CES-11

Algoritmos e Estruturas de Dados

Carlos Alberto Alonso Sanches
Juliana de Melo Bezerra

CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

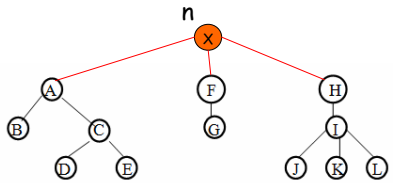
Operações sobre uma árvore

`node` é o tipo correspondente a um vértice da árvore

- **`node Pai (n,A)`**
  Retorna o pai do nó n da árvore A
  - Se n é raiz, `Pai` é NULL
- **`node FilhoEsquerdo (n,A)`**
  Retorna o filho esquerdo do nó n da árvore A
  - Se n é folha, `FilhoEsquerdo` é NULL
- **`node IrmaoDireito (n,A)`**
  Retorna o irmão direito do nó n na árvore A
  - Se n é caçula, `IrmãoDireito` é NULL
- **`logic Cacula (n,A)`**
  Verifica se o nó n é caçula na árvore A

Operações sobre uma árvore

- **`char Elemento (n,A)`**
  Retorna as informações do nó n da árvore A
  - Neste exemplo, os nós armazem um caractere, mas poderiam ter qualquer outra informação, ou mesmo nenhuma
- **`arvore Criacao (x,ListaArvores)`**
  Coloca a informação x num novo nó n e cria uma árvore com raiz n e sub-árvores de **`ListaArvores`** (uma lista linear de árvores)



Operações sobre uma árvore

- **`node Raiz (A)`**
  Retorna o nó raiz da árvore A
- **`void Esvaziar (A)`**
  Torna vazia a árvore A
- **`logic Vazia (A)`**
  Verifica se a árvore A é vazia

- As estruturas de dados utilizadas no armazenamento da árvore terão um claro impacto na eficiência das suas operações.

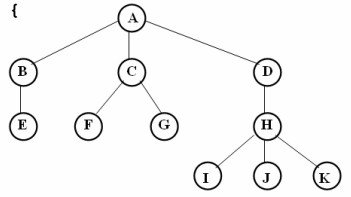
Operações sobre uma árvore

- Há ainda várias outras operações que poderiam ser definidas:
  - Alterar o conteúdo de um nó
  - Tornar um novo nó caçula de outro nó
  - Fazer com que uma árvore se torne sub-árvore de um nó de outra árvore
  - Eliminar uma sub-árvore de um nó
  - Eliminar um nó de uma árvore (mais complicado se não for folha)
  - Inserir um nó numa determinada posição de uma árvore
  - etc.

Operações sobre uma árvore

- Exemplo 1: ordenação pré-ordem

```
void PreOrdem (node n, arvore A) {
   node c;
   Escrever (Elemento (n, A));
   c = FilhoEsquerdo (n, A);
   while (c != NULL)  {
        PreOrdem (c, A);
        c = IrmaoDireito (c, A);
   }
}
```



`PreOrdem (Raiz (A), A)`

Operações sobre uma árvore

- Exemplo 2: cálculo da altura de uma árvore A
- Definição recursiva da altura de um nó n:
  - Se n é NULL, Altura (n) = -1;
  - Senão, se n é folha, Altura (n) = 0;
  - Senão: Altura (n) = 1 + máx (alturas dos filhos de n)

`Altura (Raiz (A), A)`

Operações sobre uma árvore

- Exemplo 2: cálculo da altura de uma árvore A

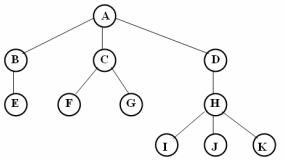
```
int Altura (node n, arvore A) {
   int maxalt, aux; node f;
   if (n == NULL) return -1;
   f = FilhoEsquerdo (n, A);
   if (f == NULL) return 0;
   for (maxalt = 0; f != NULL; f = IrmaoDireito (f, A)) {
        aux = Altura (f, A);
        if (aux > maxalt) maxalt = aux;
   }
    return maxalt + 1;
}
```

CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

Contígua

- Os nós são armazenados num vetor, numa ordem convencionada (pré-ordem, por exemplo)
- `node` é um índice no vetor de células



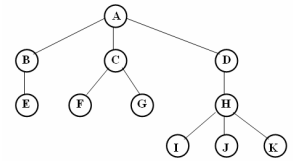
Propositalmente vazio, a fim de começar com nó 1

Elementos — Celula

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
info	#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	
grau	#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	11 ncel
node													

Contígua

```
const int max = 100;
typedef int node;
struct celula {
       char info;
       int grau;};
struct arvore {
       celula Elementos[101];
       int ncel;};
```



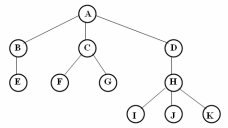
Elementos — Celula

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

11 ncel

Contígua

```
node Raiz (arvore A) {
  if (A.ncel == 0) return NULL;
  return 1;
}
logic Vazia (arvore A) {
      if (A.ncel == 0) return TRUE;
      else return FALSE;
}
void Esvaziar (arvore *A) {A->ncel = 0;}
```



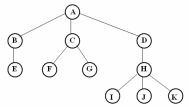
Elementos

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

11 ncel

Contígua

```
char Elemento (node n, arvore A) {
      if (n <= 0 || n > A.ncel) //ERRO
      return A.Elementos[n].info;
}

node FilhoEsquerdo (node n, arvore A) {
  if (n <= 0 || n > A.ncel) //ERRO;
  if (A.Elementos[n].grau == 0) return NULL;
  else return n + 1;
}
```



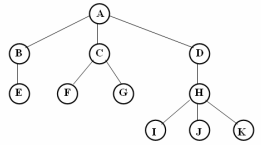
Elementos

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

11 ncel

Contígua

- Como encontrar o pai de um nó?
- Exemplo: pai do nó 7 é o nó 1
- O pai de **n** é um nó que está à sua esquerda
- Entre **n** e seu pai, estão todos os irmãos de **n** mais à esquerda com seus respectivos descendentes
- O algoritmo não é imediato...



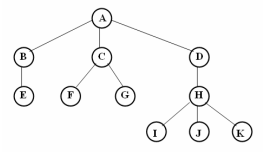
Elementos

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

11 ncel

Contígua

- Como encontrar o irmão direito de um nó?
- Exemplo: o irmão direito do nó 4 é o nó 7
- Se **n** não for caçula, seu irmão direito é um nó que está à sua direita
- Entre **n** e seu irmão direito estão todos os seus descendentes próprios
- O algoritmo também não é imediato...



Elementos

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

11 ncel

Contígua

- Pontos fortes
  - Gasta relativamente pouca memória
  - Serve para armazenamento permanente
- Ponto fraco
  - Possui operações ineficientes

Elementos

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

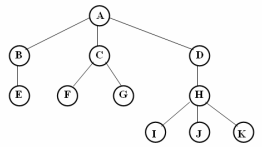
11 ncel

CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

Contígua melhorada

- A estrutura contígua pode ser melhorada, incluindo-se nas células informações de caráter operacional
  - Concretamente: acesso ao pai de cada nó



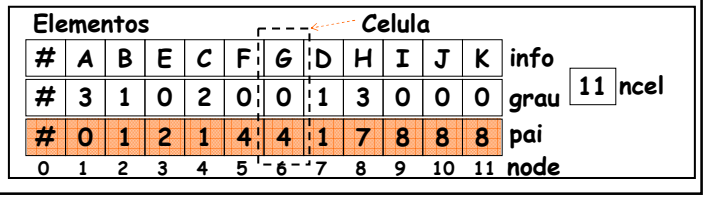
Elementos **Celula**

#	A	B	E	C	F	G	D	H	I	J	K	info
#	3	1	0	2	0	0	1	3	0	0	0	grau
#	0	1	2	1	4	4	1	7	8	8	8	pai
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	node

11 ncel

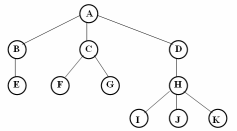
Contígua melhorada

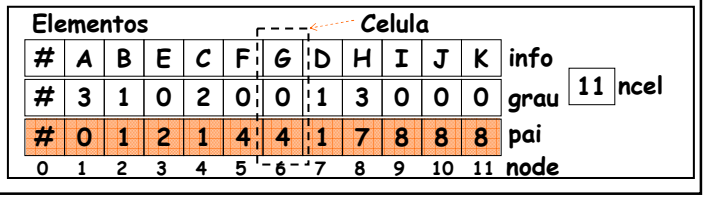
```
const int max = 100;
typedef int node;
struct celula  {char info; int grau, pai;};
struct arvore {celula Elementos [101]; int ncel;};
```



Contígua melhorada

- Quem é o **pai** de um nó?
  - Exemplo: pai do nó 7 é o nó 1
  - Agora é elementar: a informação já consta na célula
- Quem é o **irmão direito** de um nó?
  - Exemplo: irmão direito do nó 4 é o nó 7
  - Basta encontrar o primeiro nó à sua direita que tenha o mesmo pai



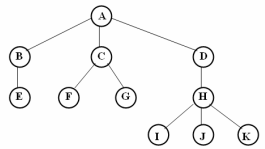


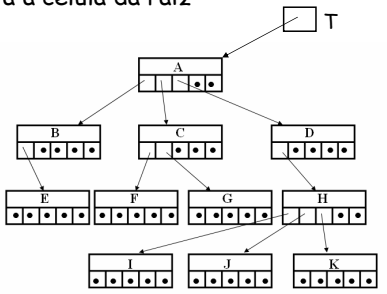
CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

Encadeada direta

- Declarações:
  - **Nó:** ponteiro para célula
  - **Árvore:** ponteiro para a célula da raiz

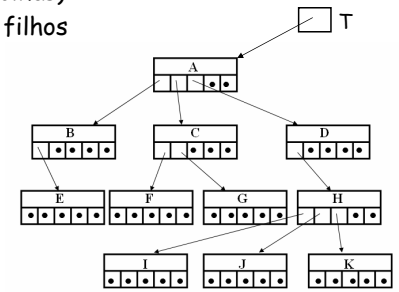




Encadeada direta

- Pontos fracos:
  - Usa muitos ponteiros desnecessários (por exemplo, nas folhas)
  - Limita o número de filhos

```
const int MaxFil = 5;
typedef celula *node;
typedef celula *arvore;
struct celula {
   char info;
   node filhos[MaxFil];
};
arvore T;
```

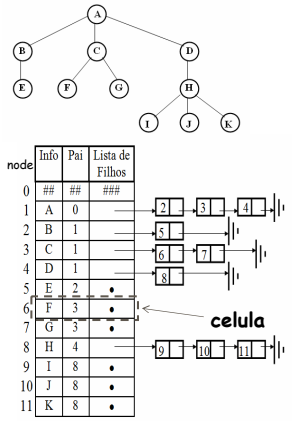


CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

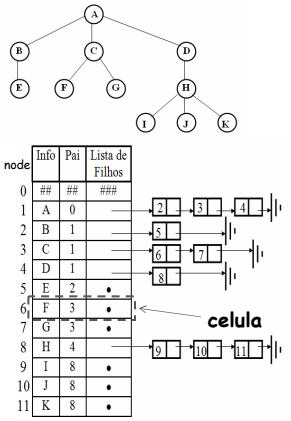
Lista de filhos

- Nó: índice num vetor de células
  - Os nós podem ficar em qualquer posição no vetor, sem seguir qualquer ordenação
  - A raiz não precisa ficar necessariamente no nó 1
- Filhos: ordenados da esquerda para a direita numa lista
  - Estrutura das listas: contígua, encadeada, etc.



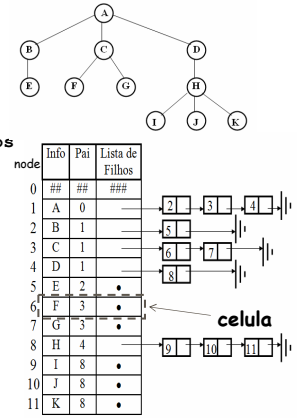
Lista de filhos

```
typedef int node;
typedef celfilho *lista;
typedef celfilho *posicao;
struct celfilho  {
       node filho;
       celfilho *prox;
};
struct celula {
       char info;
       node pai;
       lista listaFilhos;
};
struct arvore  {
       node raiz;
       celula Elementos[51];
       int ncel;
};
```



Lista de filhos

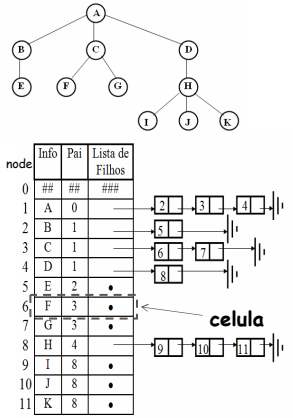
```
node raiz (arvore A) {
   if (A.ncel == 0) return NULL;
   return A.raiz;
}

void Esvaziar (arvore *A){
  //Liberar todas as células de filhos
  A->raiz = NULL;
  A->ncel = 0;
}


char Elemento (node n, arvore A) {
  return A.Elementos[n].info;
}
```



Lista de filhos

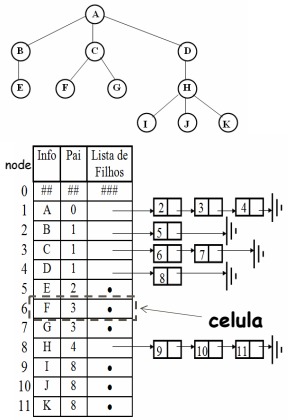
```
node Pai (node n, arvore A) {
       return A.Elementos[n].pai;
}
```

```
node FilhoEsquerdo (node n, arvore A) {
  if (A.Elementos[n].listaFilhos==NULL)
     return NULL;
  else return
     A.Elementos[n].listaFilhos->filho;
}
```



Lista de filhos

```
node IrmaoDireito (node n, arvore A)
{
   node pai; posicao idir, p;
   if (n == A.raiz) return NULL;
   pai = A.Elementos[n].pai;
   p = A.Elementos[pai].listaFilhos;
   while (p->filho != n)
      p = p->prox;
   idir = p->prox;
   if (idir == NULL) return NULL;
   else return idir->filho;
}
```



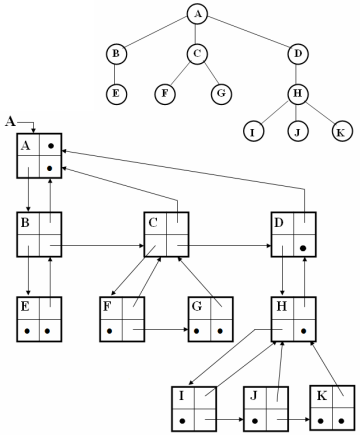
CES-11

- Árvores
  - Operações sobre uma árvore
  - Estruturas para armazenar árvores
    - Contígua
    - Contígua melhorada
    - Encadeada direta
    - Listas de filhos
    - Encadeamento de pais e irmãos

Encadeamento de pais e irmãos

Célula

info	pai
fesq	idir

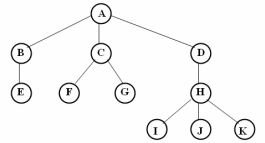



```
typedef celula *node;
typedef celula *arvore;

struct celula {
   char info;
   node pai, fesq, idir;
};
arvore A1, A2, A3;
```

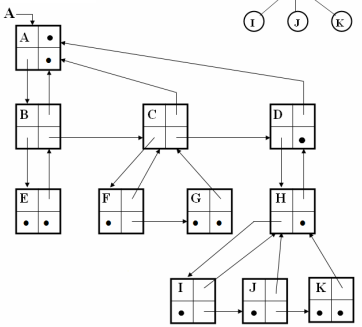
Encadeamento de pais e irmãos

Célula

info	pai
fesq	idir



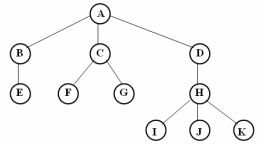

```
FilhoEsquerdo (node n,arvore A)
   n->fesq

IrmaoDireito (node n,arvore A)
   n->idir

Elemento (node n,arvore A)
   n->info

Pai(node n,arvore A)
   n->pai

Raiz (arvore A)
   return A
```



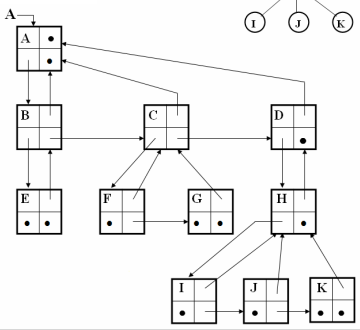
Encadeamento de pais e irmãos

Célula

info	pai
fesq	idir

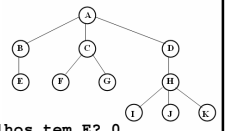



```
void Esvaziar (node *n) {
   if (n->fesq == NULL
   && n->idir == NULL)
      free (*n);
   else if (n->idir == NULL) {
      Esvaziar ((*n)->fesq);
      free (*n);
   }
   else {
       Esvaziar ((*n)->idir);
       if ((*n)->fesq != NULL)
          Esvaziar ((*n)->fesq);
          free (*n);
       }
       *n = NULL;
}
```



Encadeamento de pais e irmãos

- Leitura iterativa de uma árvore



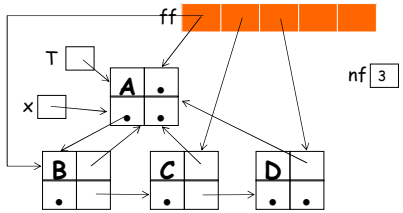

```
A arvore tem raiz? (s/n): s

Digite a informacao da raiz: A

Quantos filhos tem A? 3
1o filho de A: B
2o filho de A: C
3o filho de A: D

Quantos filhos tem B? 1
1o filho de B: E

Quantos filhos tem C? 2
1o filho de C: F
2o filho de C: G

Quantos filhos tem D? 1
1o filho de D: H

Quantos filhos tem E? 0

Quantos filhos tem F? 0

Quantos filhos tem G? 0

Quantos filhos tem H? 3
1o filho de H: I
2o filho de H: J
3o filho de H: K

Quantos filhos tem I? 0

Quantos filhos tem J? 0

Quantos filhos tem K? 0
```

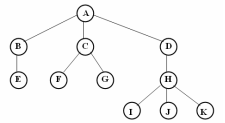
Encadeamento de pais e irmãos

- Leitura iterativa de uma árvore
  - Ideia (semelhante ao percurso em largura): usar uma fila **ff** para guardar os nós já introduzidos na estrutura, para os quais não se indagou ainda sobre o número e o nome de seus filhos
  - Perguntar pela raiz, alocando-a e colocando-a em **ff**

Encadeamento de pais e irmãos

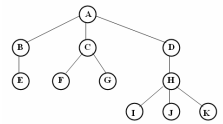
- Leitura iterativa de uma árvore
  - Enquanto fila **ff** não vazia:
    - Eliminar o primeiro elemento de **ff** e copiá-lo no nó avulso **x**
    - Perguntar quantos filhos tem este nó, guardando em **nf**
    - Alocar cada filho na árvore e colocá-lo também na fila **ff**





Encadeamento de pais e irmãos

- Leitura iterativa de uma árvore
  - *O loop* na fila **ff** continua até esvaziá-la, pois assim todos os nós da árvore serão armazenados.
    - Código em C fica como exercício.
- Uma forma mais elegante de armazenar uma árvore é receber como entrada a sua forma parentética
  - Ex: (A (B (E)) (C (F) (G)) (D (H (I) (J) (K))))



Fim