Lista de Exercícios CT-200 – Primeiro Bimestre 2010

Carlos Henrique Quartucci Forster
Estagiário: Wesley Telles

Revisão de Teoria de Conjuntos

1. Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{x, y, z\}$. Quais os elementos dos conjuntos:
a) $A \times B \times A$
b) 2^B
c) A^2
d) o conjunto de todas as possíveis partições de A
e) $\{p \in 2^B \mid |p| \in A\}$

2. Dê exemplos de uma relação:
a) que seja simétrica e reflexiva, mas não transitiva
b) que seja reflexiva e transitiva, mas não simétrica
c) que seja simétrica e transitiva, mas não reflexiva

3. Dê exemplos de uma função:
a) que seja injetora, mas não sobrejetora
b) que seja sobrejetora, mas não injetora

4. Mostrar que o conjunto dos inteiros é contável.

5. Mostrar que o conjunto das funções f: N $\rightarrow$ N é incontável.
Dica: considerar a função f(n) = fn(n)+1

6. Quantas partições existem para o conjunto {1, 2, 3, 4}?

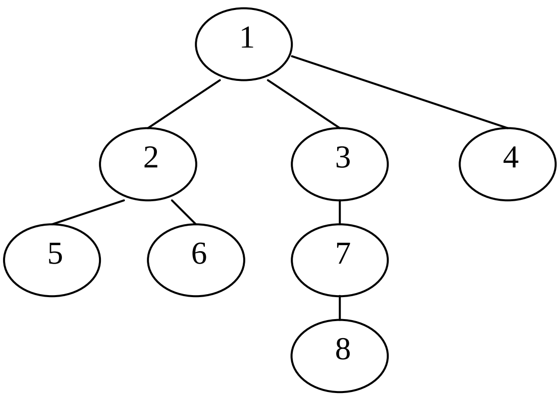
7. Quantas relações de equivalência distintas podem ser definidas para o conjunto {1, 2, 3, 4, 5}?

8. Listar ou descrever os elementos dos conjuntos definidos abaixo.
a) $A = \left\{ X \in 2^{\{1,2,3,4\}} \,\middle|\, \sum_{i \in X} i = 5 \right\}$

b) $B = \{x \in \mathrm{N} \mid \exists\, y \in \mathrm{N}, 3y + 1 = x\}$

c) $C = \{a, b\}(\{c, d\}^* \cup \{a\}^*)$

d) D é o fecho transitivo da relação R.
R é definida como a relação "é pai de"
na árvore ao lado, onde o nó 1 é o nó raiz.



9. Qual o problema com a seguinte demonstração:

Num conjunto de *h* cavalos, todos têm a mesma cor.

Base da indução: No caso *h*=1 fica claro que todos têm a mesma cor.

Passo indutivo: Assumir verdadeira a hipótese de que num conjunto de *h* cavalos todos têm a mesma cor. Provar para um conjunto de *h*+1 cavalos. Considere o conjunto H_1 como o conjunto H com um cavalo removido. Pela hipótese da indução, todos cavalos de H_1 têm a mesma cor. Agora retorne o cavalo removido e remova algum outro, formando o conjunto H_2. Novamente, todos os cavalos de H_2 têm a mesma cor e fica provado que todos os cavalos de H têm a mesma cor.

Linguagens

10. Considere o alfabeto $\sum = \{a\}$. Descubra se $\sum^*$ é contável.

11. Considere o alfabeto $\sum = \{a,b\}$. Descubra se $\sum^*$ é contável.

12. Existe linguagem de $\sum^*$ com $\sum$ finito que não seja contável?

13. O conjunto de todas as linguagens de $\sum^*$ é contável? Responda intuitivamente.

14. Verifique se o conjunto das cadeias de comprimento infinito sobre o alfabeto $\sum = \{a,b\}$ é contável.

15. Listar os elementos (até comprimento 3, inclusive) da linguagem L descrita recursivamente como:

(a) $\varepsilon \in L$, $\mathrm{a} \in L \; (\forall\, \mathrm{a} \in \{1,2,3\})$

(b) $\mathrm{a}\, w\, \mathrm{b} \in L \; (\forall w \in L, \forall\, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \{1,2,3\} \; e \; \mathrm{a} < \mathrm{b})$

(c) L contém apenas elementos obtidos dos elementos descritos em (a) a partir da aplicação de um número finito de vezes do passo (b).

16. Escreva a descrição formal usando notação de conjunto e recursividade para as seguintes linguagens:

(a) todas cadeias de comprimento *l* sobre o alfabeto {a, b}.

(b) todas cadeias de comprimento menor que *l* sobre o alfabeto {a, b}.

(c) todas cadeias da linguagem: $L_{ij} = \{a^i\, b^j\}$ com *i* e *j* dados e suas permutas.

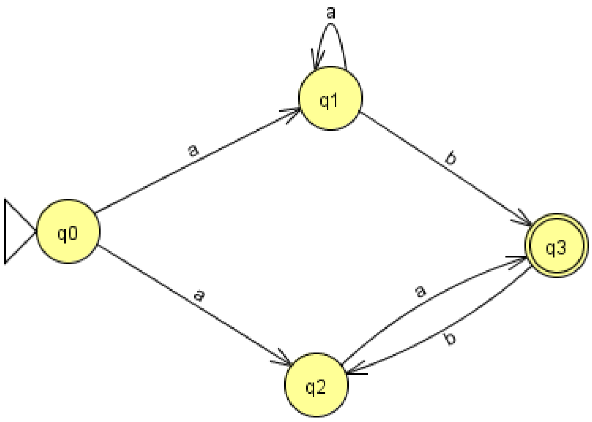
17. Construa uma função recursiva numa linguagem de programação para testar se uma sub-cadeia de caracteres forma um palíndromo. A função deve retornar verdadeiro ou falso e realizar uma chamada a si própria passando a cadeia original e os índices inicial e final da sub-cadeia a ser analisada.

18. Construa para cada item abaixo uma expressão regular que represente a linguagem descrita

a) Toda cadeia sobre o alfabeto {**a**,**b**} de tamanho maior ou igual a 3.

b) Toda cadeia sobre {**c**,**d**} que não contém a subcadeia **cc** e nem comece com **dcd**.

c) Toda cadeia sobre {**a**,**b**} aceita pelo autômato abaixo.



Autômatos finitos

19. Verifique se as cadeias **aaaa**, **abab** e **bbaa** são aceitas pelos autômatos definidos a seguir.

a) M=(Q,∑,δ,q0,F), Q={q1,q2}, ∑={a,b}, q0=q1, F={q2}

δ	a	b
q1	q1	q2
q2	q1	q2

b) M=(Q,∑,δ,q0,F), Q={s,r1,r2,q1,q2}, ∑={a,b}, q0=s, F={q1,r1}

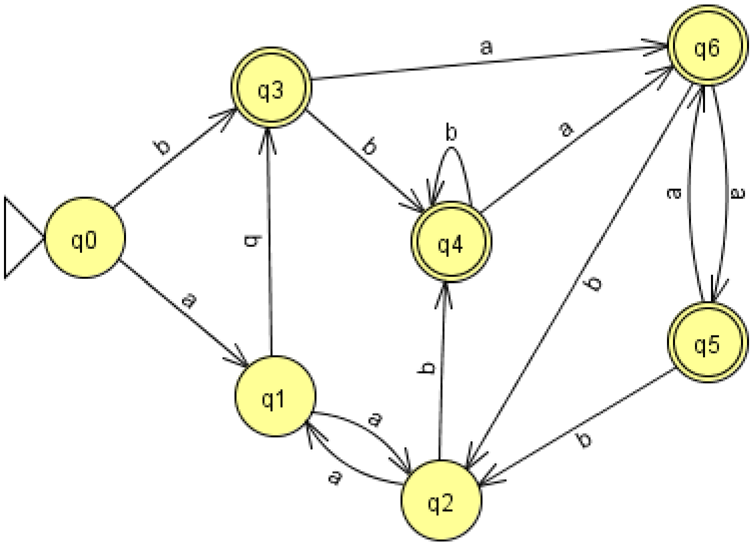
δ	a	b
s	q1	r1
r1	r2	r1
r2	r2	r1
q1	q1	q2
q2	q1	q2

c) M=(Q,∑,δ,q0,F), Q={q0,q1,q2,q3,q4}, ∑={a,b}, q0=q0, F={q2,q4}

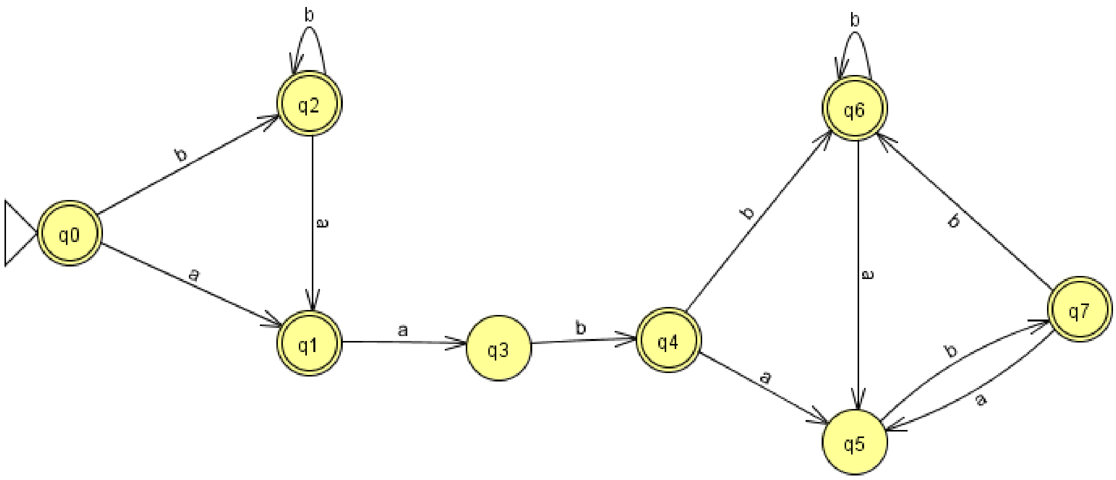
δ	a	b
q0	{q0,q1}	{q0,q3}
q1	{q2}	Ø
q2	{q2}	{q2}
q3	Ø	{q4}
q4	{q4}	{q4}

20. Verificar se L={a^n b^m a^n | n>0, m>0}é uma linguagem regular.
(Provar que existem infinitas classes de strings “indistinguíveis”)

21. Encontre um autômato finito determinístico com o menor número de estados possível que aceite a mesma linguagem do seguinte autômato. Deixe claro quais são as classes de equivalências dos estados.



22. Encontrar o DFA mínimo



23. Encontrar o DFA mínimo que aceita apenas cadeias que contenham uma sub-cadeia “abba”.

24. Encontrar o DFA mínimo que aceita apenas cadeias que não contenham nenhuma subcadeia “abba”.

25. Construa um autômato finito determinístico que aceite a linguagem definida pela expressão regular **(ab)*(aba U bab)**.

26. Esboce uma prova de que a seguinte linguagem L sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, \wedge, \vee, (,)\}$ não é regular.

i) $a \in L$.

ii) Se $x \in L$ e $y \in L$, então $x \vee y \in L$ e $x \wedge y \in L$.

iii) Se $x \in L$, então $(x) \in L$.

iv) Só pertencem a L as cadeias construídas pela aplicação de um número finito de vezes as regras (ii) e (iii) a partir dos elementos definidos em (i).

27. Construa um autômato finito determinístico que aceite apenas as cadeias do alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$ para as quais a quantidade de 1 é múltipla de 3 (inclusive zero ocorrências) e que não tenha dois ou mais 0s em seqüência. Mostre que o autômato projetado é mínimo.

28. A linguagem $\left\{ a^i b^j \middle| \text{ i é par} \leftrightarrow \text{j é par} \right\}$ é regular?

Se sim, construir um autômato que a aceite e uma expressão regular que a represente. Se não, demonstrar que não o é.

Gramáticas

29. Para a gramática

S → abSc|A
A → cAd|cd
(a) encontrar uma árvore de derivação para *ababccddcc*
(b) escrever a linguagem gerada em notação de conjunto

30. Para a gramática

S → ASB|ε
A → aAb|ε
B → bBa|ba
(a) derivação mais-à-esquerda para a cadeia aabbabbabbaa
(b) derivação mais-à-direita para a mesma cadeia
(c) linguagem em notação de conjunto