

# **CCI 36 – Computação Gráfica**

## **Curvas e Superfícies**

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica**

**Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Sala 121 IEC**

**[forster@ita.br](mailto:forster@ita.br)**

## **Tópicos da aula**

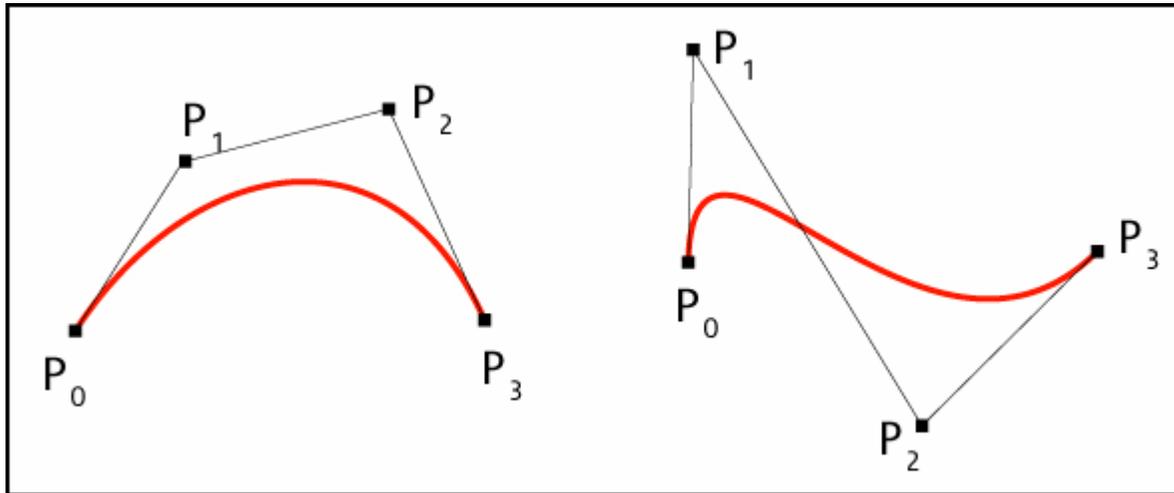
- Curvas Bezier - propriedades
- Algoritmo de Casteljau
- Subdivisão de Beziars
- Superfícies
- Curvas B-spline e NURBS
- Malhas de subdivisão Catmull-Clark

## **Livro para acompanhar essa aula**

Foley

Farin

## Curvas Bezier – propriedades

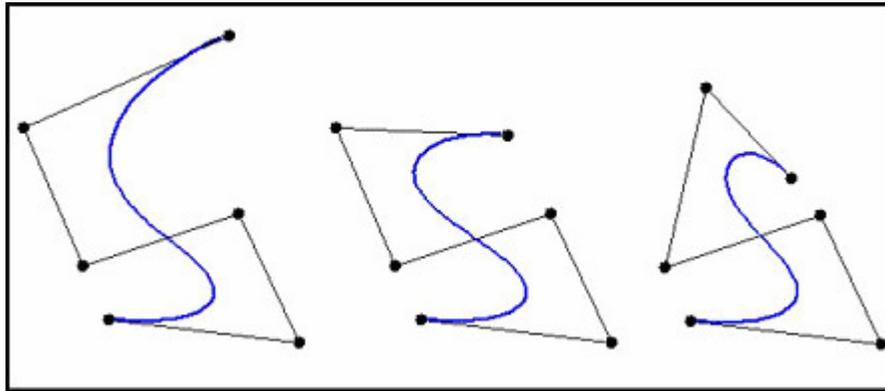


$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = (1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1, 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{linear 2 pontos de controle})$$

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)[(1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1] + t[(1 - t)\mathbf{P}_1 + t\mathbf{P}_2], 0 \leq t \leq 1, \quad (\text{parábola 3 pontos } P_0 \ P_1 \ P_2)$$

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^2\mathbf{P}_0 + 2(1 - t)t\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, 0 \leq t \leq 1.$$

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^3\mathbf{P}_0 + 3(1 - t)^2t\mathbf{P}_1 + 3(1 - t)t^2\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, 0 \leq t \leq 1. \quad (\text{cúbica usual})$$

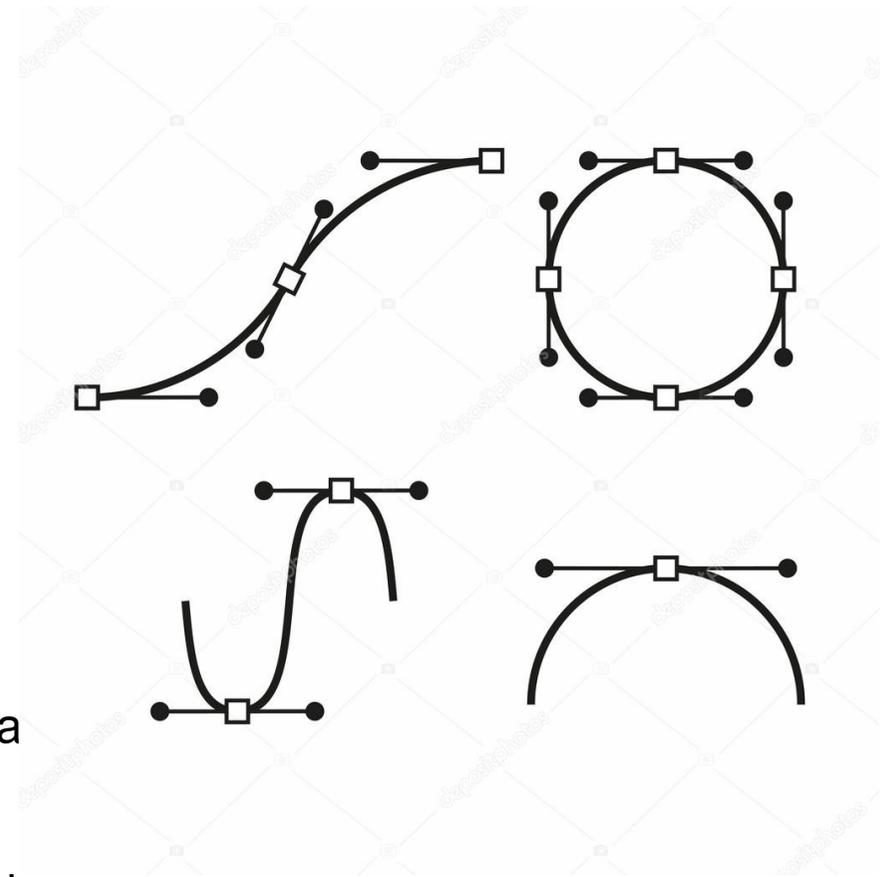


Bezier de ordem mais alta

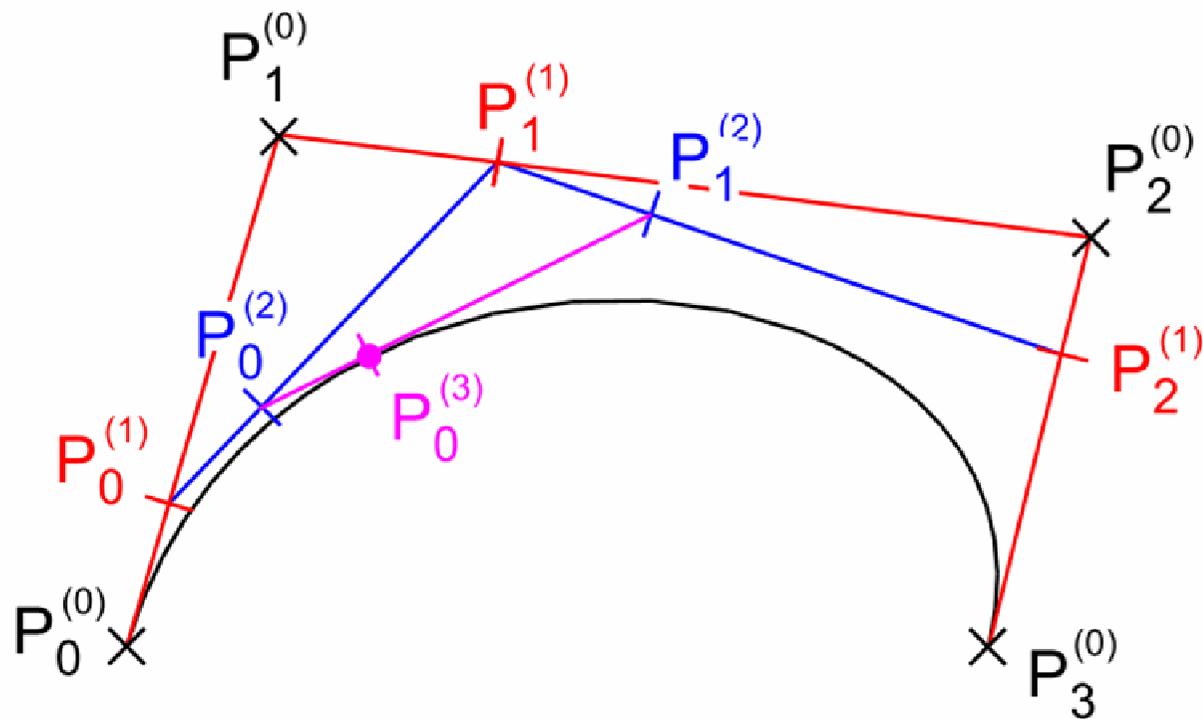
Concatenação de Beziers.

Os pontos de controle inicial e final de cada curva pertencem à curva. As tangentes nos pontos iniciais e finais correspondem às retas que ligam o primeiro ponto ao segundo e o último ao penúltimo.

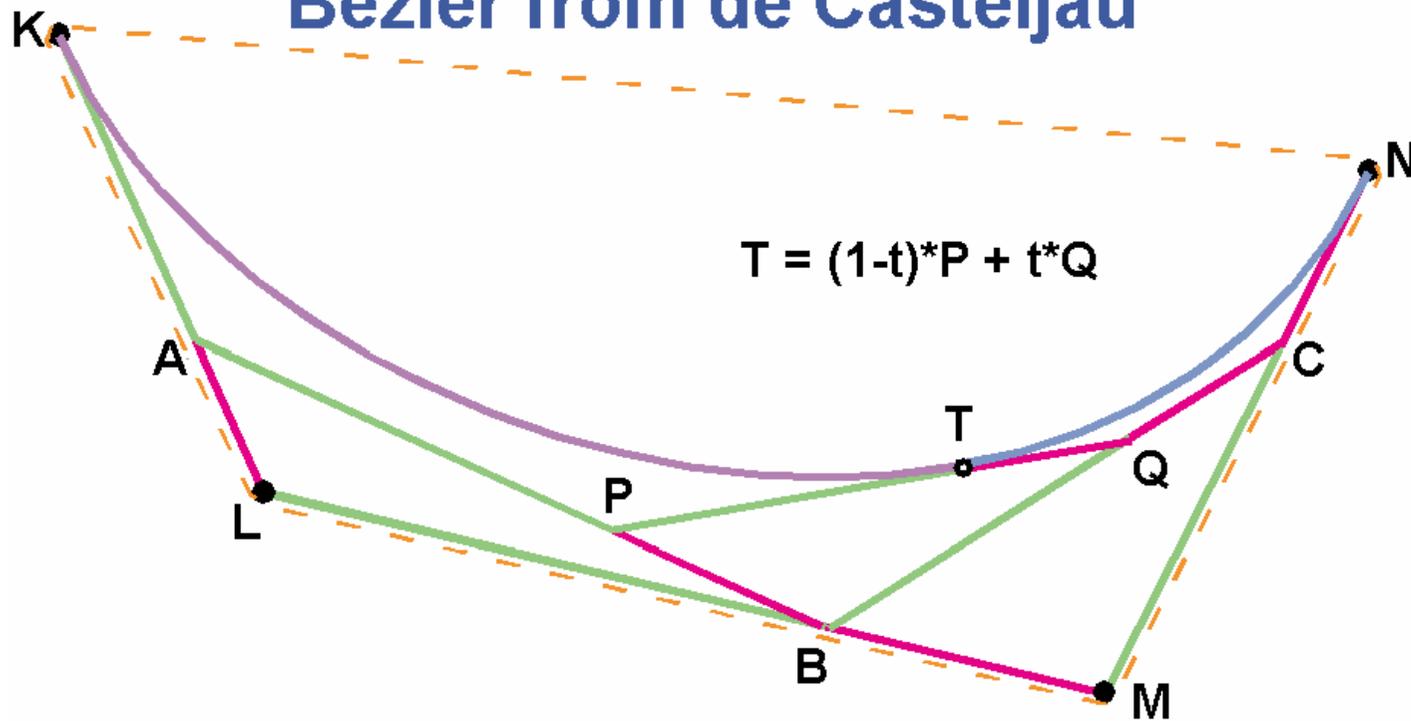
Para não haver descontinuidade, procura-se que os pontos de controle da concatenação coincidam e suas tangentes também. Para continuidade de ordem mais alta, há necessidade de se recorrer às equações.



# Algoritmo de Casteljau



## Bezier from de Casteljaou



$$T = (1-t)*P + t*Q$$

$$P = (1-t)*A + t*B$$

$$Q = (1-t)*B + t*C$$

$$T = (1-t)(1-t)*A + (1-t)t*B + t(1-t)*B + t*t*C$$

$$A = (1-t)*K + t*L \quad B = (1-t)*L + t*M \quad C = (1-t)*M + t*N$$

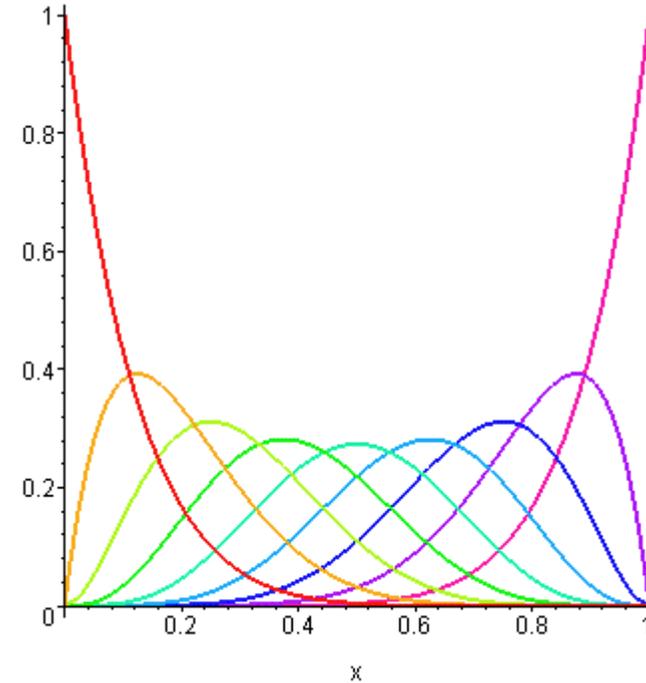
$$T = (1-t)^3*K + (1-t)^2*t*L + 2(1-t)t^2*L + 2(1-t)t^2*M + (1-t)t^2*M + t^3*N$$

## Base de Bernstein

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) \mathbf{P}_i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n$$



Elevação de grau

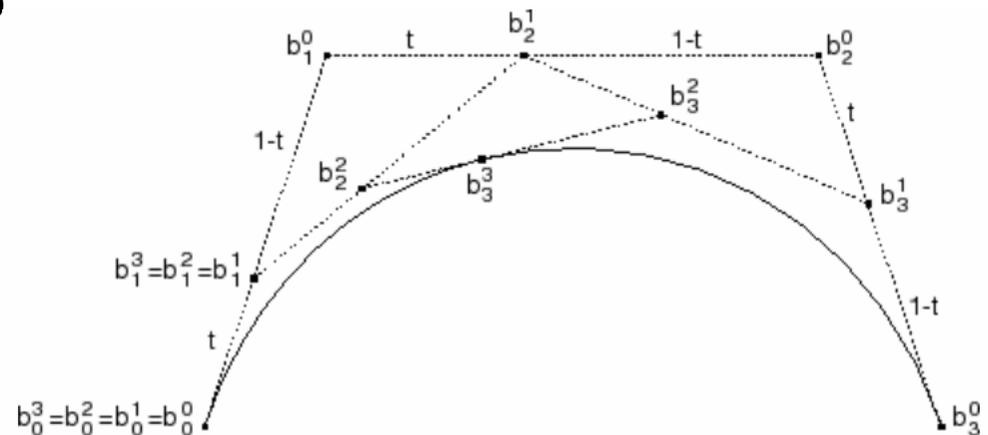
$$\mathbf{B}(t) = (1 - t) \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{i,n}(t) \mathbf{P}_i + t \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{i,n}(t) \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{P}'_i = \frac{i}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{P}_i, \quad i = 0, \dots, n+1$$

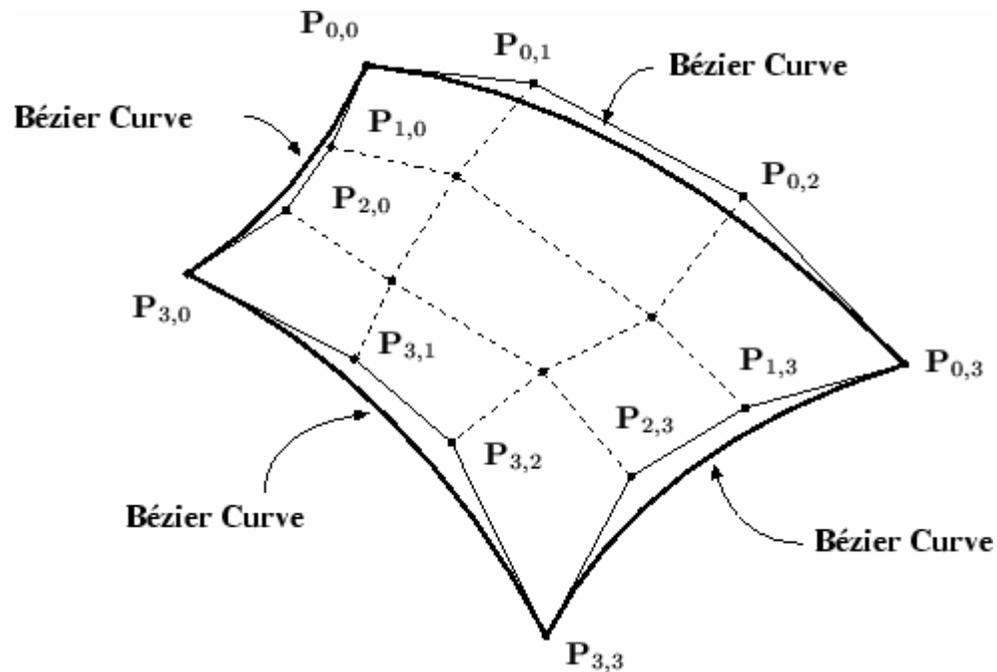
O grau é elevado sem alterar a curva original

Subdivisão de Bezier

A subdivisão num “instante t” é feita pelo algoritmo de deCasteljau



## Superfícies



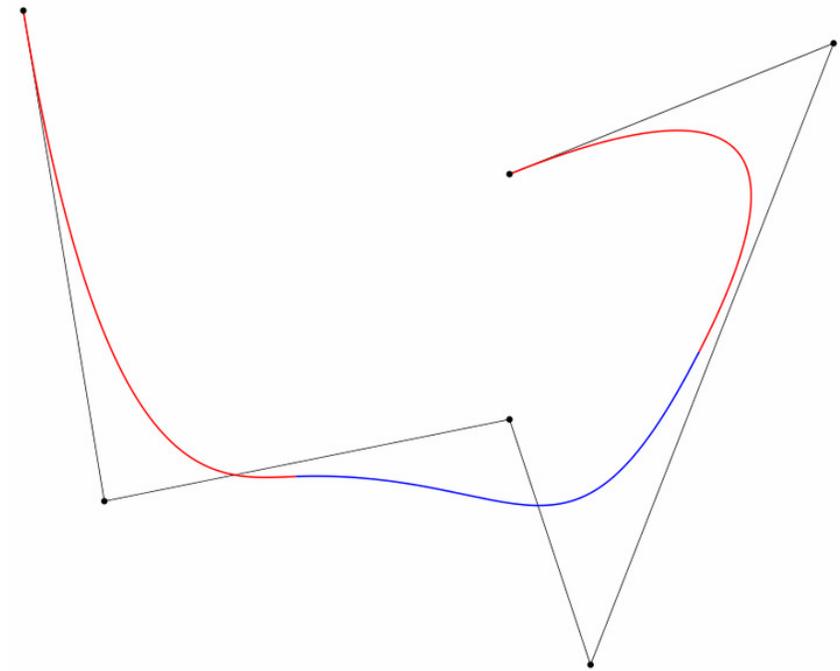
$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_{i,j} B_{i,n}(u) B_{j,m}(v)$$

## Curvas B-spline

$$B_{i,0}(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(x) := \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x).$$

$$\mathbf{S}(x) = \sum_i \mathbf{c}_i B_{i,p}(x).$$



## Vetor de nós

É uma lista com valores de “tempo”, não-estritamente crescente

Numa spline uniforme: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...]

Numa spline não uniforme: [0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, ...]

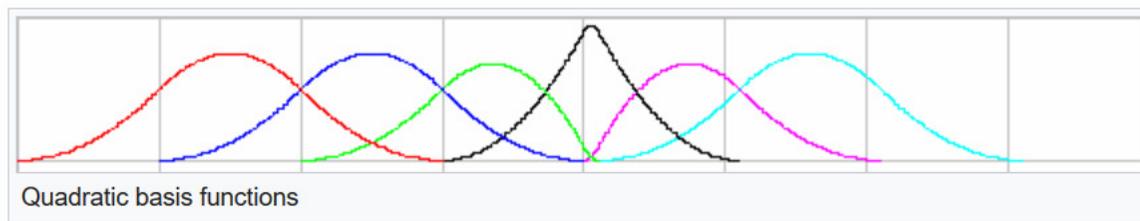
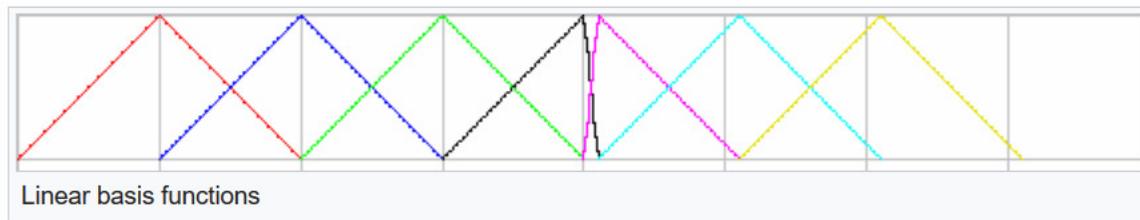
O grau da continuidade no nó “5” é reduzido cada vez que é repetido

# NURBS (Non-uniform rational B-spline)

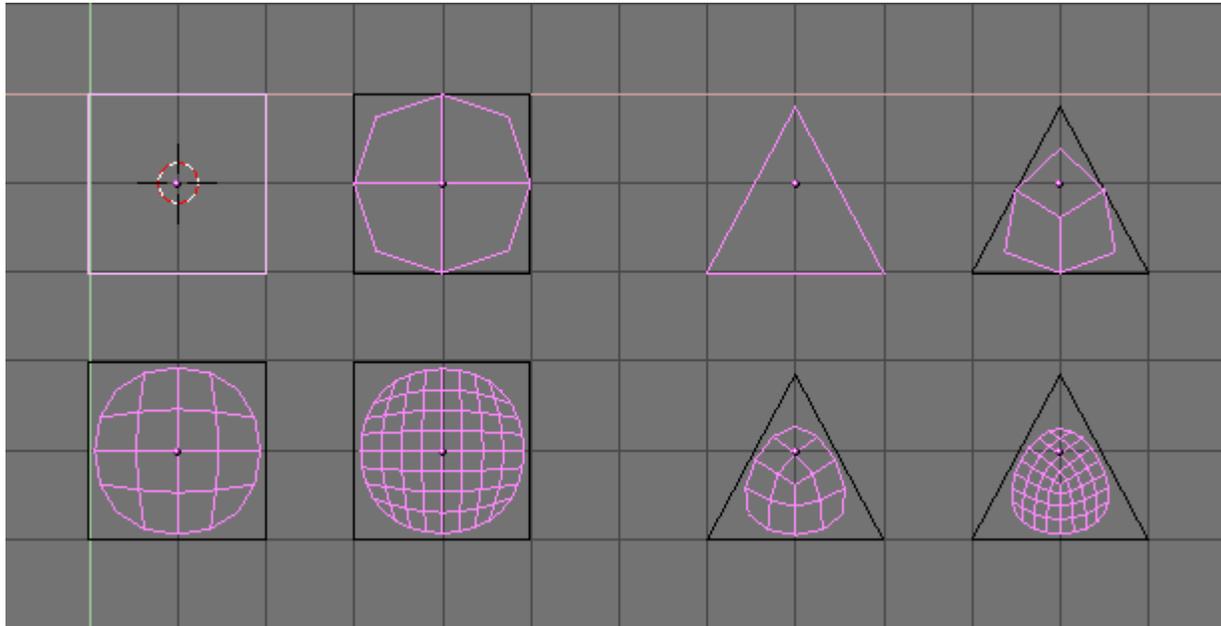
Racional: os pontos de controle contêm pesos. A base é feita com funções racionais.

Conseguem representar exatamente curvas, como arcos de circunferência, que são apenas aproximadas pelas curvas polinomiais.

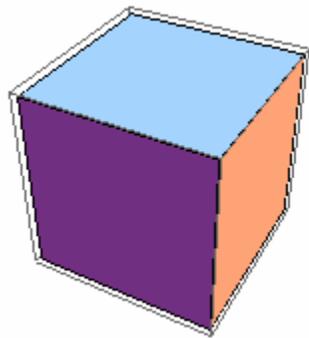
Exemplo das funções base para os nós {..., 0, 1, 2, 3, 4, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, ...}



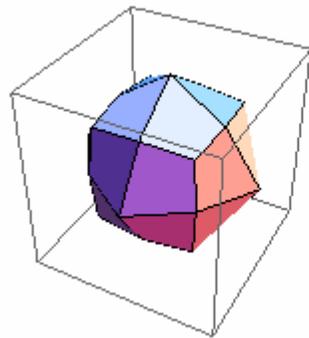
## Malhas de subdivisão Catmull-Clark



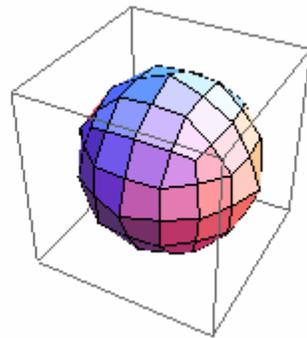
$$\frac{F + 2R + (n - 3)P}{n}$$
 , onde P é o ponto original. F é a média dos pontos centrais das faces e R é a média dos pontos médios das arestas.



initial mesh



step 1



limit surface

