

# CTC – 20

## Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

### Subgrupos

### Definição: fechamento

$(G, *)$  grupo  $\left\{ \begin{array}{l} S \text{ é estável ou fechado se} \\ S \subseteq G \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall a, b \in S \text{ vale } a * b \in S \end{array} \right.$

### Exemplos

Grupo  $(\mathbb{Z}, +)$

Subconjunto  $P =$  inteiros pares.      Estável

Subconjunto  $I =$  inteiros ímpares.      Não é estável.

### Definição: subgrupo

$(S, *)$  é subgrupo de  $(G, *)$

se  $S$  for subconjunto estável de  $G$  e,

com a operação induzida, o próprio  $S$  é um grupo.

### Obs.

Operação induzida: restrição de  $*$  aos elementos de  $S$ .

### Exemplo 1

$(\mathbb{Z}, +)$  é subgrupo de  $(\mathbb{Q}, +)$ , que é subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$ ,  
que é subgrupo de  $(\mathbb{C}, +)$

### Notação

$$H \leq G$$

$H$  é subgrupo de  $G$

### Observação

Todo grupo  $G$  possui 2 subgrupos triviais

$$H_1 = \{ e \}$$

$$H_2 = G$$

### Definição

Se  $\{ e \} < H < G$

$H$  chama-se subgrupo próprio de  $G$ .

### Exemplo 2

$$(Q^*, \cdot) < (IR^*, \cdot) < (C^*, \cdot)$$

### Exemplo 3

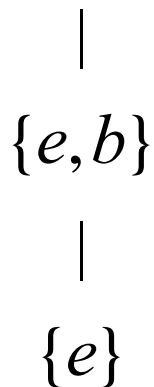
Grupo  $MI_n$  das matrizes  $n \times n$  inversíveis

$H$  : subgrupo das matrizes  $A$  tais que  $\det(A) = 1$ .

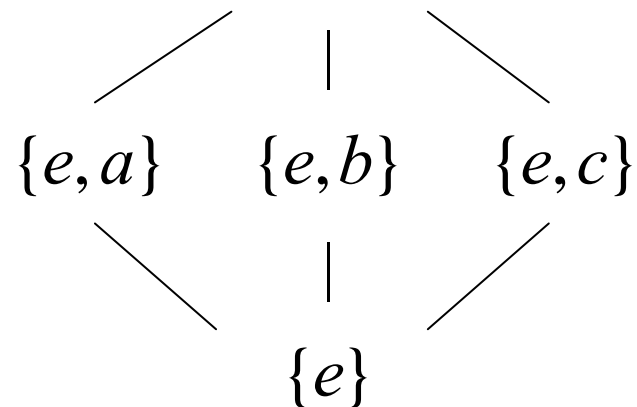
### Exemplo 4

Grupos de ordem 4

(cíclico)



(Klein)



### Teorema

Um subconjunto  $H$  de um grupo  $G$   
é subgrupo de  $G$  se e somente se

- (1)  $H$  é fechado com a “mesma” operação de  $G$
- (2)  $e \in H$
- (3)  $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$