Fixo

- O Método de Newton-Raphson pode ser entendido como um caso particular do Método do Ponto Fixo, onde $g(x) = x - f(x)/f'(x)$
- Calculando a derivada de $g(x)$:
 - $g'(x) = 1 - [f'(x)^2 - f(x).f''(x)]/f'(x)^2$
 - $g'(x) = f(x).f''(x)/f'(x)^2$
- Na raiz ξ , sabemos que $f(\xi) = 0$.
Desde que $f'(\xi) \neq 0$, então $g'(\xi) = 0$
- De acordo com o teorema da convergência do Método do Ponto Fixo, podemos concluir que o Método de Newton-Raphson converge com rapidez máxima para a raiz

Convergência

- Teorema: Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz ξ de $f(x)$. Supondo $f'(\xi) \neq 0$, existe um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo essa raiz tal que, se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_i\}$ gerada por $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ converge para ela
- Demonstração: basta verificar que são satisfeitas as hipóteses do teorema da convergência do Método do Ponto Fixo
- Em outras palavras, o Método de Newton-Raphson converge desde que a aproximação inicial seja suficientemente próxima da raiz
- Além disso, podemos comprovar que sua convergência é de ordem quadrática: $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = C \neq 0$

Erro de aproximação de x_i em relação à raiz

Convergência de ordem quadrática

- $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i) = g(x_i)$
- $x_{i+1} - \xi = x_i - \xi - f(x_i)/f'(x_i)$
- $e_{i+1} = e_i - f(x_i)/f'(x_i)$
- Desenvolvimento de Taylor de $f(x)$ em torno de x_i :
 - $f(x) = f(x_i) + f'(x_i).(x-x_i) + f''(c_i).(x-x_i)^2/2$, onde c_i está entre x e x_i
 - Para $x = \xi$: $0 = f(\xi) = f(x_i) - f'(x_i).(x_i-\xi) + f''(c_i).(x_i-\xi)^2/2$
 - $f(x_i) = f'(x_i).e_i - f''(c_i).e_i^2/2$
 - $e_i - f(x_i)/f'(x_i) = f''(c_i).e_i^2/2f'(x_i)$
 - Utilizando a fórmula acima: $f''(c_i).e_i^2/2f'(x_i) = e_{i+1}$
 - $e_{i+1}/e_i^2 = f''(c_i)/2f'(x_i)$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} f''(c_i)/2f'(x_i) = f''(\xi)/2f'(\xi)$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = g''(\xi)/2$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = C$

$$g'(x) = f(x).f''(x)/f'(x)^2$$
$$g''(x) = [(f'(x).f''(x) + f'''(x).f(x)).f'(x)^2 - 2f''(x).f'(x).f(x).f''(x)] / f'(x)^4$$
$$g''(\xi) = f'(\xi).f''(\xi)/f'(\xi)^2$$
$$g''(\xi) = f''(\xi)/f'(\xi)$$

Exemplo

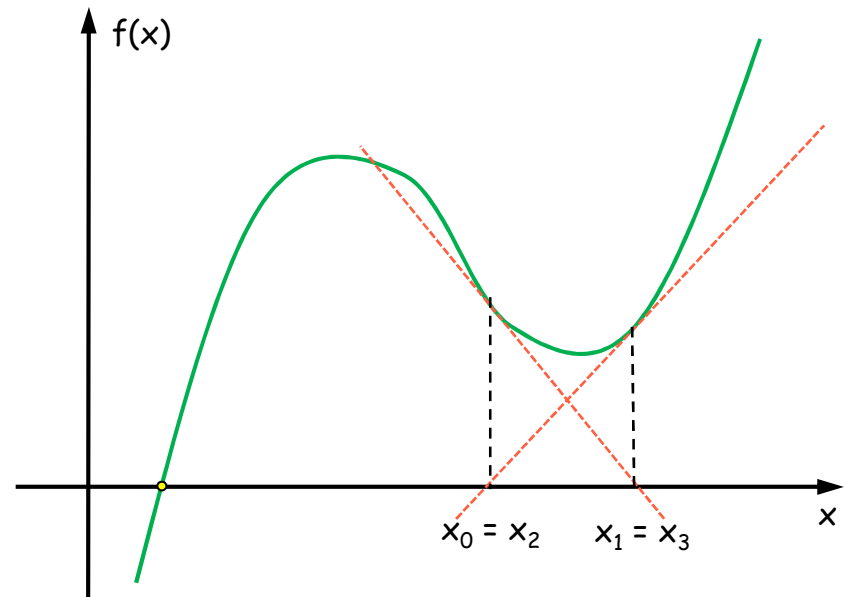
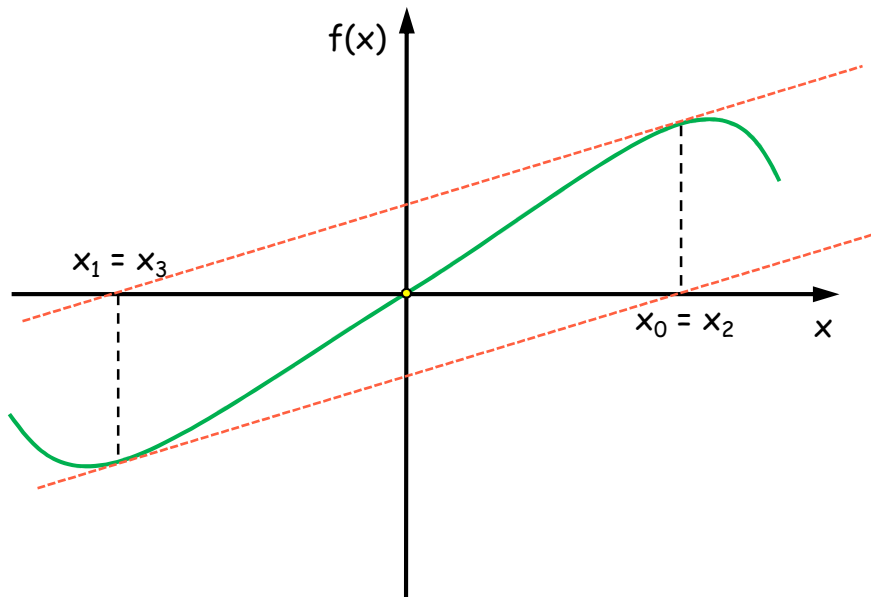
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 17$$

- $x_0 = -1,0$
- $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -1,0 + 2/30 = -0,933333333333$
- $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = -0,9321152567$
- $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = -0,9321148567$
- $x_4 = x_3 - f(x_3)/f'(x_3) = -0,9321148567$

Casos de *loop* infinito


- Em alguns casos, o Método de Newton-Raphson pode entrar em loop...
- Exemplos:



Newton-Raphson: análise geral

- Vantagens:
 - Convergência rápida
- Desvantagens:
 - Risco de *loop* infinito (casos raros)
 - Necessidade da obtenção de $f'(x)$
 - Uma aproximação: $f'(x) \approx [f(x+\epsilon) - f(x)]/\epsilon$, com ϵ pequeno
 - Risco de chegar a x_i tal que $f'(x_i) = 0$
 - Dificuldade de se encontrar uma aproximação inicial adequada
- O Método da Bissecção pode ser utilizado para se obter uma boa aproximação inicial

CCI-22

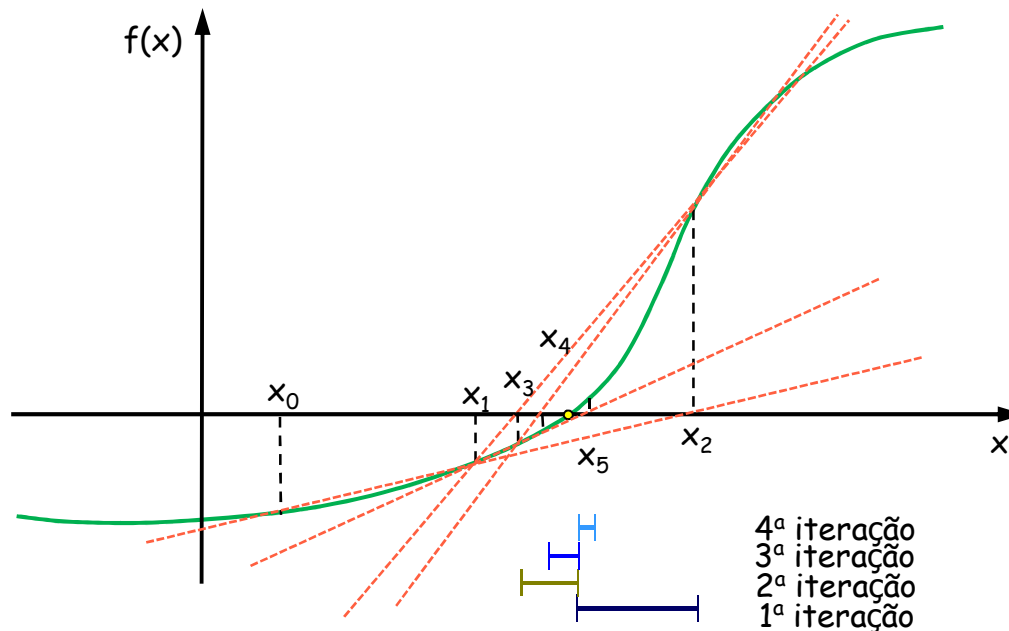


- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - **Secante**
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Secante

- Para se evitar o cálculo de derivadas, podemos usar um modelo linear baseado nos valores mais recentes de $f(x)$
- Partindo de duas aproximações x_{i-1} e x_i , calculamos a reta que passa por $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. A interseção desta reta com o eixo x determina a nova aproximação x_{i+1} , e o processo continua a partir de x_i e x_{i+1}
- Cálculo das aproximações:
$$x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i) / (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Secante: análise gráfica



- Sejam os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$
- Traça-se a reta $L_{i+1}(x)$ que passa por ambos os pontos:
$$L_{i+1}(x) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1})$$
- No cruzamento com o eixo x , $L_{i+1}(x) = 0$:
$$0 = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1})$$
- Portanto, $x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i) / (f(x_i) - f(x_{i-1}))$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\xi = 2; x_0 = 1,5; x_1 = 1,7$$

- $x_2 = x_1 - (x_1 - x_0) \cdot f(x_1) / (f(x_1) - f(x_0))$
- $x_2 = 1,7 - (1,7 - 1,5) \cdot (-1,41) / (-1,41 + 2,25) = 2,03571$
- $x_3 = 1,99774$
- $x_4 = 1,99999$


Convergência

- Como o Método da Secante é uma aproximação do Método de Newton-Raphson, as condições de convergência são praticamente as mesmas
- Pode-se demonstrar que, no Método da Secante, $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^p = C \neq 0$, onde $p = \frac{1}{2}(1+5^{1/2}) \approx 1,618$ (razão áurea)
- Portanto, esse método é um pouco mais lento que o Método de Newton-Raphson
- Além disso, é importante frisar que pode divergir se $f(x_i) \approx f(x_{i-1})$

Secante: análise geral

- Vantagens:
 - Convergência quase tão rápida quanto Newton-Raphson
 - Cálculos mais simples
- Desvantagens:
 - Dificuldade de se encontrar as aproximações iniciais
 - Pode divergir se a curva for quase paralela ao eixo x
 - Dados x_{i-1} e x_i , x_{i+1} pode cair fora do domínio de f
- O Método da Bissecção também pode ser utilizado para se obter as aproximações iniciais

CCI-22



- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - **Considerações finais**
- Sistemas de equações não lineares

Uma comparação

| Função | Raiz | Critério de parada |
|----------------------------------|-----------------|---------------------------------------------------|
| $f(x) = e^{-x \cdot x} - \cos x$ | $\xi \in (1;2)$ | $f(x_i) < 10^{-4}$ ou $ x_i - x_{i-1} < 10^{-4}$ |

| | Bissecção | Posição Falsa | Ponto Fixo $g(x) = \cos x - e^{-x \cdot x} + x$ | Newton-Raphson | Secante |
|----------------|------------------------|-------------------------|----------------------------------------------------|------------------------|-------------------------|
| Dados iniciais | [1;2] | [1;2] | $x_0 = 1,5$ | $x_0 = 1,5$ | $x_0 = 1; x_1 = 2$ |
| i (iterações) | 14 | 6 | 6 | 2 | 5 |
| x_i | 1,44741821 | 1,44735707 | 1,44752471 | 1,44741635 | 1,44741345 |
| $f(x_i)$ | $2,1921 \cdot 10^{-5}$ | $-3,6387 \cdot 10^{-5}$ | $7,0258 \cdot 10^{-5}$ | $1,3205 \cdot 10^{-6}$ | $-5,2395 \cdot 10^{-7}$ |
| Erro em x_i | $6,1035 \cdot 10^{-5}$ | $5,5288 \cdot 10^{-1}$ | $1,9319 \cdot 10^{-4}$ | $1,7072 \cdot 10^{-3}$ | $1,8553 \cdot 10^{-4}$ |

Considerações finais


- Principais critérios de comparação entre os métodos: garantia e rapidez de convergência e esforço computacional
- Convergência:
 - Bisseccção e Posição Falsa: basta que a função seja contínua no intervalo $[a,b]$ e que $f(a).f(b) < 0$
 - Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secante: condições mais restritivas, mas maior rapidez
- Quando não for difícil verificar as condições de convergência, convém usar o Método de Newton-Raphson; se o cálculo de $f'(x)$ for muito complicado, tentar o Método da Secante

MatLab



- `fzero(função, x0)`
 - Dada uma função como parâmetro, retorna uma raiz que esteja próxima de x_0
- Exemplos:
 - `fzero(inline('x^10 - 3'), 1)`
 - `fzero(inline('x^10 - 3'), [0 2])`

CCI-22



- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- **Sistemas de equações não lineares**

Sistemas de equações não lineares

- Dada uma função não linear $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, o objetivo é encontrar as soluções de $F(x) = 0$
- Equivalentemente:

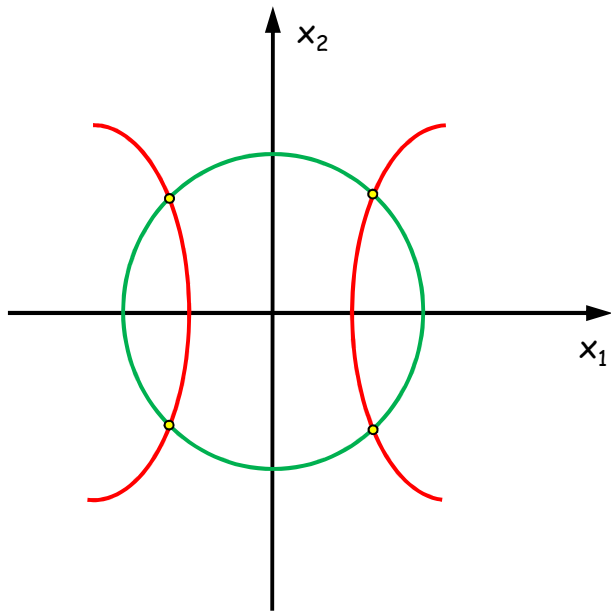
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

onde pelo menos uma função $f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, não é linear

Exemplos

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

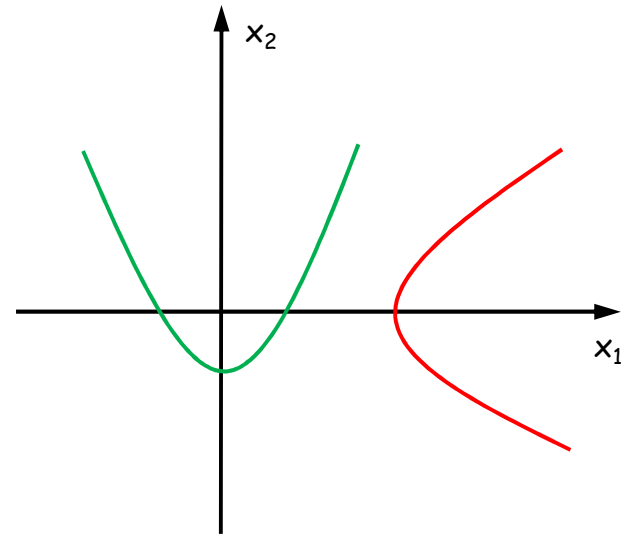
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2/9 - 1 = 0$$



4 soluções

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0,2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 + 1 = 0$$



Não há soluções

Matriz Jacobiana

- O vetor das derivadas parciais de cada função $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, é denominado *vetor gradiente* de f_i e será denotado por $\nabla f_i(x)$:

$$\nabla f_i(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right]^T$$

- A matriz $J(x)$ das derivadas parciais de $F(x)$ é chamada de *Matriz Jacobiana*:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Método de Newton

- A resolução mais estudada e conhecida de sistemas de equações não lineares é o Método de Newton
- Analogamente ao caso de uma única equação, dada a aproximação $x^{(k)} \in D$, para qualquer $x \in D$ existe $c_i \in D$ tal que $f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(c_i)^T \cdot (x - x^{(k)})$, onde $1 \leq i \leq n$
- Aproximando $\nabla f_i(c_i)$ por $\nabla f_i(x^{(k)})$, $1 \leq i \leq n$, temos um modelo local para $f_i(x)$ em torno de $x^{(k)}$:
 $f_i(x) \approx f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T \cdot (x - x^{(k)})$, onde $1 \leq i \leq n$
- Consequentemente:
 - $F(x) \approx L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)})$
 - $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow J(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$
- Chamando $s^{(k)} = x - x^{(k)}$, temos que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear $J(x^{(k)}) \cdot s = -F(x^{(k)})$

Exemplo

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}$$

Soluções: $x^* = [3 \ 0]^T$ e $x^{**} = [0 \ 3]^T$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix}$$

$$J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1,25 & 7,25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1,25 & 7,25 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,53125 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 0,533 \\ -0,533 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,533 \\ -0,533 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,092 \\ 3,0917 \end{bmatrix}$$

Método de Newton Modificado

- Sob condições adequadas envolvendo o ponto inicial $x^{(0)}$, a função $F(x)$ e a matriz Jacobiana $J(x)$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada pelo Método de Newton converge para a raiz com taxa quadrática
- No entanto, cada iteração exige a resolução do sistema $J(x^{(k)}) \cdot s = -F(x^{(k)})$, que compromete seu desempenho. Além disso, existe o risco de que alguma $J(x^{(k)})$ seja singular...
- Uma possível modificação é utilizar a matriz $J(x^{(0)})$ em todas as iterações: desse modo, a sequência $\{x^{(k)}\}$ será gerada através de $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear $J(x^{(0)}) \cdot s = -F(x^{(k)})$. Escolhe-se $x^{(0)}$ tal que $J(x^{(0)})$ seja não singular
- A decomposição LU da matriz $J(x^{(0)})$ melhora o desempenho deste novo algoritmo, que é chamado *Método de Newton Modificado*. No entanto, sua taxa de convergência passa a ser linear

Mesmo exemplo

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}$$

Soluções: $x^* = [3 \ 0]^T$ e $x^{**} = [0 \ 3]^T$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,53125 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 0,56640625 \\ -0,56640625 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,56640625 \\ -0,56640625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05859375 \\ 3,05859375 \end{bmatrix}$$