CCI-22

Matemática Computacional

Carlos Henrique Q. Forster

CCI-22

3) Sistemas Lineares

Notas complementares

Sistemas Lineares Triangulares

- Triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exercícios

- Resolver

$$\begin{aligned} 3x_1 \quad + 5x_2 \quad + 2x_3 &= 8 \\ 8x_2 \quad + 2x_3 &= -7 \\ 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_3 = 3/6 = 1/2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_1 = 4$$

Exercício

- Algoritmo para resolver:

$$
\begin{aligned}
u_{11}x_1 \; + u_{12}x_2 \; + u_{13}x_3 \; + u_{14}x_4 &= b_1 \\
u_{22}x_2 \; + u_{23}x_3 \; + u_{24}x_4 &= b_2 \\
u_{33}x_3 \; + u_{34}x_4 &= b_3 \\
u_{44}x_4 &= b_4
\end{aligned}
$$

Retro-substituição

$$x_4 = \frac{b_4}{u_{44}} \qquad x_2 = \frac{b_2 - u_{24}x_4 - u_{23}x_3}{u_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - u_{34}x_4}{u_{33}} \qquad x_1 = \frac{b_1 - u_{14}x_4 - u_{13}x_3 - u_{12}x_2}{u_{11}}$$

Exercício

- Encontrar algoritmo para resolver

$$
\begin{aligned}
&x_1 = b_1 \\
&l_{21}x_1 + x_2 = b_2 \\
&l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + x_3 = b_3 \\
&\ldots \\
&l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \ldots + l_{nn-1}x_{n-1} + x_n = b_n
\end{aligned}
$$

Substituição direta

$$
\begin{aligned}
&x_1 = b_1 \\
&x_2 = b_2 - l_{21}x_1 \\
&x_3 = b_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2 \\
&x_n = b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 \ldots - l_{nn-1}x_{n-1}
\end{aligned}
$$

Eliminação de Gauss-Jordan

- Método para inversão de matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

X20
(-)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & -20 & -20 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

X3
(-)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -95 & -20 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Upper triangular

Lower triangular

$$\left[U \middle| L^{-1} \right]$$

Eliminação de Gauss-Jordan

- Continuando...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -95 & -20 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

X1/10
X1/(-95)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2{,}5 & 0 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}21 & 0{,}03 & -0{,}01 \end{array}\right]$$

X2,5
(-)
(-)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0{,}79 & -0{,}03 & 0{,}01 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}53 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}21 & 0{,}03 & -0{,}01 \end{array}\right]$$

X-1
(-)

Eliminação de Gauss-Jordan

- Finalmente...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0{,}26 & -0{,}01 & 0{,}04 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}53 & 0{,}02 & 0{,}03 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}21 & 0{,}03 & -0{,}01 \end{array}\right]$$

- O processo realiza a transformação

$$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$$

através de várias multiplicações de matrizes, como veremos a seguir.

Sistemas Equivalentes

- Considere um sistema linear determinado, na forma matricial:

  $Ax=b$

  Cuja solução é $x=A^{-1}b$

  Multiplicamos ambos os lados da equação por uma matriz quadrada M à esquerda

  $MAx=Mb$

  A solução do novo sistema é

  $x=(MA)^{-1}Mb=A^{-1}M^{-1}Mb=A^{-1}b$

  O que o faz equivalente ao original se M é inversível.

Operações L-elementares

- 1 – Multiplicar uma linha por um escalar

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 a_{11} & \alpha_1 a_{12} & \alpha_1 a_{13} \\ \alpha_2 a_{21} & \alpha_2 a_{22} & \alpha_2 a_{23} \\ \alpha_3 a_{31} & \alpha_3 a_{32} & \alpha_3 a_{33} \end{bmatrix}$$

  - O determinante da matriz de escala é

    $$\det S = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$$

  - Logo, nenhum dos escalares deve ser nulo

Operações L-elementares

- 2- Trocar duas linhas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- Para construir a matriz que troca a linha 2 pela linha 3, basta pegar a matriz identidade e trocar essas duas linhas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O determinante é -1 !!!

Operações L-elementares

- Multiplicar uma linha por um escalar e subtrair numa linha abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - ma_{11} & a_{22} - ma_{12} & a_{23} - ma_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- O determinante da matriz de eliminação é 1.
- A matriz de eliminação é triangular inferior.
- Verifique que o produto de duas triangulares inferiores é também triangular inferior.

Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Forma matricial (aumentada) compacta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Para cada coluna, os elementos sob a diagonal são anulados.
Multiplicador linha "i" coluna "j":

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

Onde a_{jj} é chamado pivot.

Eliminação Gaussiana

X m_{21} -

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

X m_{31} -

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{11} & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} & b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_2 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

A operação anterior corresponde à multiplicação pela matriz de eliminação M_1.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$Ax=b$ -----> $M_1Ax=M_1b$

Eliminação Gaussiana

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} & b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \\ a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{11} & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} & b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_2 \end{array}\right]$$

A nova matriz teve os elementos renomeados com ' para sugerir que os valores serão substituídos na mesma posição de memória.

Eliminação Gaussiana

X m_{32}

-

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right] \qquad m_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{22} & a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23} & b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

Eliminação Gaussiana

O sistema equivalente obtido é triangular superior e pode ser facilmente resolvido pelo método da retrossubstituição.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23} x_3}{a'_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{13} x_3 - a_{12} x_2}{a_{11}}$$

Eliminação Gaussiana

- Observar que a eliminação para a nova coluna se deu através da multiplicação pela matrix M_2.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

A composição das eliminações pode ser escrita como:

$$M_2 M_1 A x = M_2 M_1 b$$

Eliminação Gaussiana

- A matriz A pode ser escrita pelo produto a seguir:

$$A = M_1^{-1} M_2^{-1} M_2 M_1 A$$

Sabemos que a matriz dos multiplicadores é triangular inferior e a matriz resultante do processo de eliminação é triangular superior. Assim, L é triangular inferior, U é triangular superior e seu produto é a matriz A.

$$L = M_1^{-1} M_2^{-1}$$
$$U = M_2 M_1 A$$
$$A = LU$$

Solução de sistemas pela Dec. LU

- Construimos a decomposição LU da matriz de coeficientes do sistema pelo processo de eliminação gaussiana.
- Não é necessário realizar a eliminação no vetor de termos independentes "b".
- Se "b" mudar, a decomposição LU não se altera e pode ser utilizada para obter a nova solução "x".
- "b mudar" significa trocar as cargas na treliça ou as fontes de tensão no circuito.

Solução de sistemas pela Dec. LU

- Resolver pela decomposição LU o sistema a seguir.
- Utilizar o método de Doolittle, isto é, a diagonal da matriz L deve ser toda de elementos "1" por convenção.
- (A convenção oposta é que a matriz U tenha apenas elementos "1" na diagonal, que é a convenção de Crout e não utilizamos no curso)

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$\begin{cases} w + x + y & = & 6 \\ -3w - 17x + y + 2z & = & 2 \\ 4w - 17x + 8y - 5z & = & 2 \\ -5x - 2y + z & = & 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -17 & 1 & 2 \\ 4 & -17 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Quanto multiplica a linha 1 para anular os elementos "-3" e "4"?

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -17 & 1 & 2\\ 4 & -17 & 8 & -5\\ 0 & -5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

X(-3)
(-)

X(4)
(-)

pivot

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & -21 & 4 & -5\\ 0 & -5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Matriz escalonada

multiplicadores

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & -21 & 4 & -5\\ 0 & -5 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$\times\frac{3}{2}$ -

$\times\frac{5}{14}$ -

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & 3/2 & -2 & -8\\ 0 & 5/14 & -24/7 & 2/7\end{bmatrix}$$

$\times\frac{12}{7}$ -

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & 3/2 & -2 & -8\\ 0 & 5/14 & 12/7 & 14\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 3/2 & 1 & 0\\ 0 & 5/14 & 12/7 & 1\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -14 & 4 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -8\\ 0 & 0 & 0 & 14\end{bmatrix}$$

Solução de sistemas pela Dec. LU

- Aplicamos agora o método de Doolittle

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

$$A=LU$$

$$\underline{LU\mathbf{x}=\mathbf{b}}$$

$$L\mathbf{y}=\mathbf{b}$$

$$U\mathbf{x}=\mathbf{y}$$

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/14 & 12/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 6$

$-3y_1 + 2y_2 = 2$

$y_2 = 20$

$4y_1 + 3/2\,y_2 + y_3 = 2$

$y_3 = -52$

...

$y_4 = 84$

Solução pelo método da substituição direta.

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ -52 \\ 84 \end{bmatrix}$$

$14x_4 = y_4$

$x_4 = 6$

$-2x_3 - 8x_4 = y_3$

$x_3 = \frac{-52 + 8 \cdot 6}{-2} = 2$

$x_2 = \frac{y_2 - 4 \cdot 2 - 2 \cdot 6}{-14} = 0$

...

$x_1 = 4$

Solução pelo método da retro-substituição.

Não esquecer que a solução é obtida de baixo para cima.

Solução de sistemas pela Dec. LU

- Exercício:

Resolver o sistema anterior só que agora

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5/14 & 12/7 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 6$

$y_2 = 20$

$y_3 = -52$

$\frac{5}{14} y_2 + \frac{12}{7} y_3 + y_4 = 10$

$y_4 = 92$

Solução de sistemas pela Dec. LU

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 20 \\ -52 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$14x_4 = y_4$

$x_4 = \frac{46}{7}$

$-2x_3 - 8x_4 = y_3$

$x_3 = \frac{-52 + 8 \cdot \frac{46}{7}}{-2} = \frac{-2}{7}$

$x_2 = \frac{20 - \frac{92}{7} + \frac{8}{7}}{-14} = \frac{-4}{7}$

$x_1 + x_2 + x_3 = y_1$

$x_1 = \frac{48}{7}$

Aplicações da Eliminação Gaussiana

- Como calcular o determinante de uma matriz utilizando o processo de eliminação gaussiana?
- Como determinar a matriz inversa pelo processo de eliminação gaussiana?

Problemas na Eliminação Gaussiana

- Como fazer eliminação se pivot for zero?

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Troca de linhas

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Problemas na Eliminação Gaussiana

- E se o pivot for relativamente muito pequeno?

$$\begin{bmatrix} 0{,}001 & 2{,}42 \\ 1{,}00 & 1{,}58 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}20 \\ 4{,}57 \end{bmatrix}$$

Eliminando com 3 significativos:

$$\begin{bmatrix} 0{,}001 & 2{,}42 \\ 0 & -2420 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}20 \\ -5200 \end{bmatrix}$$

Os valores da segunda equação foram desprezados no arredondamento e obtemos a solução errada:

$$x_1 = 0{,}00 \qquad x_2 = 2{,}15$$

O problema foi o multiplicador muito grande.

Problemas na Eliminação Gaussiana

- Com a troca de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 1{,}58 \\ 0{,}001 & 2{,}42 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}57 \\ 5{,}20 \end{bmatrix}$$

Multiplicador pequeno, reduz erro de arredondamento

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 1{,}58 \\ 0 & 2{,}42 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}57 \\ 5{,}20 \end{bmatrix}$$

Obtemos a solução

$$x_1 = 1{,}18$$

$$x_2 = 2{,}15$$

Pivoteamento Parcial

- Estratégia: minimizar os multiplicadores, procurando o maior pivot (denominador) possível.
- Pivoteamento parcial procura o melhor pivot na coluna que está sendo eliminada, sob a diagonal principal.
- O melhor pivot é aquele maior em módulo!!
- Fazem-se trocas de linhas para levar o maior elemento para a diagonal principal

Pivoteamento Parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

pivot

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Matriz de permutação multiplicada à esquerda

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Parcial

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix} \quad \times\left(\frac{-1}{2}\right) \quad \times\frac{1}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & -1{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}75 \end{bmatrix}$$

Sem necessidade de trocar (na verdade, nem poderia)

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0{,}5 \\ 3{,}6 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Total

- O pivoteamento total é uma estratégia mais radical para escolha do pivot de maior módulo.
- O pivot é procurado na submatriz ainda não escalonada.
- É um processo caro e na maioria das vezes não compensa (busca é $O(N^2)$ a cada coluna, não eleva a complexidade total que é $O(N^3)$, mas acrescenta muitas comparações).
- Precisa da troca de linhas e de colunas.
- A troca de colunas interfere na ordem das variáveis!!!

Pivoteamento Total

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 11 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 11 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Troca de colunas é feita pela multiplicação à direita por uma matriz de permutação.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{APP}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$