



CCI-22



3) Raízes de Sistemas Lineares


Eliminação de Gauss, Gauss-Jordan,
Decomposição LU, Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

CCI-22



- **Introdução**
- **Métodos diretos**
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- **Métodos iterativos**
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- **Considerações finais**

Métodos de resolução

- Para a resolução de um sistema linear de equações, há dois grupos de métodos:
 - Métodos diretos: a solução é obtida através da aplicação de um número finito de operações aritméticas
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
 - Métodos iterativos: a solução é obtida através de uma sequência de aproximações sucessivas, até se alcançar uma resposta que satisfaça a precisão exigida
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel

Sistemas de Equações Lineares

- Forma geral:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

onde:

a_{ij} são os coeficientes

x_i são as incógnitas

b_i são os termos independentes

n é a ordem do sistema

- Forma matricial:

$$Ax = b \quad \text{onde:} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Forma geral:

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5$$

$$4x_1 + 1x_2 - 5x_3 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1$$

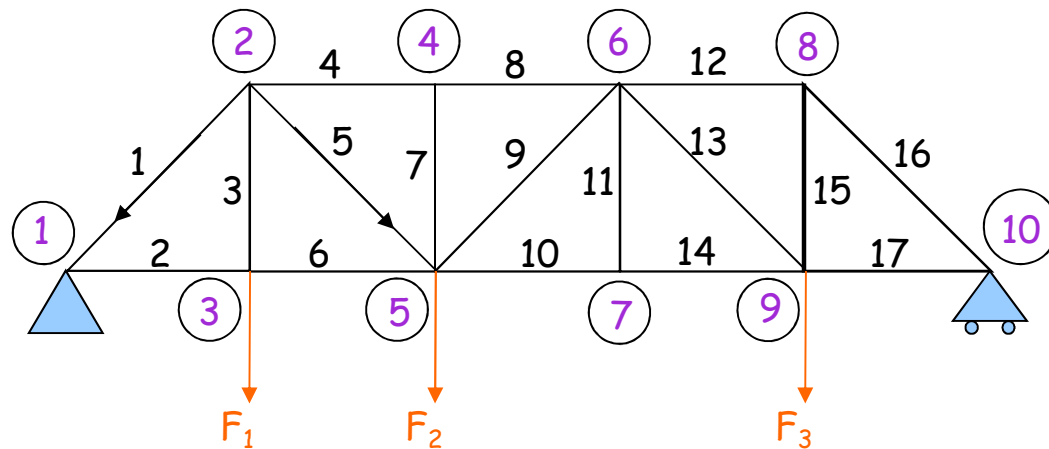
- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo das forças em uma treliça

- Um exemplo:

F_1, F_2 e F_3 são dadas



- Condições de equilíbrio:

- Na junção 2:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_1 \underbrace{\cos 45^\circ}_a + f_4 + f_5 \underbrace{\cos 45^\circ}_a = 0 \\ \sum F_x = -af_1 + f_4 + af_5 = 0 \\ \sum F_y = -af_1 - f_3 - af_5 = 0 \end{cases}$$


- Na junção 3:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \sum F_y = -F_1 + f_3 = 0 \end{cases}$$

- Idem para demais junções

- Gerará um sistema de ordem 17

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Regra de Cramer

- A aplicação da regra de Cramer, em um sistema de ordem n , exige o cálculo de quantos determinantes?
 - n para os numeradores e 1 para o denominador

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Tempo de processamento

- Seja m o tempo gasto para realizar uma multiplicação
- Seja \det_n o número de multiplicações presentes no cálculo do determinante de uma matriz de ordem n
- Podemos calcular o tempo T gasto apenas com multiplicações, no caso de 17 equações:
 - $T = m \cdot 18 \cdot \det_{17}$
 - $T = m \cdot 18 \cdot (17 + 17 \cdot \det_{16})$
 - $T = m \cdot 18 \cdot (17 + 17 \cdot (16 + 16 \cdot \det_{15}))$
 - $T = m \cdot 18 \cdot (17 + 17 \cdot (16 + 16 \cdot (15 + 15 \cdot \det_{14})))$
 - $T = m \cdot 18 \cdot (17 + 17 \cdot (16 + 16 \cdot (15 + 15 \cdot (14 + 14 \cdot (\dots (3 + 3 \cdot (2) \dots))))))$

Lembrando:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \cdot \det A_{-i,-j}$$

Tempo de processamento

$$T = m.18.(17 + 17.(16 + 16.(15 + 15.(...(3 + 3.(2)...))))))$$

$$\begin{aligned}
 T = m.(& 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 + \\
 & + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 + \\
 & + 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 + \\
 & + 5 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 18 + \\
 & : \\
 & + 16 \cdot 17 \cdot 18 + \\
 & + 17 \cdot 18)
 \end{aligned}$$

$$T = m.18!.(1 + (1/2!) + (1/3!) + \dots + (1/16!))$$

$$T \approx m \cdot 9,6 \cdot 10^{15}$$

Tempo de processamento

- Quantidade de multiplicações: $\approx 9,6 \cdot 10^{15}$
- Utilizando um supercomputador atual:
 - 10^{11} multiplicações por segundo
 - Tempo gasto: $9,6 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 1 \text{ dia}$
- Se o sistema fosse de ordem 20, exigiria cerca de **28 anos** de processamento nesse mesmo computador!
- Um algoritmo bem mais eficiente é o *Método da Eliminação de Gauss*, que gasta tempo $O(n^3)$

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - **Eliminação de Gauss**
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método da Eliminação de Gauss

- Objetivo:
 - Transformação do sistema linear a ser resolvido em um *sistema linear triangular*
- Operações válidas:
 - Troca da ordem das linhas
 - Troca da ordem das colunas (com exceção dos termos independentes)
 - Multiplicação de uma equação por um número real não nulo
 - Substituição de uma equação por uma combinação linear entre ela mesma e outra equação

Sistemas lineares triangulares

- Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Resolução de um sistema triangular

■ Exemplo:

$$\begin{array}{rccccrc} 3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & -10 \\ & & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ & & & & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ & & & & & & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

- Passos da resolução:

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -1$$

$$x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$x_2 = -1$$

$$4x_3 - 5x_4 = 3$$

$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3$$

$$x_3 = 2$$

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10$$

$$3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10$$

$$x_1 = 1$$

Passos

- Considere a matriz aumentada $[Ab]$:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Linha } L_1 \\ \leftarrow \text{Linha } L_2 \\ \\ \leftarrow \text{Linha } L_n \end{array}$$

- Passo 1: anular os coeficientes de x_1 nas linhas L_2 a L_n

- Substituir a linha L_2 pela combinação linear:

$$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad \text{onde } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Conhecido
como pivô

- Se $a_{11} = 0$, trocar L_1 com L_k , onde $a_{k1} \neq 0$
 - Se L_k não existir, então o sistema não tem solução
- Continuar analogamente para linhas L_j , $2 < j \leq n$
- Passo i , $1 < i < n$: anular os coeficientes de x_i nas linhas L_{i+1} a L_n

Exemplo 1

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$

$$4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$$

$$L_2 = [4 \quad 4 \quad -3 \quad 3] - 2 \cdot [2 \quad 3 \quad -1 \quad 5]$$
$$L_2 = [0 \quad -2 \quad -1 \quad -7]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1$$

$$L_3 = [2 \quad -3 \quad 1 \quad -1] - 1 \cdot [2 \quad 3 \quad -1 \quad 5]$$
$$L_3 = [0 \quad -6 \quad 2 \quad -6]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

$$L_3 = [0 \quad -6 \quad 2 \quad -6] - 3 \cdot [0 \quad -2 \quad -1 \quad -7]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 5 \quad 15]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Algoritmo

- Sistema linear $Ax = b$ de ordem n :

Eliminação de Gauss {

```
para k=1 até n-1
  para i=k+1 até n {
    m = aik/akk // akk ≠ 0
    aik = 0
    para j=k+1 até n
      aij = aij - m.akj
    bi = bi - m.bk
  }
```

Eliminação

```
xn = bn/ann
para k=n-1 até 1 {
  s = 0
  para j=k+1 até n
    s = s + akj.xj
  xk = (bk - s)/akk
}
```

Sistema triangular

Complexidade de tempo: $O(n^3)$

Exemplo 2

$$x_1 + 4x_2 + 52x_3 = 57$$

$$27x_1 + 110x_2 - 3x_3 = 134$$

$$22x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 38$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right]$$

Nos cálculos a seguir, consideraremos $F(10, \mathbf{3}, -5, 5)$:

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [27 \ 110 \ -3 \ 134] - (27/1) \cdot [1 \ 4 \ 52 \ 57]$$

$$L_2 = [0 \ 2 \ -1400 \ -1410]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \ 2 \ 14 \ 38] - (22/1) \cdot [1 \ 4 \ 52 \ 57]$$

$$L_3 = [0 \ -86 \ -1130 \ -1210]$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array} \right]$$

Exemplo 2

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array} \right]$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad -86 \quad -1130 \quad -1210] - (-86/2) \cdot [0 \quad 2 \quad -1400 \quad -1410]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad -61300 \quad -61800]$$

Apenas 3 algarismos
são representados

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{array} \right]$$

$$x_3 = -61800 / (-61300) = 1,01$$

$$x_2 = [-1410 - (-1400) \cdot 1,01] / 2 = 0,0$$

$$x_1 = [57 - 52 \cdot 1,01 - 4 \cdot 0,0] / 1 = 4,5$$

No entanto, a solução exata é:

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$
- $x_3 = 1$

Pivoteamentos parcial e completo

- Pivôs pequenos geram multiplicadores grandes, que aumentam os erros de arredondamento...
- Uma simples alteração na Eliminação de Gauss é escolher como pivô o *elemento de maior módulo*:
 - em cada coluna (pivoteamento parcial) (tempo total da Eliminação de Gauss será $O(n^3)$)
 - dentre todos os elementos possíveis no processo (pivoteamento completo): exige um maior esforço computacional (tempo total da Eliminação de Gauss será $O(n^4)$)
- Voltemos a resolver o exemplo anterior com precisão de 3 casas decimais, mas com pivoteamento parcial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ \color{red}{27} & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right]$$

Exemplo 2 com pivoteamento parcial

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \ 4 \ 52 \ 57] - (1/27) \cdot [27 \ 110 \ -3 \ 134]$$

$$L_2 = [0 \ -0,07 \ 52,1 \ 52]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \ 2 \ 14 \ 38] - (22/27) \cdot [27 \ 110 \ -3 \ 134]$$

$$L_3 = [0 \ -87,6 \ 16,5 \ -71]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0,07 & 52,1 & 52 \\ 0 & -87,6 & 16,5 & -71 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87,6 & 16,5 & -71 \\ 0 & -0,07 & 52,1 & 52 \end{array} \right]$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \ -0,07 \ 52,1 \ 52] - (0,07/87,6) \cdot [0 \ -87,6 \ 16,5 \ -71]$$

$$L_3 = [0 \ 0 \ 52,1 \ 52,1]$$


$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87,6 & 16,5 & -71 \\ 0 & 0 & 52,1 & 52,1 \end{array} \right]$$

$$x_3 = 52,1/52,1 = 1$$

$$x_2 = [-71 - 16,5 \cdot 1] / (-87,6) = 0,999$$

$$x_1 = [134 - (-3) \cdot 1 - 110 \cdot 0,999] / 27 = 1,00$$

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema com a finalidade de transformá-lo em um *sistema diagonal equivalente*, isto é, são nulos todos os coeficientes a_{ik} , quando $i \neq k$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 1$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Pivoteamento}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \ 5 \ 1 \ 1] - (1/5) \cdot [5 \ 2 \ 3 \ 2]$$

$$L_2 = [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2 \ 3 \ 2 \ 4] - (2/5) \cdot [5 \ 2 \ 3 \ 2]$$

$$L_3 = [0 \ 2,2 \ 0,8 \ 3,2]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 2,2 & 0,8 & 3,2 \end{bmatrix}$$

Exemplo (Gauss-Jordan)

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 2,2 & 0,8 & 3,2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \ 2,2 \ 0,8 \ 3,2] - (2,2/4,6) \cdot [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6]$$

$$L_3 = [0 \ 0 \ 0,609 \ 2,913]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{23} \cdot L_3 = [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6] - (0,4/0,609) \cdot [0 \ 0 \ 0,609 \ 2,913]$$

$$L_2 = [0 \ 4,6 \ 0 \ -1,313]$$

Exemplo (Gauss-Jordan)

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - (2/4,6) \cdot [0 \quad 4,6 \quad 0 \quad -1,313]$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1,571]$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1,571] - (3/0,609) \cdot [0 \quad 0 \quad 0,609 \quad 2,913]$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 0 \quad -12,78]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -12,78 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

A solução é:


- $x_1 = -2,556$
- $x_2 = -0,2854$
- $x_3 = 4,783$

Outra aplicação

- Uma variação do método de Gauss-Jordan pode ser utilizada para se encontrar a inversa de uma matriz A quadrada de ordem n
- Basta transformar a matriz A na correspondente matriz identidade, aplicando essas mesmas operações em uma matriz identidade de ordem n

$$[A | I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I | A^{-1}]$$

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Refinamento por resíduos

- Se $x^{(1)}$ for encontrado como solução do sistema $Ax = b$, então o erro dessa solução é $x - x^{(1)}$
- Multiplicando esse erro por A :
 - $A(x - x^{(1)}) = b - Ax^{(1)} = r^{(1)}$ ————— **resíduo**
- O resíduo pode ser utilizado para se encontrar uma solução melhorada $x^{(2)}$:
 - $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$, onde $\delta^{(1)}$ é um vetor de correção
 - $Ax^{(2)} = b \Leftrightarrow A(x^{(1)} + \delta^{(1)}) = b \Leftrightarrow A\delta^{(1)} = b - Ax^{(1)} = r^{(1)}$
 - $\delta^{(1)}$ é encontrado resolvendo-se o sistema $A\delta = r^{(1)}$
- Esses cálculos permitem um processo de refinamento da solução do sistema $Ax = b$

Exemplo

- Considere o sistema abaixo, que será resolvido em uma máquina que trabalha com apenas *dois dígitos decimais significativos*:

$$16x_1 + 5,0x_2 = 21$$

$$3,0x_1 + 2,5x_2 = 5,5$$

- Através da Eliminação de Gauss, podemos encontrar a solução abaixo:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do resíduo:

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

Não está bom...

Exemplo

- Cálculo do vetor de correção $\delta^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 16 & 5,0 \\ 3,0 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} \\ \delta_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,30 \\ 0,15 \end{bmatrix}$$

- Vetor de correção:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,00063 \\ 0,058 \end{bmatrix}$$

Arredondamento
aqui

- Solução melhorada:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

- Novo resíduo:

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x^{(2)}$
é solução exata

Melhor aproximação

- Dado um sistema $Ax = b$, sejam y e z duas aproximações da solução exata x . Como saber qual delas é melhor?
- A estratégia mais lógica parece ser comparar os respectivos resíduos: o menor seria da melhor solução
- Infelizmente, isso nem sempre é verdade...
- Exemplo na mesma máquina de 2 dígitos decimais:

$$\begin{cases} 0,24x_1 + 0,36x_2 + 0,12x_3 = 0,84 \\ 0,12x_1 + 0,16x_2 + 0,24x_3 = 0,52 \\ 0,15x_1 + 0,21x_2 + 0,25x_3 = 0,64 \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} 25 \\ -14 \\ -1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_y = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,08 \end{bmatrix} \quad r_z = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,24 \\ 0,25 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Conclusão: nem sempre a aproximação de menor resíduo é a mais exata
- Se a busca por resíduos menores não garante melhores soluções, como saber se o processo de refinamento por resíduos funciona?

Condicionamento de sistemas

- Um sistema linear é dito mal condicionado se pequenas alterações nos dados de entrada (A ou b) ocasionam grandes erros no resultado final

- Exemplo em outra máquina de 3 dígitos decimais:

$$\begin{cases} 0,961x + 0,844y = 0,119 \\ 0,481x + 0,422y = 0,060 \end{cases}$$

Solução: $x=1,00$ e $y=-0,998$

- Suponha que os valores desse sistema sejam obtidos experimentalmente, e por isso os termos independentes possam variar de $\pm 0,001$:

$$\begin{cases} 0,961x + 0,844y = 0,120 \\ 0,481x + 0,422y = 0,060 \end{cases}$$

Valor perturbado

Solução: $x=0,00$ e $y=0,142$

Erro na entrada: $(|0,119-0,120|/|0,119|) \approx 0,8\%$

Erro no resultado: $(|-0,998-0,142|/|-0,998|) \approx 114\%$

- Quando há mal condicionamento, alta precisão nos cálculos não significa quase nada, pois os resultados obtidos não são confiáveis...

Interpretação geométrica

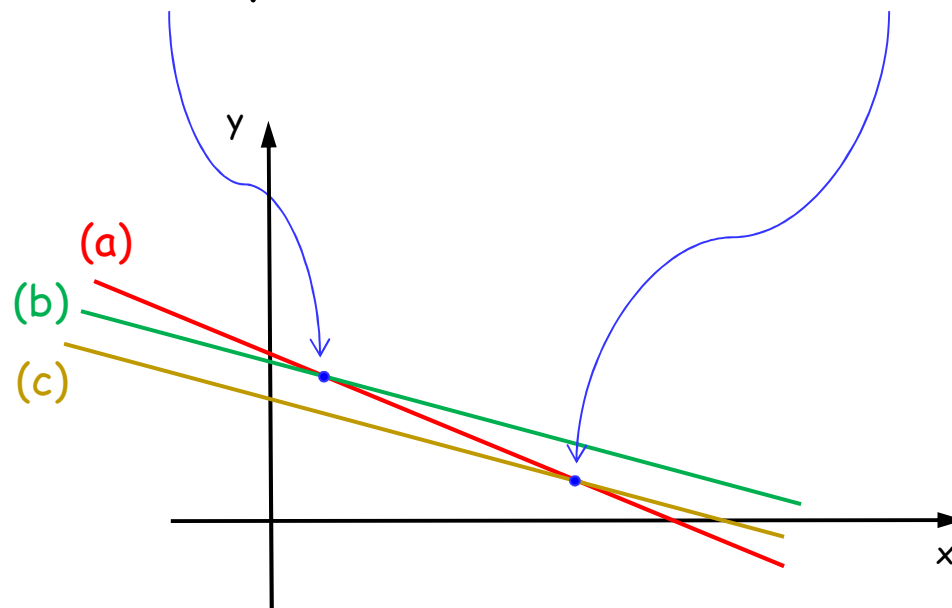
- Considere os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x+3y=11 & (a) \\ 15x+4,501y=16,503 & (b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=11 & (a) \\ 15x+4,501y=16,500 & (c) \end{cases}$$

Solução: $x=2$ e $y=3$

Solução: $x=10,28$ e $y=0,24$



Uma métrica de condicionamento

- Em máquinas com grande precisão, geralmente não faz sentido refinar os resultados...
- No entanto, *empiricamente*, os refinamentos ajudam a identificar o condicionamento de um sistema linear:
 - Se as correções $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, ..., $\delta^{(n)}$ forem grandes, então o sistema será mal condicionado
 - Em sistemas bem condicionados, bastam dois refinamentos: $\delta^{(3)}$, ..., $\delta^{(n)}$ serão próximos do épsilon da máquina
- Importante: nesse processo de verificação, o vetor b não pode ser nulo
 - Caso contrário, mesmo em um sistema mal condicionado, a solução exata será nula, com correções também nulas...

Exemplo

- Considere o sistema abaixo em $F(10, 5, -98, 100)$:

$$\begin{cases} 2,4759x_1 + 1,6235x_2 + 4,6231x_3 = 0,064700 \\ 1,4725x_1 + 0,95890x_2 - 1,3253x_3 = 1,0473 \\ 2,6951x_1 + 2,8965x_2 - 1,4794x_3 = -0,67890 \end{cases} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,8406 \\ -2,0717 \\ -0,24419 \end{bmatrix}$$

- Primeiro refinamento em $F(10, 10, -98, 100)$:

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0647 \\ 1,0473 \\ -0,6789 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,064821801 \\ 1,047355377 \\ -0,678823304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,00012180 \\ -0,000055377 \\ -0,000076696 \end{bmatrix}$$

Resíduos pequenos

- Resolução de $A\delta = r^{(1)}$:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,0000042282 \\ 0,000025110 \\ -0,000057765 \end{bmatrix}$$

Correções relativamente pequenas

- Solução melhorada $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,8405 \\ -2,0717 \\ -0,24419 \end{bmatrix}$$

Outra métrica de condicionamento

- Mostraremos agora outra maneira de identificar o mal condicionamento de um sistema linear não singular $Ax = b$
- Vamos supor que os dados estão sujeitos a certas perturbações, e analisaremos seus efeitos na solução
- Inicialmente, seja $b + \Delta b$ uma *perturbação no vetor de termos independentes*
- Desse modo, a solução também será perturbada, ou seja, teremos $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$
- Desejamos encontrar uma relação entre Δx e Δb , pois, conhecendo o tamanho da perturbação Δb , poderemos estimar Δx , e verificar então se o sistema é ou não mal condicionado
- Para isso, teremos que rever o conceito de normas

Normas de vetores

- Dado um vetor x do espaço vetorial E , chama-se norma de x (denotada por $\|x\|$) qualquer função definida em E com valores em \mathbb{R} que satisfaz as seguintes condições:
 - $\|x\| \geq 0$
 - $\|x\| = 0$ se e somente se x for o vetor nulo
 - $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, para todo escalar λ
 - $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, onde $y \in E$
- Exemplos de normas de vetores em $E = \mathbb{R}^n$:
 - $\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$
 - $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$
 - $\|x\|_E = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$

Normas de matrizes

- Dada uma matriz A do espaço vetorial E de matrizes quadradas de ordem n , chama-se norma de A (denotada por $\|A\|$) qualquer função definida em E com valores em \mathbb{R} que satisfaz as seguintes condições:
 - $\|A\| \geq 0$
 - $\|A\| = 0$ se e somente se A for a matriz nula
 - $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, para todo escalar λ
 - $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, onde $B \in E$
- Exemplos de normas de matrizes, onde $A = (a_{ij})$:
 - Norma linha: $\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$
 - Norma coluna: $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$
 - Norma euclidiana: $\|A\|_E = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{1/2}$

Usando normas

- Desenvolvendo a equação $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$:
 - $Ax + A\Delta x = b + \Delta b$
 - Como $Ax = b$, então $A\Delta x = \Delta b$
 - Desde que A é não singular, então $\Delta x = A^{-1}\Delta b$
- Se uma norma de matriz e uma norma de vetor estão relacionadas de tal modo que satisfaça a desigualdade $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$, para qualquer vetor x de ordem n , então dizemos que as duas normas são *consistentes*
- Usando normas consistentes:
 - $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$
 - De $Ax = b$, também temos $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$
- Multiplicando as inequações membro a membro:
 - $\|\Delta x\| \cdot \|b\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \cdot \|x\|$

Número de condição

- $||\Delta x|| \cdot ||b|| \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b|| \cdot ||x||$
- $||\Delta x|| / ||x|| \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b|| / ||b||$
- $||\Delta x|| / ||x|| \leq \text{cond}(A) \cdot ||\Delta b|| / ||b||$
- Observações:
 - Número de condição de A :
 $\text{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \geq ||A \cdot A^{-1}|| = ||I|| = 1$
 - $||\Delta b|| / ||b||$ é uma medida do erro relativo em b
 - O erro em $||\Delta x|| / ||x||$ dependerá de $\text{cond}(A)$, que é maior ou igual a 1
 - Se $\text{cond}(A)$ for grande, então pequenas perturbações relativas em b produzirão grandes perturbações relativas em x , e o sistema $Ax = b$ será mal condicionado
 - Geralmente, sistemas com $\text{cond}(A) \geq 10^4$ são considerados mal condicionados

Outro caso possível

- Consideremos agora outro caso possível: o vetor b é conhecido exatamente, mas ocorre uma *perturbação na matriz A* . Teremos, portanto, $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$
- Desenvolvendo:
 - $(x + \Delta x) = (A + \Delta A)^{-1}b$ Equação (*)
 - Como $x = A^{-1}b$, temos: $\Delta x = (A + \Delta A)^{-1}b - A^{-1}b$
 - $\Delta x = [(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}]b = [B^{-1} - A^{-1}]b$, onde $A + \Delta A = B$
 - $B^{-1} - A^{-1} = (A^{-1}A)B^{-1} - A^{-1}(BB^{-1}) = A^{-1}(A - B)B^{-1}$
 - $\Delta x = (B^{-1} - A^{-1})b = [A^{-1}(A - B)B^{-1}]b = [A^{-1}(A - (A + \Delta A))(A + \Delta A)^{-1}]b$
 - $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(A + \Delta A)^{-1}b$
 - Utilizando a equação (*): $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$
- Aplicando normas consistentes em ambos os membros:
 - $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|(x + \Delta x)\|$
 - $\|\Delta x\| / \|(x + \Delta x)\| \leq \text{cond}(A) \cdot \|\Delta A\| / \|A\|$: semelhante ao anterior

Exemplo

- Analisar o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1,2969 & 0,8648 \\ 0,2161 & 0,1441 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8642 \\ 0,1440 \end{bmatrix}$$

- Através de Gauss-Jordan, podemos calcular A^{-1} :


$$A^{-1} = 10^8 \begin{bmatrix} 0,1441 & -0,8648 \\ -0,2161 & 1,2969 \end{bmatrix}$$

- Usando a norma linha, que é consistente:
 - $\|A\|_{\infty} = 2,1617$
 - $\|A^{-1}\|_{\infty} = 1,5130 \cdot 10^8$
 - $\text{cond}(A) = \|A\|_{\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{\infty} \approx 3,3 \cdot 10^8$
 - Conclusão: sistema mal condicionado

Alguns comentários

- Um sistema é mal condicionado se for excessivamente sensível a perturbações em seus dados de entrada
- A solução de um sistema mal condicionado, mesmo calculada com *grande precisão*, pode ser *pouco exata*
- Geralmente, essa situação pode ser detectada quando:
 - no processo de refinamento, as correções permanecem grandes
 - o número de condição da matriz A for muito maior que a unidade
- Importante:
 - Resíduos pequenos não garantem a qualidade de uma solução
 - A precisão da máquina influi no condicionamento do sistema
 - Há sistemas lineares em que o processo de refinamento converge para uma solução, mas a matriz A tem um número de condição grande (por exemplo, da ordem de 10^2 ou 10^3). Nestes casos, o sistema está próximo de ser mal condicionado, ou seja, a solução encontrada pode não ser confiável...

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - **Decomposição LU**
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Outra forma de ver a Eliminação de Gauss...

- Consideremos o sistema de 3 equações $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A^{(0)} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Após a primeira fase da Eliminação de Gauss:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = M^{(0)} \cdot A^{(0)}, \quad \text{onde } M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Após a segunda fase da Eliminação de Gauss:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = M^{(1)} \cdot A^{(1)}, \quad \text{onde } M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Outra forma de ver...

- Resumindo:

- $A = A^{(0)}$
- $A^{(1)} = M^{(0)}.A^{(0)} = M^{(0)}.A$
- $A^{(2)} = M^{(1)}.A^{(1)} = M^{(1)}.M^{(0)}.A$
- $A = (M^{(1)}.M^{(0)})^{-1}.A^{(2)}$
- $A = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}.A^{(2)}$

- É fácil comprovar que:

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = L.U$$

Decomposição LU

- A comprovação anterior pode ser generalizada para matrizes de ordem n , em um Teorema

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Dada uma matriz quadrada de ordem n , seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A . Suponha que $\det(A_k) \neq 0$, $1 \leq k \leq n$. Então:
 - Existe uma única matriz triangular inferior $L=(m_{ij})$, com $m_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$. Os demais são os multiplicadores da Eliminação de Gauss
 - Existe uma única matriz triangular superior $U=(u_{ij})$, tais que $L.U = A$
 - $\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$

Decomposição LU - Resolução do Sistema

- Portanto, dados o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição (ou fatoração) LU da matriz A , temos:
 - $Ax = b \Leftrightarrow (L.U)x = b$
- Chamando $Ux = y$, o sistema original passa a ser $Ly = b$, ou seja, surgem dois sistemas triangulares
- Por outro lado, é fácil verificar que $y = L^{-1}.b$ é o vetor b acumulando as operações da Eliminação de Gauss
- Por exemplo, no caso de um sistema com 3 equações:
 - Como $L = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}$, então $L^{-1} = M^{(1)}.M^{(0)}$
 - Portanto, $y = M^{(1)}.M^{(0)}.b$
- Vantagem da decomposição $A = L.U$: uma vez calculadas as matrizes L e U (em tempo cúbico), resolvemos mais rapidamente (em tempo quadrático) outros sistemas com a mesma matriz A . Isso é útil, por exemplo, no refinamento por resíduos

Exemplo

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

multiplicadores

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Tempo cúbico

Exemplo

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b$$

$$Ly = b \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 &= 5/3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tempo
quadrático

Outra aplicação - Inversa

- A decomposição LU também é útil no cálculo da matriz inversa
- Resolver o sistema $AX = B$, onde A , X e B são matrizes de ordem n , é o mesmo que resolver n sistemas $Ax = b$, onde x e b são vetores de tamanho n
- A inversa A^{-1} da matriz A pode ser encontrada através da resolução do sistema $AX = I$, onde I é a matriz identidade
- Nesse caso, basta realizar uma única vez a decomposição LU da matriz A , e depois utilizá-la na resolução de n sistemas

Decomposição LU com pivoteamento

- É possível incorporar as estratégias de pivoteamento parcial ou completo à decomposição LU
- Uma matriz quadrada P de ordem n é uma *matriz de permutação* se for obtida da correspondente matriz identidade através de permutações em suas linhas ou colunas
- As eventuais permutações de linhas ou colunas na matriz $A^{(k)}$, obtida em um passo intermediário da Eliminação de Gauss, podem ser realizadas através da multiplicação por uma matriz de permutação
- Exemplo:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad P \cdot A^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$

$$4x_1 - 3x_3 = -2$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'^{(0)} = P^{(0)} \cdot A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'^{(1)} = P^{(1)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

- $L.U = A' = P.A$, onde $P = P^{(1)}.P^{(0)}$:

$$A' = P.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- $A'x = b' \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = Pb$$

$$Ly = Pb \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Algoritmo

- Decomposição LU com pivoteamento parcial em um sistema de ordem n
- Saída: matriz $D = L+U-I$ e matriz de permutação P

```
LUPivotParcial {
```

```
    D = A      // matriz de ordem n  
    P = I      // identidade de ordem n
```

```
    para j=1 até n-1 {
```

```
        q = j  
        max = |djj|  
        para k=j+1 até n {  
            se |dkj| > max então {  
                max = |dkj|  
                q = k  
            }  
        }
```

```
    \\ continua...
```

} Escolha do pivô

Algoritmo (continuação)

```
// continuação LUPivotParcial {
```

```
    se  $q \neq j$  então {  
        para  $k=1$  até  $n$  {  
             $t = d_{jk}$   
             $d_{jk} = d_{qk}$   
             $d_{qk} = t$   
        }  
    }  
    // trocar linhas  $q$  e  $j$  em  $P$ !!  
    se  $|d_{jj}| = 0$  então parar //(A é singular)  
    senão {  
         $r = 1/d_{jj}$   
        para  $i=j+1$  até  $n$  {  
             $m = d_{ij} \cdot r$   
             $d_{ij} = m$   
            para  $k=j+1$  até  $n$   
                 $d_{ik} = d_{ik} - m \cdot d_{jk}$   
            }  
        }  
    }  
    }  
    return D, P  
}
```

Troca das linhas q e j
(q é a linha do novo pivot)

Eliminação

Complexidade de tempo: $O(n^3)$

MatLab

- No MatLab 7.8 (2009), os números reais são armazenados em 64 bits (precisão dupla da IEEE), ou seja, possuem 16 dígitos decimais
- $A \setminus b$
 - Vetor coluna com a solução do sistema linear $Ax = b$
- $\text{inv}(A)$
 - Inversa da matriz A
- $[L,U] = \text{lu}(A)$
 - Matrizes L e U recebem a decomposição LU da matriz A , usando pivoteamento parcial, onde L acumula a permutação
- $[L,U,P] = \text{lu}(A)$
 - Idem, retornando também a matriz de permutação P tal que $P.A = L.U$
- $\text{linsolve}(A,b)$
 - Vetor coluna com a solução de $Ax = b$, usando LU com pivoteamento parcial
- $\text{cond}(A,x)$
 - Número de condição da matriz A ($x = 1$: norma coluna ; $x = \text{Inf}$: norma linha)

Matrizes Especiais

- Há matrizes especiais que tem métodos de resolução mais eficientes que LU, dois exemplos são:
 - Matrizes de Banda
 - Algoritmo de Thomas
 - Matrizes Simétricas
- Vejamos um método especial para Matrizes Simétricas: Fatoração de Cholesky

Fatoração de Cholesky

- A fatoração de Cholesky é aplicável apenas a um tipo particular de matriz, a matriz simétrica e definida positiva
 - Uma matriz é dita simétrica, se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i e j
 - Uma matriz é dita definida positiva, isto é se os determinantes das submatrizes principais forem todos positivos. Formalmente:
 - seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A . Se $\det(A_k) > 0, 1 \leq k \leq n$. então A é definida positiva
- Se aplicável, a fatoração de Cholesky é muito mais eficiente que a fatoração LU

Fatoração de Cholesky

- Se A é simétrica e definida positiva, ela pode ser fatorada em um produto da matriz g e sua transposta, tal que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \dots & g_{n1} \\ & g_{22} \dots & g_{n2} \\ & \dots & \dots \\ 0 & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

- Observe que $\det(A)$ poderia ser facilmente calculado pelo produtório de g_{ii}^2

Fatoração de Cholesky

- Aplicando o produto, obtem-se:
 - a) Elementos diagonais.

$$a_{11} = g_{11}^2$$

$$a_{22} = g_{21}^2 + g_{22}^2$$

⋮

$$a_{nn} = g_{n1}^2 + g_{n2}^2 + \cdots + g_{nn}^2$$

Assim:

$$(I) \begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2}, i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

Fatoração de Cholesky

b) Elementos não diagonais.

1ª coluna

$$a_{21} = g_{21}g_{11}$$

$$a_{31} = g_{31}g_{11}$$

⋮

$$a_{n1} = g_{n1}g_{11}$$

2ª coluna

$$a_{32} = g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22}$$

$$a_{42} = g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22}$$

⋯

$$a_{n2} = g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22}$$

b.3) Para a j-ésima coluna, teríamos:

$$a_{j+1,j} = g_{j+1,1}g_{j1} + g_{j+1,2}g_{j2} + \dots + g_{j+1,j}g_{jj}$$

$$a_{j+2,j} = g_{j+2,1}g_{j1} + g_{j+2,2}g_{j2} + \dots + g_{j+2,j}g_{jj}$$

⋯

$$a_{nj} = g_{n1}g_{j1} + g_{n2}g_{j2} + \dots + g_{nj}g_{jj}$$

Assim

$$(II) \begin{cases} g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \dots, n \\ g_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk} \right) / g_{jj}, 2 \leq j < i \end{cases}$$

Fatoração de Cholesky

Assim:

$$(I) \quad \begin{aligned} g_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} &= \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2}, i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

$$(II) \quad \begin{aligned} g_{i1} &= \frac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \dots, n \\ g_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk} \right) / g_{jj}, 2 \leq j < i \end{aligned}$$

Utilizadas numa ordem conveniente as fórmulas (I) e (II) determinam os g_j .
Uma ordem conveniente pode ser:

$$g_{11}, g_{21}, g_{31}, \dots, g_{n1}; g_{22}, g_{32}, \dots, g_{n2}; \dots, g_{nn}$$

Exemplo

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Verificar se A pode ser decomposta em $G \cdot G^t$
- Decompor A em $G \cdot G^t$
- Calcular o determinante de A .

d.) Resolver o sistema $Ax = b$ onde $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Solução:

- A é simétrica. Devemos verificar se é positiva definida. Temos:
 $\det(A_1) = 1 > 0$
 $\det(A_2) = 1 > 0$
 $\det(A_3) = \det(A) = 2 > 0$

- Logo, conclui-se que pode-se decompor A

Exemplo

b.)

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow g_{11} = 1$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \Rightarrow g_{21} = 1$$

$$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \Rightarrow g_{31} = 0$$

$$g_{22} = \left(a_{22} - g_{21}^2\right)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = 1$$

$$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31}g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = -1$$

$$g_{33} = \left(a_{33} - g_{31}^2 - g_{32}^2\right)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c.) $\det(A) = (g_{11} g_{22} g_{33})^2 = 2$

Exemplo

Como resolver o sistema $Ax=b$ usando a fatoração de Cholesky?

Temos:

$$A = G.G^t$$

$$Ax=b \Rightarrow G.G^t x=b$$

$$\Rightarrow Gy = b$$

e

$$G^t x = y$$

d.) Devemos resolver dois sistemas:

d1.) $Gy = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$y_1 = 2$$

$$y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -1$$

$$-y_2 + \sqrt{2}y_3 = 5 \Rightarrow y_3 = 2\sqrt{2}$$

d2.) $G^t \cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\sqrt{2}x_3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$


Logo a solução de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ é } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para pensar em casa...

- Dada uma matriz A com determinante não zero mas que seja não simétrica e definida positiva...
- Seria possível achar um sistema equivalente a $Ax=b$, onde a matriz de coeficientes fosse simétrica e definida positiva?

CCI-22




- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- **Métodos iterativos**
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Métodos iterativos

- Como foi inicialmente comentado, os métodos iterativos para resolução de sistemas lineares consistem em encontrar uma sequência de aproximações sucessivas
- Dada uma estimativa inicial $x^{(0)}$, calcula-se a sequência $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)} \dots$, até que determinado critério de parada seja satisfeito
- O sistema $Ax = b$ é transformado em $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$, $k > 0$, onde C é uma matriz e g um vetor
- Possíveis critérios de parada:
 - máximo erro absoluto ou relativo
 - número de iterações
- Principais métodos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear em sua forma inicial:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

- Isolando a i -ésima incógnita na i -ésima equação:
 - $x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n)/a_{11}$
 - $x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n)/a_{22}$
 - ...
 - $x_n = (b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn}$

Método de Gauss-Jacobi

iteração calculada

iteração anterior

- Dessa forma, seja $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$, onde $k > 1$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Exemplos de critérios de parada:
 - Erro absoluto: $d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$
 - Erro relativo: $d_r^{(k)} = d^{(k)} / (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|) < \varepsilon$

Exemplo

$$10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = -8$$

$$2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0,05 \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} = g$$

escolha
arbitrária

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0,26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,34$$

$$d_r^{(1)} = 0,34 / (\max |x_i^{(1)}|) = 0,1828 > \varepsilon$$

Exemplo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix}$$

$$d_r^{(2)} = 0,12/1,98 = 0,0606 > \varepsilon$$

$$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$$

$$d_r^{(3)} = 0,0324/1,9888 = 0,0163 < \varepsilon$$

Critério das linhas

- Em um método iterativo, a convergência para a solução exata não é garantida: é preciso que o sistema satisfaça alguns requisitos
- Há uma condição suficiente para a convergência do Método de Gauss-Jacobi, conhecido como o *critério das linhas*:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Exemplos

- Considere o exemplo anterior:

$$\begin{array}{lll} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & \longleftarrow & 2+1 < 10 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 & \longleftarrow & 1+1 < 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 & \longleftarrow & 2+3 < 10 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{array}} \right\} \text{Garantia de converg\^encia}$$

- Considere o exemplo abaixo:

$$\begin{array}{lll} x_1 + x_2 = 3 & \longleftarrow & 1 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = -3 & \longleftarrow & 1 < 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{array}} \right\} \text{N\~ao h\~a garantia de converg\^encia}$$

- No entanto, o m\^etodo de Gauss-Jacobi converge neste sistema para a solu\~c\~ao exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
- Isso mostra que o crit\^erio das linhas \u00e9 suficiente, mas n\~ao necess\u00e1rio

Demonstração

- Sejam:
 - $x^* = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
 - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_n]^T$: a k -ésima aproximação de x^*
 - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: erro na k -ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)}_i = 0, 1 \leq i \leq n$
- Sabemos que:
 - $x^*_1 = (b_1 - (a_{12}x^*_2 + a_{13}x^*_3 + \dots + a_{1n}x^*_n))/a_{11}$
 - $x^{(k)}_1 = (b_1 - (a_{12}x^{(k-1)}_2 + a_{13}x^{(k-1)}_3 + \dots + a_{1n}x^{(k-1)}_n))/a_{11}$
- Calculando $e^{(k)}_1 = x^{(k)}_1 - x^*_1$, temos:
 - $e^{(k)}_1 = -(a_{12}e^{(k-1)}_2 + a_{13}e^{(k-1)}_3 + \dots + a_{1n}e^{(k-1)}_n)/a_{11}$
- Analogamente:
 - $e^{(k)}_2 = -(a_{21}e^{(k-1)}_1 + a_{23}e^{(k-1)}_3 + \dots + a_{2n}e^{(k-1)}_n)/a_{22}$
 - $e^{(k)}_n = -(a_{n1}e^{(k-1)}_1 + a_{n2}e^{(k-1)}_2 + \dots + a_{n(n-1)}e^{(k-1)}_{n-1})/a_{nn}$

Demonstração (continuação)

- Sejam:

- $E^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|e^{(k)}_i|\}$

- $\alpha_i = (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}|, 1 \leq i \leq n$
Quando o critério das linhas é satisfeito, $\alpha_i < 1$

- Quando $k \rightarrow \infty$, $x^{(k)} \rightarrow x^*$ é equivalente a $E^{(k)} \rightarrow 0$

- Demonstraremos que $E^{(k)} \leq \alpha \cdot E^{(k-1)}$, onde $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\}$

- Para $1 \leq i \leq n$:

- $e^{(k)}_i = -(a_{i1}e^{(k-1)}_1 + \dots + a_{i(i-1)}e^{(k-1)}_{i-1} + a_{i(i+1)}e^{(k-1)}_{i+1} + \dots + a_{in}e^{(k-1)}_n) / a_{ii}$

- $|e^{(k)}_i| \leq (|a_{i1}| \cdot |e^{(k-1)}_1| + \dots + |a_{i(i-1)}| \cdot |e^{(k-1)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}| \cdot |e^{(k-1)}_{i+1}| + \dots + |a_{in}| \cdot |e^{(k-1)}_n|) / |a_{ii}|$

- $|e^{(k)}_i| \leq (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) \cdot E^{(k-1)} / |a_{ii}|$

- $|e^{(k)}_i| \leq \alpha_i \cdot E^{(k-1)}$

- Portanto, $E^{(k)} \leq \alpha \cdot E^{(k-1)}$

- Consequentemente, $E^{(k)} / E^{(k-1)} \leq \alpha$

Como $\alpha < 1$, então $E^{(k)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$: há convergência!

Mais um exemplo

- Considere o sistema a seguir:


$$\begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 & \longleftarrow & 3+1 > 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 & \longleftarrow & 5+2 > 2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 & \longleftarrow & 6 < 8 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

- No entanto, uma permutação entre as duas primeiras linhas garante a convergência:

$$\begin{array}{lcl} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 & \longleftarrow & 2+2 < 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 & \longleftarrow & 1+1 < 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 & \longleftarrow & 6 < 8 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}} \right\} \text{Garantia de convergência}$$

- Quando o critério das linhas não for satisfeito, convém tentar uma permutação de linhas e/ou colunas

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Seidel

- Analogamente ao Método de Gauss-Jacobi, calcula-se $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- No entanto, utiliza-se no cálculo de $x_i^{(k)}$:
 - valores da iteração anterior: $x_{i+1}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}$
 - valores calculados na mesma iteração: $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$

Exemplo

$$5x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6$$

$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$$

$$\varepsilon = 0,05$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,2 \\ 0,75 & 0 & -0,25 \\ -0,5 & -0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Processo iterativo:

$$x_1^{(k)} = 1 - 0,2x_2^{(k-1)} - 0,2x_3^{(k-1)}$$

$$x_2^{(k)} = 1,5 - 0,75x_1^{(k)} - 0,25x_3^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = -0,5x_1^{(k)} - 0,5x_2^{(k)}$$

Exemplo

$$x_1^{(k)} = 1 - 0,2x_2^{(k-1)} - 0,2x_3^{(k-1)}$$

$$x_2^{(k)} = 1,5 - 0,75x_1^{(k)} - 0,25x_3^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = -0,5x_1^{(k)} - 0,5x_2^{(k)}$$

■ Primeira iteração:

$$x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$x_2^{(1)} = 1,5 - 0,75 \cdot 1 - 0 = 0,75$$

$$x_3^{(1)} = -0,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,75 = -0,875$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,75 \quad d_r^{(1)} = 1 / (\max |x_i^{(1)}|) = 1 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,875$$

Exemplo

$$x_1^{(k)} = 1 - 0,2x_2^{(k-1)} - 0,2x_3^{(k-1)}$$

$$x_2^{(k)} = 1,5 - 0,75x_1^{(k)} - 0,25x_3^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = -0,5x_1^{(k)} - 0,5x_2^{(k)}$$

■ Segunda iteração:

$$x_1^{(2)} = 1 - 0,2 \cdot 0,75 - 0,2 \cdot (-0,875) = 1,025$$

$$x_2^{(2)} = 1,5 - 0,75 \cdot 1,025 - 0,25 \cdot (-0,875) = 0,95$$

$$x_3^{(2)} = -0,5 \cdot 1,025 - 0,5 \cdot 0,95 = -0,9875$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0,025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0,20 \quad d_r^{(2)} = 0,2 / (\max |x_i^{(2)}|) = 0,1951 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0,1125$$

Exemplo

$$x_1^{(k)} = 1 - 0,2x_2^{(k-1)} - 0,2x_3^{(k-1)}$$

$$x_2^{(k)} = 1,5 - 0,75x_1^{(k)} - 0,25x_3^{(k-1)}$$

$$x_3^{(k)} = -0,5x_1^{(k)} - 0,5x_2^{(k)}$$

■ Terceira iteração:

$$x_1^{(3)} = 1 - 0,2 \cdot 0,95 - 0,2 \cdot (-0,9875) = 1,0075$$

$$x_2^{(3)} = 1,5 - 0,75 \cdot 1,0075 - 0,25 \cdot (-0,9875) = 0,9912$$

$$x_3^{(3)} = -0,5 \cdot 1,0075 - 0,5 \cdot 0,9912 = -0,9993$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,0175$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,0412$$

$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0,0118$$

$$d_r^{(3)} = 0,0412 / (\max |x_i^{(3)}|) = 0,0409 < \varepsilon$$

Critério de Sassenfeld

- Sejam os seguintes valores:

$$\beta_1 = \left| \frac{1}{a_{11}} \right| \cdot \sum_{j=2}^n |a_{1j}|$$

$$\beta_i = \left| \frac{1}{a_{ii}} \right| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right], \text{ para } 1 < i \leq n$$

$$\beta = \max \{ \beta_j \}, 1 \leq j \leq n$$

- Se $\beta < 1$, então o Método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$
 - Quanto menor for β , mais rápida será a convergência

Exemplo

$$2x_1 + x_2 - 0,2x_3 + 0,2x_4 = 0,4$$

$$0,6x_1 + 3x_2 - 0,6x_3 - 0,3x_4 = -7,8$$

$$-0,1x_1 - 0,2x_2 + x_3 + 0,2x_4 = 1,0$$

$$0,4x_1 + 1,2x_2 + 0,8x_3 + 4x_4 = -10,0$$

$$\beta_1 = (1 + 0,2 + 0,2)/2 = 0,7$$

$$\beta_2 = (0,6 \cdot 0,7 + 0,6 + 0,3)/3 = 0,44$$

$$\beta_3 = (0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,44 + 0,2)/1 = 0,358$$

$$\beta_4 = (0,4 \cdot 0,7 + 1,2 \cdot 0,44 + 0,8 \cdot 0,358)/4 = 0,2736$$

$$\beta = 0,7 < 1$$

Demonstração

- Sejam:
 - $x^* = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
 - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_n]^T$: a k -ésima aproximação de x^*
 - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: erro na k -ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)}_i = 0, 1 \leq i \leq n$
- No método de Gauss-Seidel, podemos constatar que:
 - $e^{(k)}_1 = -(a_{12}e^{(k-1)}_2 + a_{13}e^{(k-1)}_3 + \dots + a_{1n}e^{(k-1)}_n)/a_{11}$
 - $e^{(k)}_2 = -(a_{21}e^{(k)}_1 + a_{23}e^{(k-1)}_3 + \dots + a_{2n}e^{(k-1)}_n)/a_{22}$
 - $e^{(k)}_n = -(a_{n1}e^{(k)}_1 + a_{n2}e^{(k)}_2 + \dots + a_{n(n-1)}e^{(k)}_{n-1})/a_{nn}$
- Sejam:
 - $E^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|e^{(k)}_i|\}$
 - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|)/|a_{11}|$
 - $\beta_i = (\beta_1 \cdot |a_{i1}| + \dots + \beta_{i-1} \cdot |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|)/|a_{ii}|, 1 < i \leq n$

Demonstração (continuação)

- Quando $k \rightarrow \infty$, $x^{(k)} \rightarrow x^*$ é equivalente a $E^{(k)} \rightarrow 0$
- Demonstraremos por indução no índice i ($1 \leq i \leq n$) que $E^{(k)} \leq \beta \cdot E^{(k-1)}$, onde $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\}$
- Base ($i=1$):
 - $|e^{(k)}_1| \leq (|a_{12}| \cdot |e^{(k-1)}_2| + |a_{13}| \cdot |e^{(k-1)}_3| + \dots + |a_{1n}| \cdot |e^{(k-1)}_n|) / |a_{11}|$
 - $|e^{(k)}_1| \leq [(|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|) / |a_{11}|] \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{|e^{(k-1)}_i|\}$
 - $|e^{(k)}_1| \leq \beta_1 \cdot E^{(k-1)} \leq \beta \cdot E^{(k-1)}$
- Hipótese ($1 < i \leq n$): $|e^{(k)}_{i-1}| \leq \beta_{i-1} \cdot E^{(k-1)} \leq \beta \cdot E^{(k-1)}$
- Passo ($1 < i \leq n$):
 - $|e^{(k)}_i| \leq (|a_{i1}| \cdot |e^{(k)}_1| + \dots + |a_{i(i-1)}| \cdot |e^{(k)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}| \cdot |e^{(k-1)}_{i+1}| + \dots + |a_{in}| \cdot |e^{(k-1)}_n|) / |a_{ii}|$
 - $|e^{(k)}_i| \leq (|a_{i1}| \cdot \beta_1 + \dots + |a_{i(i-1)}| \cdot \beta_{i-1} + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) \cdot E^{(k-1)} / |a_{ii}|$
 - $|e^{(k)}_i| \leq \beta_i \cdot E^{(k-1)} \leq \beta \cdot E^{(k-1)}$
- Portanto, $E^{(k)} / E^{(k-1)} \leq \beta$
- Como $\beta < 1$, então $E^{(k)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$: há convergência!

Exemplos

- Considere o sistema abaixo, anteriormente visto:

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 = -3$$

$$\beta_1 = 1/1 = 1$$

$$\beta_2 = (1.1)/3 = 1/3$$

$$\beta = 1$$

} Não há garantia de convergência

- No entanto, o Método de Gauss-Seidel converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
 - Isso mostra que o critério de Sassenfeld, como o critério das linhas, é suficiente, mas não necessário
- Considere outro sistema:

$$10x_1 + x_2 = 23$$

$$6x_1 - 2x_2 = 18$$

$$\beta_1 = 1/10 = 0,1$$

$$\beta_2 = (6.0,1)/2 = 0,3$$


$$\beta = 0,3 < 1$$

- Neste caso, o critério de Sassenfeld garante a convergência, mas o critério das linhas, não...

Relação entre os critérios

- Se um sistema satisfaz o critério das linhas, então também satisfará o critério de Sassenfeld
- Demonstração:
 - Seja $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\} < 1$,
onde $\alpha_i = (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}|$
 - Vamos provar por indução em i que $\beta_i \leq \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq n$
 - Base ($i=1$):
 - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|) / |a_{11}| = \alpha_1 < 1$
 - Hipótese ($1 < i \leq n$): $\beta_{i-1} \leq \alpha_{i-1} < 1$
 - Passo ($1 < i \leq n$):
 - $\beta_i = (\beta_1 \cdot |a_{i1}| + \dots + \beta_{i-1} \cdot |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}|$
 - $\beta_i \leq (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}| = \alpha_i < 1$
 - Portanto, $\alpha < 1 \Rightarrow \beta < 1$
- A volta nem sempre é verdadeira...

CCI-22



- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- **Considerações finais**

Considerações finais

- Tanto o critério das linhas como o critério de Sassenfeld são condições *suficientes* para a convergência, mas não *necessárias*
- Em sistemas esparsos (com grande número de coeficientes nulos), o Método da Eliminação de Gauss não é apropriado, pois não preserva esta vantajosa qualidade. Nesses casos, *convém utilizar métodos iterativos*
- Os métodos iterativos são menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento

Métodos diretos *versus* iterativos

- **Convergência**
 - Diretos: não faz sentido considerar essa questão, pois calculam a solução exata
 - Iterativos: ocorre sob determinadas condições
- **Esparsidade da matriz de coeficientes**
 - Diretos: alteram a estrutura da matriz
 - Iterativos: utilizam sempre a matriz inicial
- **Erros de arredondamento**
 - Diretos: ocorrem a cada etapa e acumulam-se
 - Iterativos: somente os erros da última etapa afetam a solução