

CCI-22



Matemática Computacional

Carlos Henrique Q. Forster

CCI-22

Auto-valores e auto-vetores

Notas complementares

Auto-valores e auto-vetores

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$$

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistema homogêneo só tem solução não-trivial se a matriz de coeficientes for singular

$$A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Polinômio característico da matriz A .

$$\det \begin{bmatrix} 10 - \lambda & -4 \\ 12 & -4 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 4$$

Fazendo os vetores da forma $v_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 10-2 & -4 \\ 14 & -4-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0$$

$$8-4x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 10-4 & -4 \\ 14 & -4-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0 \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Propriedades de auto-valores

- O traço da matriz (soma dos elementos da diagonal) é igual à soma dos auto-valores.
- O determinante da matriz é igual ao produto dos auto-valores.
- Se λ_i são autovalores de A , então $1/\lambda_i$ são autovalores de A^{-1} .
- A transposta de A possui os mesmos autovalores de A .

Propriedades de matrizes e autovalores

- Seja $A=P^{-1}BP$. Se existe a matriz P inversível, então A e B são ditas similares.
- Matrizes similares possuem os mesmos autovalores. (E portanto, mesmo traço, mesmo determinante e mesmo posto).
- Numa matriz real simétrica, todos os autovalores são reais.
- Uma matriz é dita positivo-definida se $z^T M z > 0$ para qualquer vetor z real não-nulo.
- Numa matriz positivo-definida, todos autovalores são positivos.

Matriz diagonalizável

- Uma matriz é diagonalizável se for quadrada e similar a uma matriz diagonal, isto é, A é diagonalizável se existe P tal que:
 $A=P^{-1}DP$, onde D é diagonal.
- Uma matriz diagonalizável terá auto-vetores linearmente independentes

Alguns casos especiais

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Auto-valor múltiplo} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Auto-valor nulo}$$

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 \\ -0,4 & 0,3 \end{bmatrix} \text{ Auto-valores complexos}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Matriz defectiva: A multiplicidade algébrica não corresponde à multiplicidade geométrica (multiplicidade 2, mas apenas 1 auto-vetor)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ Dois auto-valores e autovetores correspondentes}$$

Decomposição espectral

- No caso de uma matriz diagonalizável A com n autovalores λ_i e seus autovetores correspondentes (e linearmente independentes)

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1..n$$

Na forma matricial:

$$A \cdot \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{v}_1 & \lambda_2 \mathbf{v}_2 & \lambda_3 \mathbf{v}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Decomposição espectral

- Como multiplicamos cada ***coluna*** por um escalar diferente, utilizamos a multiplicação à direita por uma matriz diagonal para representar essa operação.

$$AV = V \cdot \Lambda$$

onde

$$V = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad e \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Decomposição espectral

- Como V contém colunas linearmente independentes, podemos invertê-la e reescrever o problema de autovalor da forma:

$$A = V \cdot \Lambda \cdot V^{-1}$$

Que é a decomposição espectral da matriz A

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12 = 0$$

$$\text{Raízes: } \lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = -3$$

Exemplo(cont)

- Fixando o primeiro elemento de cada vetor no valor 1, encontramos os auto-vetores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Que forma a matriz V:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Cuja inversa é...

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Assim a decomposição espectral de A é:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Aplicações

- Solução de sistema:
 - $Ax=b$, decompondo A:
 - $VDV^{-1}x=b$
 - $x=VD^{-1}V^{-1}b$
- Inversa:
 - $A=VDV^{-1}$
 - $A^{-1}=VD^{-1}V^{-1}$
 - Note que a inversa da matriz diagonal é simplesmente uma matriz diagonal com os recíprocos dos elementos da matriz diagonal original.

Aplicações

- Potência de matrizes:
 - $A^2=AA=VDV^{-1}VDV^{-1}=VD^2V^{-1}$

$$A^n = V\Lambda^n V^{-1}$$

Notar que:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix} \rightarrow \Lambda^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^n \end{bmatrix}$$

Aplicações

- Soma com mesmos auto-vetores:
 - $A_1=VD_1V^{-1}$
 - $A_2=VD_2V^{-1}$
 - $A_1+A_2=V(D_1+D_2)V^{-1}$
 - Basta portanto, somar os auto-valores nas matrizes D
- Escala
 - $aA=V(aD)V^{-1}$
- Polinômio matricial
 - $P(A)=V P(D) V^{-1}$
- Exponencial de matriz
 - $\text{Exp}(A)=V \text{Exp}(D) V^{-1}$
 - Assim, basta aplicar a função a cada elemento da diagonal.

Exemplo

- Lembrando a série de Fibonacci, com a definição recursiva:
 - $F(0)=1$
 - $F(1)=1$
 - $F(n+1)=F(n)+F(n-1)$
- Reescrevemos na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F(n+2) \\ F(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{bmatrix}$$

Exemplo(cont)

- Encontrar a decomposição da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Obtemos os auto-vetores, Fazendo $v_i=[x \ y]^T$,
com $x=1$ e substituindo em $x + y = \lambda x \rightarrow y = \lambda - 1$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5}-1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Encontrando a inversa da matriz dos auto-vetores.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{5}-1/2 & -\sqrt{5}-1/2 \end{bmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

▪ O resultado da decomposição é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{5}-1/2 & -\sqrt{5}-1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{10} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

Para calcular $F(n)$ a partir do vetor $[1 \ 1]^T$:

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = VD^nV^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

▪ Abrindo a expressão matricial, obtemos:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Justificativa para os métodos de Gauss-Seidel e Jacobi

- Qual o polinômio de Taylor para calcular o recíproco de um número real?
- É recomendável calcular ao invés disso, a seguinte função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

- Para quais valores de x a série é válida para calcular o recíproco de $1-x$?

- No caso matricial, podemos usar a seguinte série de Taylor para obter uma matriz inversa:

$$(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \dots$$

A convergência dessa série depende do chamado "raio espectral" da matriz T , isto é, o maior auto-valor em módulo de T :

$$\rho(T) = |\lambda|_{\max}(T)$$

- Se o raio espectral $\rho(T) < 1$, então "1" não é auto-valor de T , "0" não é auto-valor de $(I-T)$, então $(I-T)^{-1}$ existe.

- A sequência gerada por $\mathbf{x}_{k+1} = T\mathbf{x}_k + \mathbf{c}$

converge se $\rho(T) < 1$, independente de \mathbf{x}_0

$$\mathbf{x}_{k+2} = T(T\mathbf{x}_k + \mathbf{c}) + \mathbf{c} = T^2\mathbf{x}_k + (T + I)\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}_k = T^k\mathbf{x}_0 + (T^{k+1} + \dots + T^2 + T + I)\mathbf{c}$$

- Quando k tende a infinito, temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = (I - T)^{-1} \mathbf{c}$$

- Com a matriz $A = D - L - U$, onde D são os elementos da diagonal, $-L$ aqueles debaixo dela e $-U$ aqueles acima dela:

- Jacobi: $T = D^{-1}(L + U)$ e $\mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$

- Seidel: $T = (D - L)^{-1}U$ e $\mathbf{c} = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$

Decomposição de Cholesky

- Propriedades da matriz real $C = A^T A$ de posto completo:

- Simétrica
- Positiva-definida

- Estas são condições necessárias e suficientes para que exista uma matriz triangular inferior L tal que:

$$C = LL^T$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}l_{11} & l_{31}l_{11} \\ l_{21}l_{11} & l_{22}^2 + l_{21}^2 & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{33}^2 + l_{32}^2 + l_{31}^2 \end{bmatrix}$$

- Igualando termo a termo (notar que é simétrica)

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21}l_{11} & l_{31}l_{11} \\ l_{21}l_{11} & l_{22}^2 + l_{21}^2 & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} \\ l_{31}l_{11} & l_{32}l_{21} + l_{32}l_{22} & l_{33}^2 + l_{32}^2 + l_{31}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{c_{11}} \quad l_{31} = \frac{c_{13}}{l_{11}} \quad l_{32} = \frac{c_{23} - l_{21}l_{31}}{l_{22}}$$

$$l_{21} = \frac{c_{12}}{l_{11}} \quad l_{22} = \sqrt{c_{22} - l_{21}^2} \quad l_{33} = \sqrt{c_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

- A solução do sistema $Cx=b$ é muito similar ao método utilizado na decomposição LU:

- Resolve-se $Ly=b$
- Resolve-se $L^T x=y$