

CCI-36 – Computação Gráfica

Transformações 3D e Projeções

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Sala 121 IEC

forster@ita.br

Tópicos da aula

- Geometria Projetiva Tridimensional
- Transformações em 3D
- Representação de Rotações
- Transformação de Corpo rígido em 3D
- Projeção ortográfica
- Projeção perspectiva
- Pontos de fuga

Livro para acompanhar essa aula

Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd edition)

D. F. Rogers, J. A. Adams

McGraw-Hill

Capítulos 2 e 3 pp 61-206

Fundamentos de Geometria Computacional

Resende, R. J., Stolfi, J.

IX Escola de Computação, Recife, 1994

Capítulo 2 pp 25-76

Foley

Geometria Projetiva 3D

\mathbb{T}^3 é o espaço projetivo orientado.

Pontos

Os pontos são representados por quádruplas de coordenadas homogêneas

$[x \ y \ z \ w]^T$ das quais se exclui $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e correspondem ao ponto $[x/w \ y/w \ z/w]^T$ em coordenadas cartesianas para $w > 0$, à direção do vetor (x, y, z) se $w = 0$ ou ao ponto $[x/w \ y/w \ z/w]^T$ do além se $w < 0$.

Plano

Planos são definidos por quádruplas de coeficientes homogêneos $\langle X, Y, Z, W \rangle$ e um ponto $[x \ y \ z \ w]^T$ pertence ao plano se $Xx + Yy + Zz + Ww = 0$.

Um plano divide os espaço em dois lados. De acordo com o sinal da expressão $Xx + Yy + Zz + Ww$ um ponto $[x \ y \ z \ w]^T$ está do lado positivo ou do lado negativo do plano.

O plano no infinito é definido como $\Omega = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, que define o aquém do espaço como os pontos que $w > 0$ e o além, $w < 0$.

Orientação do tetraedro

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = -\text{sgn} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Obtenção do plano por 3 pontos $p_0 \vee p_1 \vee p_2 = [X \ Y \ Z \ W]$,

$$X = - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix}, Z = - \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, W = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Obtenção do ponto intersecção de 3 planos (que não possuem reta comum) pela fórmula dual.

Transformações Geométricas em 3D

**Transformação 4x4 de coordenadas homogêneas
(transformação projetiva em 3D)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & i & j & n \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{bmatrix}$$

Partes da matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} \text{ Transformação linear em 3D.}$$

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \text{ Vetor de translação em 3D.}$$

$$[p \quad q \quad r] \text{ perspectiva.}$$

$$[s] \text{ escala global}$$

Escala global

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{bmatrix} \text{ equivale à } \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Translação3D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x' = x + l \\ y' = y + m \\ z' = z + n \end{cases}$$

Reflexo 3D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Reflexo em relação ao plano } xy.$$

Cisalhamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x' = x + cz \\ y' = y + fz \\ z' = z \end{cases} \text{ Desloca } x \text{ e } y \text{ em função de } z.$$

Cisalhamentos nos outros planos são análogos.

Rotações em 3D

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo x no sentido anti-horário.

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo y no sentido anti-horário.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Rotação em torno do eixo z no sentido anti-horário.}$$

O determinante é 1.

As linhas são vetores ortonormais (unitários e ortogonais).

Por isso $R^T = R^{-1}$

A composição de rotações é associativa, mas não é comutativa.

A mudança da ordem das rotações pode dar resultados diferentes.

Exemplo: Rotação de 90 graus em x e em y.

Depois em ordem inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício: Composição de Transformações

Rotação em torno de um eixo arbitrário.

Eixo passa por $[x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$ com cossenos de direção (c_x, c_y, c_z) .

Rotação por um ângulo δ .

- 1- Transladar de $(-x_0, -y_0, -z_0)$ para eixo passar pela origem.
- 2- Rotacionar em torno do eixo x até eixo no plano xz.
- 3- Rotacionar em torno do eixo y até eixo coincidir com eixo z.
- 4- Rotacionar δ em torno do eixo z
- 5- Transformação 3 inversa
- 6- Transformação 2 inversa
- 7- Transformação 1 inversa

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & & -x_0 \\ & 1 & -y_0 \\ & & 1 & -z_0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{c_z}{d}, \sin \alpha = \frac{c_y}{d}$$

$$T_2 = R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & -c_y/d & 0 \\ 0 & c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \beta = d, \sin \beta = c_x$$

$$T_3 = R_y = \begin{bmatrix} d & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = R_z = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição: $T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} T_4 T_3 T_2 T_1$

Outros Exemplos de Composição de Transformações:

- Rotações e Translações
- Rotação por eixo paralelo a um eixo coordenado.
- Reflexo sobre plano arbitrário no espaço

Transformações Afins em 3D

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (\text{coordenadas cartesianas})$$

Ou ainda, em coordenadas homogêneas:

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & i & j & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

Preservam o paralelismo de retas e de planos e as combinações convexas.

Transformações de Corpo Rígido em 3D

Rotações e translações em 3D e suas composições.

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ d^2 + e^2 + f^2 = 1 \\ g^2 + i^2 + j^2 = 1 \\ ad + be + cf = 0 \\ dg + ei + fj = 0 \\ ag + bi + cj = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{vmatrix} = +1$$

Restrições não-lineares

Representação de Rotações em 3D

3 graus de liberdade

- Ângulos de Euler: rotação em x, rotação em y e rotação em z.
- Ângulos de Euler II: eixo pela origem e ângulo de rotação (regra mão direita).
- Matriz 3x3 ortonormal positiva.
- Quatérnions unitários.

Problema dos ângulos de Euler é o chamado “Gimbal lock”: para uma dada configuração, um grau de liberdade é perdido.

Lembrando números complexos

$$z = x + iy \text{ onde } i = \sqrt{-1}.$$

Soma $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \rightarrow$ translação.

Escala $\alpha z = (\alpha x) + i(\alpha y) \rightarrow$ escala uniforme.

$$\text{Produto } z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$\text{Fórmula de Euler } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\text{Produto por } e^{i\theta} : z \cdot e^{i\theta} = x \cos \theta - y \sin \theta + i(y \cos \theta + x \sin \theta)$$

Número complexo unitário representa uma rotação em 2D.

Quatérnions

Vetor de 4 componentes

$${}^o q = q + \mathbf{q} \text{ (soma de um componente escalar e um vetor 3D).}$$

Produto, associativo, mas não comutativo

$${}^o r = {}^o p {}^o q \begin{cases} r = pq - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{r} = p\mathbf{q} + q\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{cases}$$

Produto escalar de quartenhões

$${}^o p \bullet {}^o q = pq + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

Norma:

$$\left| {}^o q \right| = {}^o q \bullet {}^o q = q^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$$

Quartenhão unitário tem norma igual a 1.

Rotação de θ em torno de um vetor unitário $\vec{\omega}$ é representada por

$${}^o q = \sin \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{\omega}$$

Notar que ${}^o q^{-1}$ define a mesma rotação que ${}^o q$, visto que inverte a orientação do eixo e o ângulo simultaneamente.

Quartenhão conjugado:

$${}^o q^* = q - \mathbf{q}$$

Inverte apenas o “cosseno”: rotação inversa para quartenhão unitário:

$${}^o q^* {}^o q = {}^o q {}^o q^* = 1 \text{ (para quartenhão unitário)}$$

Fórmula da rotação

$$(0 + \mathbf{x}') = \overset{o}{q}(0 + \mathbf{x}) \overset{o}{q}^*$$

A composição de rotações resulta da multiplicação de quartenhões

$$(0 + \mathbf{x}'') = \overset{o}{p}(0 + \mathbf{x}') \overset{o}{p}^* = \overset{o}{p}(\overset{o}{q}(0 + \mathbf{x}) \overset{o}{q}^*) \overset{o}{p}^* = (\overset{o}{p} \overset{o}{q})(0 + \mathbf{x})(\overset{o}{q} \overset{o}{p})^*$$

A matriz de rotação correspondente é

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_0q_3 + q_2q_1) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(-q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_0q_1 + q_3q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Para os ângulos de Euler α, β, γ , a matriz de rotação é dada por

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \end{bmatrix}$$

A rotação em torno do vetor $n = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T$ unitário é

$$R = I \cos \theta + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de R são $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$. O auto-vetor de 1 é o vetor n (eixo).

Projeção Ortográfica

Redução para um espaço de dimensão menor.

No caso da projeção ortográfica, perdemos a informação do eixo z.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{ou simplesmente} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$X = x$$

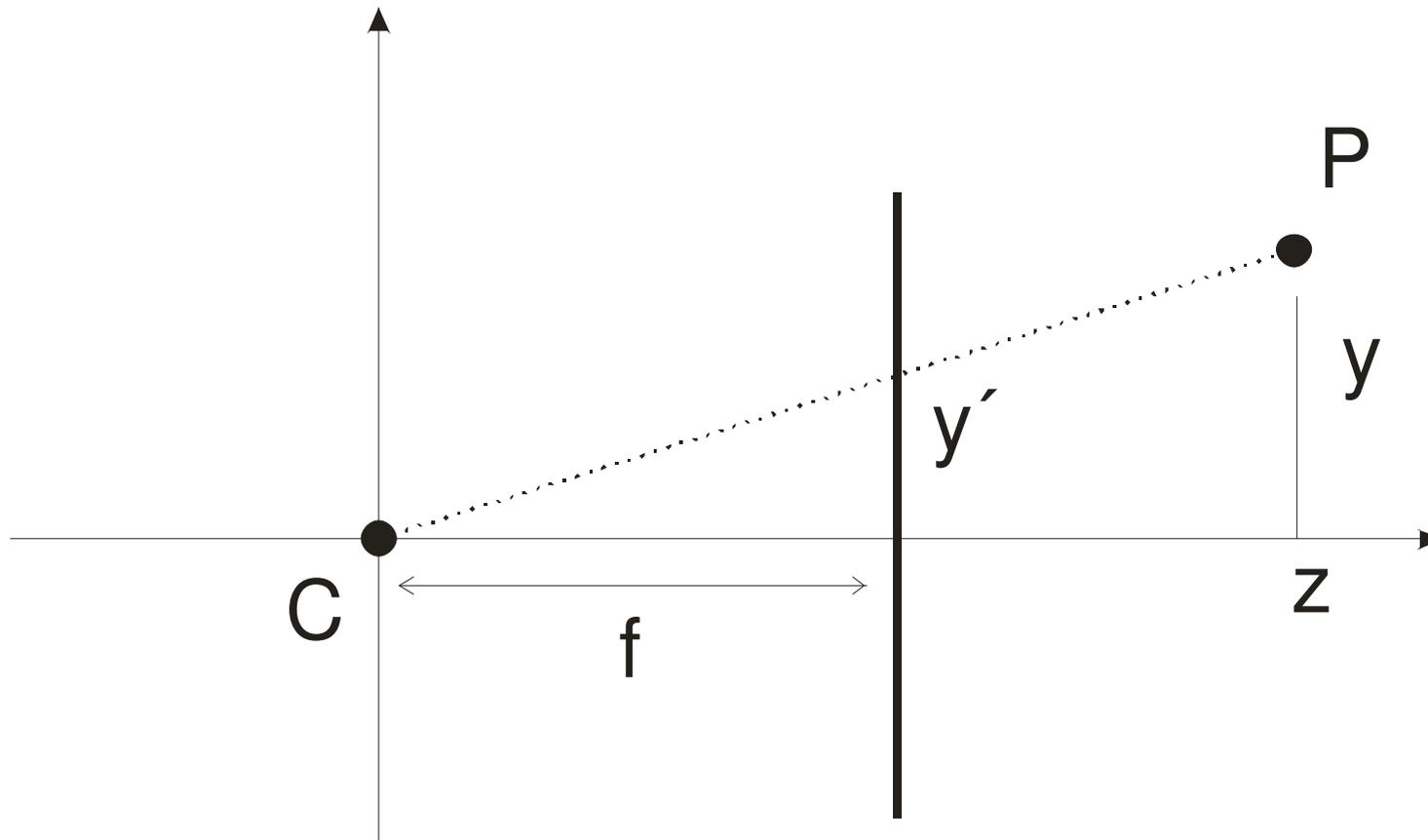
$$Y = y$$

$$Z = 0$$

$$W = w$$

Projeção Perspectiva

Várias formulações possíveis



C é o centro de projeção, f é a distância focal (C ao plano-imagem).

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{f}{z} y \\ x' = \frac{f}{z} x \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas:

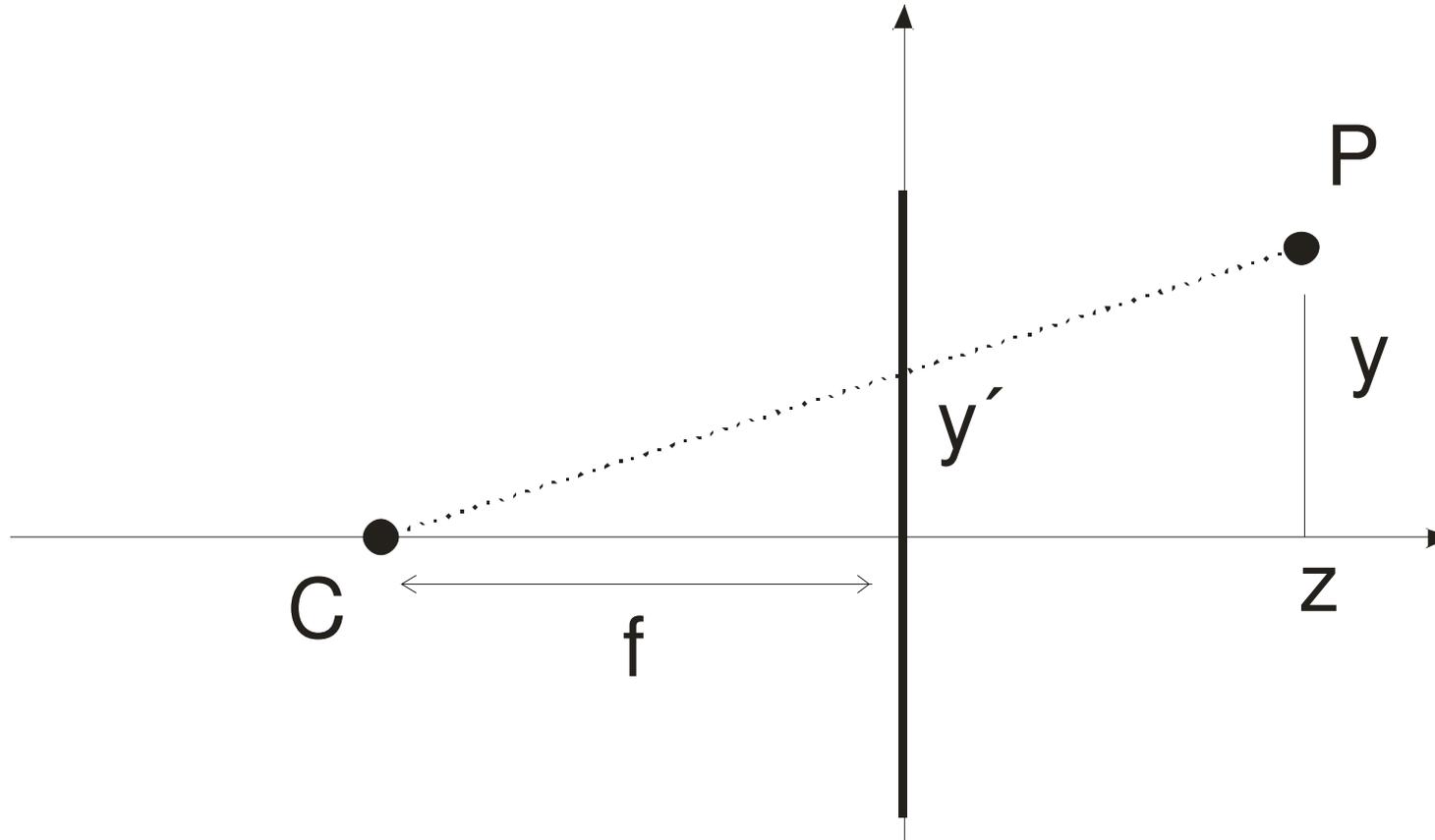
$$y' = fy$$

$$x' = fx$$

$$w' = z$$

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \text{ ou então } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Outro modelo.



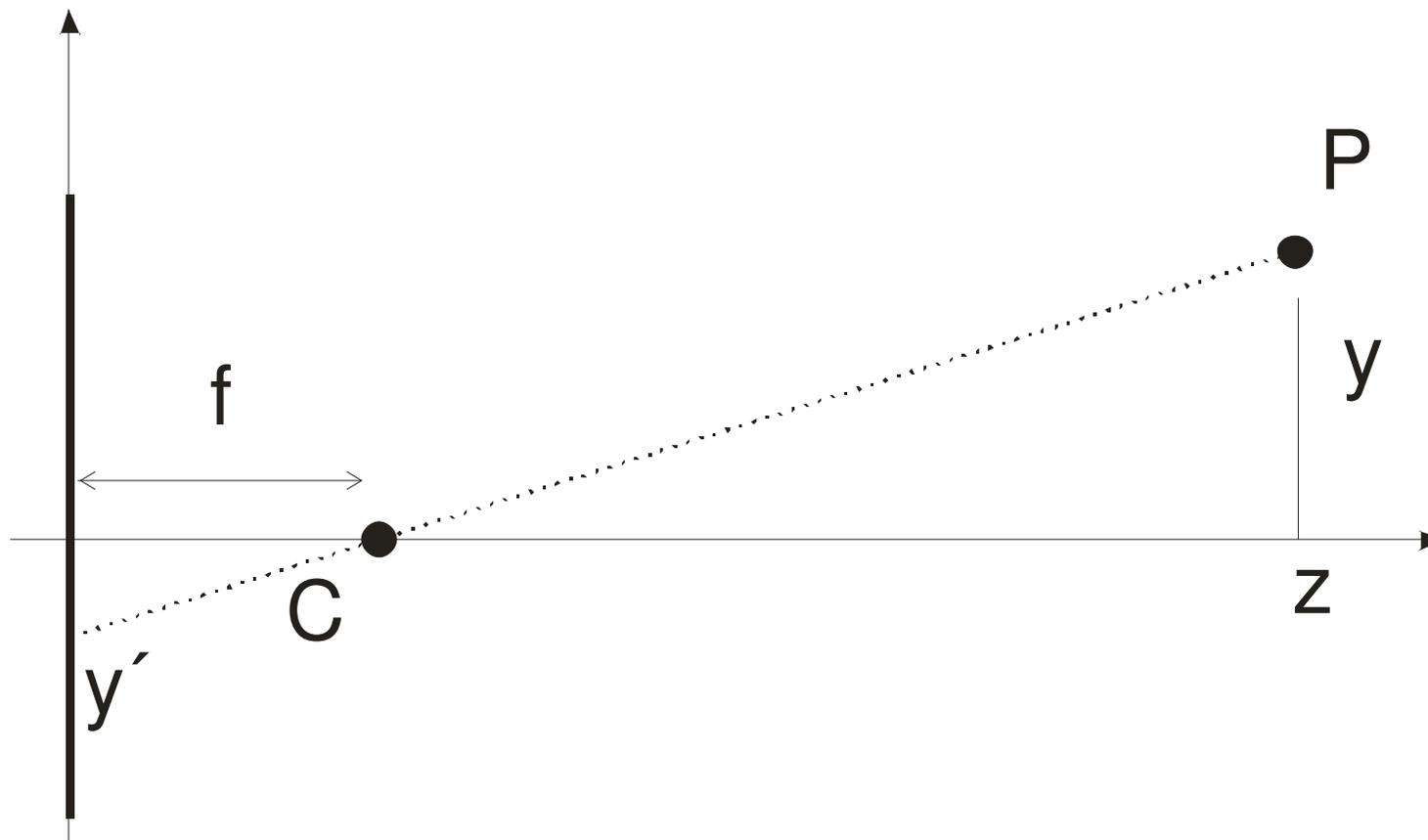
O plano-imagem agora está sobre a origem (e não o centro de projeção).

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z+f} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{f}{z+f} y \\ x' = \frac{f}{z+f} x \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x \\ w' &= \frac{z+f}{f} = 1 + \frac{z}{f} \end{aligned} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Mais um modelo



Agora o centro de projeção está à frente do plano-imagem.

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z-f} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{f}{z-f} y \\ x' = \frac{f}{z-f} x \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x \\ w' &= \frac{z-f}{f} = \frac{z}{f} - 1 \end{aligned} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Pontos de Fuga

Os pontos de fuga numa imagem de perspectiva são os pontos em que as imagens das retas paralelas de uma cena se encontram.

Para nós, é simplesmente a projeção perspectiva de pontos no infinito.

Se a transformação de um ponto no infinito resultar um ponto no infinito, as retas paralelas naquela direção são também paralelas na imagem.

Se a transformação de um ponto no infinito resultar um ponto finito, as retas paralelas naquela direção são concorrentes na imagem sobre esse ponto.

Pontos de Fuga

Resultado da seguinte matriz de projeção

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ px+1 \end{bmatrix}$$

Aplicando ao ponto no infinito no eixo x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultado da seguinte projetividade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ px + py + pz + 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando aos pontos no infinito da direção dos eixos x, y e z e à origem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/p \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – encontrar os pontos de fuga da seguinte transformação para as retas paralelas ao eixo x, ao eixo y e ao eixo z.

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.354 & 0.707 & -0.612 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.141 & -0.283 & -0.245 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: O ponto de fuga de

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.354 & 0.707 & -0.612 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.141 & -0.283 & -0.245 & 1 \end{bmatrix} \text{ para o eixo x é } \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.354 \\ 0 \\ -0.141 \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas cartesianas é o ponto $\begin{bmatrix} -6.142 \\ 2.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $(-6.142, 2.5)$ da imagem.

Os pontos de fuga para o eixo y e z são respectivamente $(0, -2.5)$ e $(2.04, 2.5)$

Exemplo

Translação para traz e para frente.

Mudança da distância focal em cada um dos modelos de projeção perspectiva.

Encontrar os pontos de fuga para uma dada matriz de transformação.

Encontrar a matriz de projeção ortográfica numa determinada direção.