CCI-22

Matemática Computacional

Carlos Henrique Q. Forster

CCI-22

Auto-valores e auto-vetores

Notas complementares

Auto-valores e auto-vetores

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistema homogêneo só tem solução não-trivial se a matriz de coeficientes for singular

$$A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Polinômio característico da matriz A.

$$\det \begin{bmatrix} 10-\lambda & -4 \\ 12 & -4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = 4$$

Fazendo os vetores da forma $v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 10-2 & -4 \\ 14 & -4-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$8 - 4x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 10-4 & -4 \\ 14 & -4-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Propriedades de auto-valores

- O traço da matriz (soma dos elementos da diagonal) é igual à soma dos auto-valores.
- O determinante da matriz é igual ao produto dos auto-valores.
- Se λ_i são autovalores de A, então $1/\lambda_i$ são autovalores de A^{-1}.
- A transposta de A possui os mesmos autovalores de A.

Propriedades de matrizes e autovalores

- Seja $A=P^{-1}BP$. Se existe a matriz P inversível, então A e B são ditas similares.
- Matrizes similares possuem os mesmos autovalores. (E portanto, mesmo traço, mesmo determinante e mesmo posto).
- Numa matriz real simétrica, todos os autovalores são reais.
- Uma matriz é dita positivo-definida se $z^TMz>0$ para qualquer vetor z real não-nulo.
- Numa matriz positivo-definida, todos auto-valores são positivos.

Matriz diagonalizável

- Uma matriz é diagonalizável se for quadrada e similar a uma matriz diagonal, isto é, A é diagonalizável se existe P tal que:

  $A=P^{-1}DP$, onde D é diagonal.

- Uma matriz diagonalizável terá auto-vetores linearmente independentes

Alguns casos especiais

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Auto-valor múltiplo

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Auto-valor nulo

$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}$ Auto-valores complexos

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz defectiva: A multiplicidade algébrica não corresponde à multiplicidade geométrica (multiplicidade 2, mas apenas 1 auto-vetor)

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ Dois auto-valores e autovetores correspondentes

Decomposição espectral

- No caso de uma matriz diagonalizável A com n autovalores λi e seus autovetores correspondentes (e linearmente independentes)

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1..n$$

Na forma matricial:

$$A \cdot \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \mathbf{v}_2 & \lambda_3 \mathbf{v}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Decomposição espectral

- Como multiplicamos cada ***coluna*** por um escalar diferente, utilizamos a multiplicação à direita por uma matriz diagonal para representar essa operação.

$$AV = V \cdot \Lambda$$

onde

$$V = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Decomposição espectral

- Como V contém colunas linearmente independentes, podemos invertê-la e reescrever o problema de autovalor da forma:

$$A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$$

Que é a decomposição espectral da matriz A

Exemplo

$$A=\begin{bmatrix}7 & 14 & -2\\ -3 & -10 & 2\\ -12 & -28 & 5\end{bmatrix}$$

$$D(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}7-\lambda & 14 & -2\\ -3 & -10-\lambda & 2\\ -12 & -28 & 5-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=-\lambda^3+2\lambda^2+11\lambda-12=0$$

Raízes: $\lambda_1=4 \quad \lambda_2=1 \quad \lambda_3=-3$

Exemplo(cont)

- Fixando o primeiro elemento de cada vetor no valor 1, encontramos os auto-vetores:

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\ -0{,}5\\ -2\end{bmatrix},\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -4\end{bmatrix},\quad v_3=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -2\end{bmatrix}$$

Que forma a matriz V:

$$V=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -0{,}5 & -1 & -1\\ -2 & -4 & -2\end{bmatrix}$$

Cuja inversa é...

$$V^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -0{,}5\\ 0 & -2 & 0{,}5\end{bmatrix}$$

Exemplo

- Assim a decomposição espectral de A é:

$$A=\begin{bmatrix}7 & 14 & -2\\ -3 & -10 & 2\\ -12 & -28 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -0{,}5 & -1 & -1\\ -2 & -4 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & -0{,}5\\ 0 & -2 & 0{,}5\end{bmatrix}$$

Aplicações

- Solução de sistema:
  - Ax=b, decompondo A:
  - $VDV^{-1}x=b$
  - $x=VD^{-1}V^{-1}b$
- Inversa:
  - $A=VDV^{-1}$
  - $A^{-1}=VD^{-1}V^{-1}$
  - Note que a inversa da matriz diagonal é simplesmente uma matriz diagonal com os recíprocos dos elementos da matriz diagonal original.

Aplicações

- Potência de matrizes:
  - $A^2=AA=VDV^{-1}VDV^{-1}=VD^2V^{-1}$

$$A^n = V\Lambda^n V^{-1}$$

Notar que:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix} \rightarrow \Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\,n} & & & \\ & \lambda_2^{\,n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^{\,n} \end{bmatrix}$$

Aplicações

- Soma com mesmos auto-vetores:
  - $A_1=VD_1V^{-1}$
  - $A_2=VD_2V^{-1}$
  - $A_1+A_2=V(D_1+D_2)V^{-1}$
  - Basta portanto, somar os auto-valores nas matrizes D
- Escala
  - $aA=V(aD)V^{-1}$
- Polinômio matricial
  - $P(A)=V\,P(D)\,V^{-1}$
- Exponencial de matriz
  - $Exp(A)=V\,Exp(D)\,V^{-1}$
  - Assim, basta aplicar a função a cada elemento da diagonal.

Exemplo

- Lembrando a série de Fibonacci, com a definição recursiva:
  - F(0)=1
  - F(1)=1
  - F(n+1)=F(n)+F(n-1)
- Reescrevemos na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F(n+2) \\ F(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{bmatrix}$$

Exemplo(cont)

- Encontrar a decomposição da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Obtemos os auto-vetores, Fazendo $v_i=[x\ y]^T$, com x=1 e substituindo em $x + y = \lambda x \rightarrow y = \lambda - 1$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{bmatrix}$$

Encontrando a inversa da matriz dos auto-vetores.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{5}-1/2 & -\sqrt{5}-1/2 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

- O resultado da decomposição é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{5}-1/2 & -\sqrt{5}-1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

Para calcular F(n) a partir do vetor $[1\ 1]^T$:

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = A^n [1 \quad 1]^T$$

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = VD^nV^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Abrindo a expressão matricial, obtemos:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Justificativa para os métodos de Gauss-Seidel e Jacobi

- Qual o polinômio de Taylor para calcular o recíproco de um número real?
- É recomendável calcular ao invés disso, a seguinte função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

- Para quais valores de x a série é válida para calcular o recíproco de 1-x?

- No caso matricial, podemos usar a seguinte série de Taylor para obter uma matriz inversa:

  $(I-T)^{-1}=I+T+T^2+T^3+\ldots$

A convergência dessa série depende do chamado "raio espectral" da matriz T, isto é, o maior auto-valor em módulo de T:

$$\rho(T)=|\lambda|_{\max}(T)$$

- Se o raio espectral $\rho(T)<1$, então "1" não é auto-valor de T, "0" não é auto-valor de (I-T), então $(I-T)^{-1}$ existe.

- A sequência gerada por $\mathbf{x}_{k+1}=T\mathbf{x}_k+\mathbf{c}$

  converge se $\rho(T)<1$, independente de $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}_{k+2}=T(T\mathbf{x}_k+\mathbf{c})+\mathbf{c}=T^2\mathbf{x}_k+(T+I)\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}_k=T^k\mathbf{x}_0+(T^{k+1}+\cdots+T^2+T+I)\mathbf{c}$$

- Quando k tende a infinito, temos:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k=(I-T)^{-1}\mathbf{c}$$

- Com a matriz A=D-L-U, onde D são os elementos da diagonal, -L aqueles debaixo dela e -U aqueles acima dela:
  - Jacobi: $T=D^{-1}(L+U)$ e $c=D^{-1}b$
  - Seidel: $T=(D-L)^{-1}U$ e $c=(D-L)^{-1}b$

Decomposição de Cholesky

- Propriedades da matriz real $C=A^TA$ de posto completo:
  - Simétrica
  - Positiva-definida

- Estas são condições necessárias e suficientes para que exista uma matriz triangular inferior L tal que:

  $C=LL^T$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}l_{11} & l_{31}l_{11} \\ l_{21}l_{11} & l_{22}^2 + l_{21}^2 & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{33}^2 + l_{32}^2 + l_{31}^2 \end{bmatrix}$$

- Igualando termo a termo (notar que é simétrica)

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}l_{11} & l_{31}l_{11} \\ l_{21}l_{11} & l_{22}^2 + l_{21}^2 & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{33}^2 + l_{32}^2 + l_{31}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{c_{11}} \qquad l_{31} = \frac{c_{13}}{l_{11}} \qquad l_{32} = \frac{c_{23} - l_{21}l_{31}}{l_{22}}$$

$$l_{21} = \frac{c_{12}}{l_{11}} \qquad l_{22} = \sqrt{c_{22} - l_{21}^2} \qquad l_{33} = \sqrt{c_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

- A solução do sistema Cx=b é muito similar ao método utilizado na decomposição LU:
  - Resolve-se Ly=b
  - Resolve-se L^Tx=y