CES-11

Algoritmos e Estruturas de Dados

Noções de complexidade de algoritmos

Carlos Forster
Carlos Alonso
Juliana Bezerra

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação *O*
  - Exercícios

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação *O*
  - Exercícios

Complexidade de algoritmos

- Importância de análise de algoritmos
  - Um **mesmo problema** pode, em muitos casos, ser resolvido por **vários algoritmos**.
  - Nesse caso, qual algoritmo deve ser o escolhido?
- **Critério 1**: fácil compreensão, codificação e correção
  - Geralmente, são algoritmos ineficientes
  - Este critério seria adequado se o algoritmo fosse executado poucas vezes:
    Custo de programação (Cp) > Custo de execução (Ce)

Complexidade de algoritmos

- **Critério 2: eficiência** no uso dos recursos computacionais e rapidez na execução
  - Geralmente, são algoritmos mais complicados
  - Critério mais adequado para o caso de algoritmos muito utilizados (Cp < Ce)
- **Medição de eficiência:** uso de memória e tempo de execução
  - Nesta disciplina, a ênfase é dada para algoritmos eficientes no **tempo de execução**.
  - Há muitos casos em que algoritmos simples **não** são executados em **tempo viável**

Complexidade de algoritmos

- **Exemplo:** Regra de Cramer para a solução de sistemas de equações lineares

$$\begin{aligned} A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 + \ldots + A_{1n}\,x_n &= B_1 \\ A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 + \ldots + A_{2n}\,x_n &= B_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad &\vdots \\ A_{n1}\,x_1 + A_{n2}\,x_2 + \ldots + A_{nn}\,x_n &= B_n \end{aligned}$$

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Complexidade de algoritmos

- Considerando n = 20, quantos determinantes seriam calculados?
  - 20 para os numeradores e 1 para o denominador

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \ldots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Complexidade de algoritmos

- Cálculo do número m de multiplicações:

multiplicações

$21\ \det_{20} = 21\ (\ 20m + 20\ \det_{19}\ )$
$= 21\ (\ 20m + 20\ (\ 19m + 19\ \det_{18}\ ))$
$= 21\ (\ 20m + 20\ (\ 19m + 19\ (\ 18m + 18\ \det_{17}\ )))$
$= 21\ (\ 20m + 20\ (\ 19m + 19\ (\ 18m + 18\ (\ 17m +$
$17\ (\ldots.\ (\ 3m + 3\ (\ 2m\ )\ldots.)))))$

Lembrando que:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & :: & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \cdot detA_{-i,-j}$$

Complexidade de algoritmos

= 21 (20m + 20 (19m + 19 (18m + 18 (17m +
17 (.... (3m + 3 (2m)....)))))

= m (2 x 3 x 4 x 5 x .... x 20 x 21 +
+ 3 x 4 x 5 x .... x 20 x 21 +
+ 4 x 5 x .... x 20 x 21 +
+ 5 x .... x 20 x 21 +
: :
+ 19 x 20 x 21 +
+ 20 x 21)

$$21!\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.+\frac{1}{19!}\right) \cong 8.778\,x\ 10^{19}\ \text{multiplicações}$$

Complexidade de algoritmos

$$21!\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots.+\frac{1}{19!}\right) \cong 8.778\,x\ 10^{19}\ \text{multiplicações}$$

- Utilizando um supercomputador atual:
  - 10^{11} multiplicações por segundo
  - Tempo gasto: 8,778 x 10^8 s = 27,8 anos!
- Um algoritmo mais eficiente é o *Método da Eliminação de Gauss*
  - 209 divisões + 2850 multiplicações

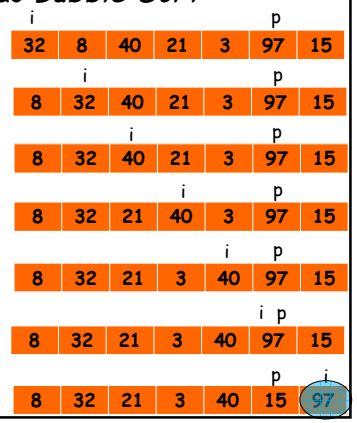
CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação *O*
  - Exercícios

Avaliação do tempo de execução

- Ex: método de ordenação *Bubble-Sort*

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, aux, trocou;
   p = n - 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {
          if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i];
               A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux;
               trocou = TRUE;
          }
          i = i + 1;
       }
       p = p - 1;    } }
```



Avaliação do tempo de execução

- Ex: método de ordenação *Bubble-Sort*

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, aux, trocou;
   p = n - 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {
          if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i];
               A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux;
               trocou = TRUE;
          }
          i = i + 1;
       }
       p = p - 1;    } }
```

i						p
8	32	21	3	40	15	97
	i					p
8	32	21	3	40	15	97
		i				p
8	21	32	3	40	15	97
			i			p
8	21	3	32	40	15	97
				i		p
8	21	3	32	40	15	97
					p	i
8	21	3	32	15	40	97
			...			
3	8	15	21	32	40	97

Avaliação do tempo de execução

Operação	Tempo(ns)	Operação	Tempo(ns)	Operação	Tempo(ns)
Atrib int	1	+ - < <== int	2	+ - < <== float	15
Atrib float	2	&&	1,5	[ ]	8
* int	5	* float	20		
/ int	8	/ float	30		

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {        4 ns
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;              3,5 ns
   while (p >= 1 && trocou) {             2 ns
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {                   2 ns
          if (A[i] > A[i+1]) {            33 ns
               aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux; trocou = TRUE;   43 ns
          }
          i = i + 1;                      3 ns
       }
       p = p - 1;    } }                 3 ns
```

Obs: supomos que vetor `A` contém números do tipo `float`

Mas quantas vezes cada trecho será executado?

Avaliação do tempo de execução

- Análise do pior caso
  - Ocorrerá quando o teste do `if` for sempre verdadeiro
  - O que isso significa isso? Vetor em ordem decrescente

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {        4 ns  executado 1 vez
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;              3,5 ns executado n vezes
   while (p >= 1 && trocou) {             2 ns  executado n-1 vezes
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {                   2 ns  executado p+1 vezes a cada iteração do while externo
          if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux; trocou = TRUE;   79 ns  executado p vezes a cada iteração do while externo
          }
          i = i + 1;
       }
       p = p - 1;    } }                 3 ns  executado n-1 vezes
```

Avaliação do tempo de execução

- Análise do pior caso
  - Ocorrerá quando o teste do `if` for sempre verdadeiro
  - O que isso significa isso? Vetor em ordem decrescente

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {        4 ns  executado 1 vez
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;              3,5 ns executado n vezes
   while (p >= 1 && trocou) {             2 ns  executado n-1 vezes
      trocou = FALSE; i = 1;
       while (i <= p) {                   2 ns  Total = n + (n-1) + ... + 3 + 2
          if (A[i] > A[i+1]) {
               aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
               A[i+1] = aux; trocou = TRUE;   79 ns  Total = (n-1) + ... + 3 + 2 + 1
          }
          i = i + 1;
       }
       p = p - 1;    } }                 3 ns  executado n-1 vezes
```

Avaliação do tempo de execução

T(n) = 4 + 3,5n + 2(n-1) +
2 (n + (n-1) + . . . + 3 + 2) +
79 ((n-1) + (n-2) + . . . + 2 + 1) + 3(n-1)

```
void BubbleSort (int n, vetor A) {
   int i, p, trocou; float aux;
   p = n - 1; trocou = TRUE;
   while (p >= 1 && trocou) {
      trocou = FALSE; i = 1;
      while (i <= p) {
         if (A[i] > A[i+1]) {
              aux = A[i]; A[i] = A[i+1];
              A[i+1] = aux; trocou = TRUE;
         }
         i = i + 1;
      }
      p = p - 1;
   } }
```

4 ns executado 1 vez

3,5 ns executado n vezes

2 ns executado n-1 vezes

2 ns Total = n + (n-1) + ... + 3 + 2

79 ns Total = (n-1) + ... + 3 + 2 + 1

3 ns executado n-1 vezes

Avaliação do tempo de execução

- Pior caso do *Bubble-Sort*:

T(n) = 4 + 3,5n + 2(n-1) +
2 (n + (n-1) + . . . + 3 + 2) +
79 ((n-1) + (n-2) + . . . + 2 + 1) + 3(n-1)

$T(n) = 40{,}5n^2 - 30n - 3$

- Quando n aumenta indefinidamente, o termo com n^2 predomina sobre os demais
- T(n) é proporcional a n^2
- Também há casos melhores: nem todos os testes do comando `if` são sempre verdadeiros

Avaliação do tempo de execução

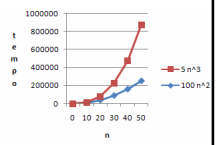
- Casos mais estudados:
  - Pior caso
  - Caso médio
- Razões para estudar o pior caso:
  - O tempo de execução do pior caso de um algoritmo é o *limite superior* do tempo de execução para uma entrada qualquer.
  - Para alguns algoritmos, o pior caso ocorre com bastante frequência.
  - Geralmente, o caso médio não é fácil de ser calculado. Várias vezes, ele é quase tão ruim quanto o pior caso.

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação *O*
  - Exercícios

Razão de crescimento desse tempo

- Ex1: Sejam A1 e A2 dois algoritmos que resolvem o mesmo problema, e com os respectivos tempos de execução:
  - $T_1(n) = 100n^2$
  - $T_2(n) = 5n^3$

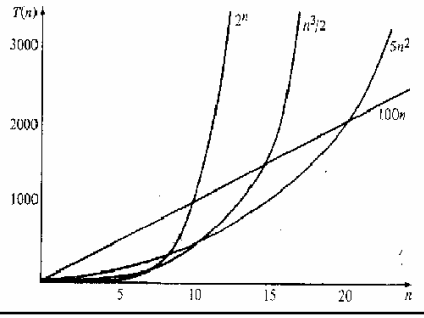


- Qual desses algoritmos é o melhor?
  - Dependerá do valor de n
    - Empate: $100n^2 = 5n^3 \Rightarrow n = 20$
    - Para $n < 20$, A2 é melhor
    - Para $n > 20$, A1 é melhor

A1 é considerado o melhor

Razão de crescimento desse tempo

- Ex2: Considere 4 algoritmos que resolvem o mesmo problema de tamanho n.
- Abaixo, seus respectivos tempos de execução:
  - $T_1(n) = 100n$
  - $T_2(n) = 5n^2$
  - $T_3(n) = n^3/2$
  - $T_4(n) = 2^n$



Razão de crescimento desse tempo

- Suponha que esse problema precise ser resolvido em no máximo 1.000 segundos.

T(n)	n para 10^3 seg
100n	10
$5n^2$	14,14
$n^3/2$	12,60
2^n	9,97

- Os problemas solucionáveis pelos 4 algoritmos têm tamanho da mesma ordem de magnitude (em torno de 10).

Razão de crescimento desse tempo

- Considerando uma outra máquina, elevemos esse tempo para 10.000 segundos.

T(n)	n para 10^3 seg	n para 10^4 seg	Ganho
100n	10	100	10
$5n^2$	14,14	44,72	3,16
$n^3/3$	12,60	27,14	2,15
2^n	9,97	13,28	1,33

- Repare que o algoritmo 4 só poderá resolver um problema **1,33 vezes** maior...

CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação *O*
  - Exercícios

Notação *O*

- Seja o tempo de execução de um algoritmo igual a uma somatória de termos (funções do tamanho da entrada):
  - $T_1(n) = c_1.n^3 + c_2.n^2 + c_3.n + c_4$
  - $T_2(n) = 2^n + n^3/2 + 5n^2 + 100n$

$T_1(n) = O(n^3)$

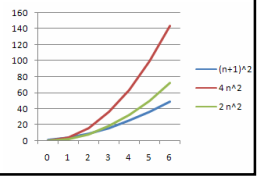
$T_2(n) = O(2^n)$

- À medida que **n** aumenta indefinidamente, um dos termos passa a ter domínio sobre os demais:
  - **$T_1(n)$** é proporcional a **n^3: é da ordem de n^3**
  - **$T_2(n)$** é proporcional a **2^n: é da ordem de 2^n**

Notação *O*

- **Definição: T(n) = *O* (f(n))** , ou seja, **T(n)** é da ordem de **f(n)** se e somente se existirem **constantes positivas c** e **n_0** tais que, para qualquer **$n \geq n_0$**, **$T(n) \leq c.f(n)$**
- Ex1: $T(n) = (n+1)^2 = O(n^2)$
  - **$(n+1)^2 \leq 4n^2$**, $n \geq 1$ (basta escolher $n_o = 1$ e $c = 4$)
  - Poderia ser c = 2? Sim, mas $n_0 = 3$

n	0	1	2	3	4	5
$(n+1)^2$	1	4	9	16	25	36
$4n^2$	0	4	16	36	64	100
$2n^2$	0	2	8	18	32	50



Notação *O*

- Ex2: Pior caso do *Bublle-Sort*

  $T(n) = 40{,}5n^2 - 30n - 3 = O(n^2)$
  - **$T(n) \leq 40{,}5n^2$** (sendo $n_o = 1$ e $c = 40{,}5$)
- Ex3: Seja T(n) o polinômio de grau $p \in N^+$, onde $a_0 \geq 0$:

$$T(n) = a_0.n^p + a_1.n^{p-1} + \ldots + a_{p-1}.n + a_p$$

$$\leq a_0.n^p + |a_1|.n^{p-1} + \ldots + |a_{p-1}|.n + |a_p|$$
$$\leq a_0.n^p + |a_1|.n^p + \ldots + |a_{p-1}|.n^p + |a_p|.n^p$$
$$\leq (a_0 + |a_1| + \ldots + |a_{p-1}| + |a_p|).n^p$$
$$\leq c.n^p, \text{ para } n \geq 1$$

$T(n) = O(n^p)$

Notação O

- T(n) = O(f(n))
  - f(n) é um limite superior para a taxa de crescimento de T(n)
  - Dado T(n), temos uma única f(n)?
    - Não, pois várias funções podem satisfazer a definição.
    - Exemplo: $T(n) = 4n^2 + 3n + 1$
    - $T(n)$ é $O(n^2)$, $O(n^3)$, $O(n^{10})$
    - No entanto, T(n) não é O(n)
  - Na análise de algoritmos, as taxas mais usadas são n^2, n^3, n^i, log n, n.log n, 2^n, 3^n, etc.

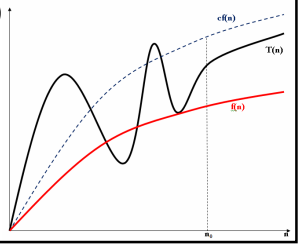
Dentre todas as possíveis funções **f(n)**, o objetivo é encontrar a que tenha o menor crescimento possível

Notação O

- Notações similares:
  - T(n) = O(f(n))
    - $T(n) \leq c.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - f(n) é um limite superior para T(n)
  - $T(n) = \Omega(f(n))$
    - $T(n) \geq c.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - f(n) é um limite inferior para T(n)
  - $T(n) = \Theta(f(n))$
    - $T(n) \leq c_1.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - $T(n) \geq c_2.f(n)$ para $n \geq n_0$
    - f(n) é um limite inferior e superior de T(n)

Big-Omega

Big-Teta



CES-11

- Noções de complexidade de algoritmos
  - Complexidade de algoritmos
  - Avaliação do tempo de execução
  - Razão de crescimento desse tempo
  - Notação O
  - Exercícios

Exercícios

- 1. Provar que $n^3 \neq O(n^2)$
  - Por absurdo, suponhamos que $\mathbf{n^3 = O(n^2)}$
  - Pela definição, existem constantes positivas **c** e $\mathbf{n_0}$ tais que, para $n \geq n_0$, $\mathbf{n^3 \leq c.n^2}$
  - Logo, $\mathbf{c \geq n}$. Portanto, à medida que **n** cresce indefinidamente, **c** também crescerá
  - Isso contraria a definição de **c** ser constante

Exercícios

- 2. Provar que $3^n \neq O(2^n)$
  - Por absurdo, suponhamos que $3^n = O(2^n)$
  - Pela definição, existem constantes positivas **c** e n_0 tais que, para $n \geq n_0$, $3^n \leq c.2^n$
  - Logo, $c \geq (3/2)^n$. Portanto, à medida que **n** cresce indefinidamente, $(3/2)^n$ também crescerá
  - Assim, para qualquer valor de **n**, não existe uma constante que exceda $(3/2)^n$

Exercícios

- 3. Analisar o pior caso de algoritmo ao lado, que calcula o valor de n^n

```
int func(int n)  {
   int i, r;
   r = 1;
   for (i=1; i<=n; i++)
      r = r*n;
   return r;
}
```

```
int func(int n)  {
   int i, r;
   r = 1;                  t1  1 vez
   i = 1;
   while (i <= n) {        t2  n+1 vezes
      r = r*n;
      i++;                 t3  n vezes
   }
   return r;
}
```

$T(n) = t_1 + t_2.(n+1) + t_3.n$
$= t_1 + t_2 + t_2.n + t_3.n$
$= c_1 + c_2.n$

$T(n) = O(n)$

Exercícios

- 4. Analisar o pior caso do algoritmo abaixo:

```
int func (int n)  {
    int  a, b, c, r;
    b = n;  c = n;  r = 1;      t1  1 vez
    while  (b >= 1) {           t2  x + 1 vezes
       a = b % 2;
       if  (a == 1)
          r = r * c;
       c = c * c * c;
       b = b / 2;
    }
    return r;
}
```

t_3 x vezes

$x = ?$ $\quad x = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

n	b	iterações
2	2,1,0	2
3	3,1,0	2
4	4,2,1,0	3
16	16,8,4,2,1,0	5
17	17,8,4,2,1,0	5
31	31,15,7,3,1,0	5
$2^{x-1} \leq n < 2^x$	...	x

Exercícios

- 4. Analisar o pior caso do algoritmo abaixo:

```
int func (int n)  {
    int  a, b, c, r;
    b = n;  c = n;  r = 1;      t1  1 vez
    while  (b >= 1) {           t2  x + 1 vezes
       a = b%2;
       if  (a == 1)
          r = r*c;
       c = c*c*c;
       b = b/2;
    }
    return r;
}
```

t_3 x vezes

$x = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

$T(n) = t_1 + t_2.(x+1) + t_3.x$
$= t_1 + t_2 + (t_2 + t_3).x$
$= c_1 + c_2.x$
$= c_1 + c_2.(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1)$
$= c_1 + c_2 + c_2 \lfloor \log_2 n \rfloor$
$= c_3 + c_2 \lfloor \log_2 n \rfloor$
$\leq c_3 + c_2.\log_2 n$

$T(n) = O(\log_2 n)$

Exercícios

- 5. Analisar o pior caso do cálculo recursivo de fatoriais

```
int fat(int n) {
   if (n <= 1) fat = 1;
   else fat = fat(n-1) * n;
}
```

d

c

$T(n) = d$, se $n \leq 1$
$T(n) = c + T(n-1)$, se $n > 1$

Para $n > 1$:

$T(n) = c + T(n-1)$
$= c + c + T(n-2)$
$= 2c + T(n-2)$
$= 3c + T(n-3)$
...
$= (n-1)c + T(1)$
$= (n-1)c + d$

$T(n) = O(n)$

Fim