CCI-22

Matemática Computacional

Carlos Alberto Alonso Sanches

CCI-22

3) Raízes de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss, Gauss-Jordan, Decomposição LU, Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Métodos de resolução

- Para a resolução de um sistema linear de equações, há dois grupos de métodos:
  - <u>Métodos diretos</u>: a solução é obtida através da aplicação de um número finito de operações aritméticas
    - Regra de Cramer
    - Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan
    - Decomposição LU
  - <u>Métodos iterativos</u>: a solução é obtida através de uma sequência de aproximações sucessivas, até se alcançar uma resposta que satisfaça a precisão exigida
    - Gauss-Jacobi
    - Gauss-Seidel

Sistemas de Equações Lineares

- Forma geral:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

onde:

a_{ij} são os coeficientes
x_i são as incógnitas
b_i são os termos independentes
n é a ordem do sistema

- Forma matricial:

$Ax = b$ onde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

Exemplo

- Forma geral:

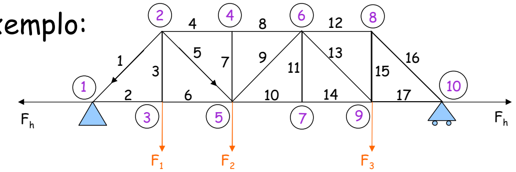
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 1x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo das forças em uma treliça

- Um exemplo:



- Condições de equilíbrio:
  - Na junção 2:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_1 \underbrace{\cos 45^\circ}_{a} + f_4 + f_5 \underbrace{\cos 45^\circ}_{a} = 0 \\ \sum F_x = -a f_1 + f_4 + a f_5 = 0 \\ \sum F_y = -a f_1 - f_3 - a f_5 = 0 \end{cases}$$

  - Na junção 3:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \sum F_y = -F_1 + f_3 = 0 \end{cases}$$

  - Idem para demais junções

- Gerará um sistema de ordem 17

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Regra de Cramer

- A aplicação da regra de Cramer, em um sistema de ordem n, exige o cálculo de quantos determinantes?
  - n para os numeradores e 1 para o denominador

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Tempo de processamento

- Número m de multiplicações, no caso de 17 equações:

multiplicações

$18\ det_{17} = 18\ (\ 17m + 17\ det_{16}\ )$

$= 18\ (\ 17m + 17\ (\ 16m + 16\ det_{15}\ ))$

$= 18\ (\ 17m + 17\ (\ 16m + 16\ (\ 15m + 15\ det_{14}\ )))$

$= 18\ (\ 17m + 17\ (\ 16m + 16\ (\ 15m + 15\ (\ 14m +$
$14\ (\ldots.\ (\ 3m + 3\ (\ 2m\ )\ldots.)))))$

Lembrando: $\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \cdot detA_{-i,-j}$

Tempo de processamento

$= 18\ (\ 17m + 17\ (\ 16m + 16\ (\ 15m + 15\ (\ 14m +$
$14\ (\ldots.\ (\ 3m + 3\ (\ 2m\ )\ldots.)))))$

$$\begin{aligned} = m\ (\ & 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots. \times 17 \times 18\ + \\ + & \quad 3 \times 4 \times 5 \times \ldots. \times 17 \times 18\ + \\ + & \quad 4 \times 5 \times \ldots. \times 17 \times 18\ + \\ + & \quad 5 \times \ldots. \times 17 \times 18\ + \\ \vdots & \qquad \vdots \\ + & \quad 16 \times 17 \times 18\ + \\ + & \quad 17 \times 18\ ) \end{aligned}$$

$= 18!\ (1 + (1/2!) + (1/3!) + \ldots + (1/16!)\ )$ multiplicações

$\approx 9{,}6 \times 10^{15}$ multiplicações

Tempo de processamento

- Quantidade de multiplicações: $\approx 9{,}6 \times 10^{15}$
- Utilizando um supercomputador atual:
  - 10^{11} multiplicações por segundo
  - Tempo gasto: $9{,}6 \times 10^4$ s $\approx$ 1 dia
- Se o sistema fosse de ordem 20, exigiria cerca de 28 anos de processamento nesse mesmo computador!
- Um algoritmo bem mais eficiente é o *Método da Eliminação de Gauss*, que gasta tempo $O(n^3)$

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método da Eliminação de Gauss

- Objetivo
  - Transformação do sistema linear a ser resolvido em um *sistema linear triangular*
- Operações válidas:
  - Troca da ordem das linhas
  - Troca da ordem das colunas (com exceção dos termos independentes)
  - Multiplicação de uma equação por um número real não nulo
  - Substituição de uma equação por uma combinação linear entre ela mesma e outra equação

Sistemas Lineares Triangulares

- Triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Resolução de um sistema triangular

- Exemplo:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\
x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\
4x_3 - 5x_4 &= 3 \\
2x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

- Passos da resolução:

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$

$$
\begin{aligned}
4x_3 - 5x_4 &= 3 \\
4x_3 - 5 \cdot 1 &= 3 \\
x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\
x_2 + 2 - 2 \cdot 1 &= -1 \\
x_2 &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\
3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 &= -10 \\
x_1 &= 1
\end{aligned}
$$

Passos

- Considere a matriz aumentada $[Ab]$:

$$
[Ab] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \longleftarrow \text{Linha } L_1 \\ \longleftarrow \text{Linha } L_2 \\ \\ \longleftarrow \text{Linha } L_n \end{array}
$$

- Passo 1: anular os coeficientes de x_1 nas linhas L_2 a L_n
  - Substituir a linha L_2 pela combinação linear:

    $$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad \text{onde} \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

  - Se $a_{11} = 0$, trocar L_1 com L_k, onde $a_{k1} \neq 0$
    - Se L_k não existir, então o sistema não tem solução
  - Continuar analogamente para linhas L_j , $2 < j \leq n$
- Passo i, $1 < i < n$: anular os coeficientes de x_i nas linhas L_{i+1} a L_n

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1
\end{aligned}
\qquad
[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$$

$$L_2 = [4 \ \ 4 \ \ -3 \ \ 3] - 2 \cdot [2 \ \ 3 \ \ -1 \ \ 5]$$
$$L_2 = [0 \ \ -2 \ \ -1 \ \ -7]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1$$

$$L_3 = [2 \ \ -3 \ \ 1 \ \ -1] - 1 \cdot [2 \ \ 3 \ \ -1 \ \ 5]$$
$$L_3 = [0 \ \ -6 \ \ 2 \ \ -6]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

$$L_3 = [0 \ \ -6 \ \ 2 \ \ -6] - 3 \cdot [0 \ \ -2 \ \ -1 \ \ -7]$$
$$L_3 = [0 \ \ 0 \ \ 5 \ \ 15]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{cases}
5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \\
-2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = 2 \\
2x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1
\end{cases}
$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38 \end{aligned} \qquad [Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$

Nos cálculos a seguir, consideraremos F(10,3,-5,5):

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134] - (27/1) \cdot [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57]$$
$$L_2 = [0 \quad 2 \quad -1400 \quad -1410]$$
$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \quad 2 \quad 14 \quad 38] - (22/1) \cdot [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57]$$
$$L_3 = [0 \quad -86 \quad -1130 \quad -1210]$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array}\right]$$

Exemplo 2

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array}\right]$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad -86 \quad -1130 \quad -1210] - (-86/2) \cdot [0 \quad 2 \quad -1400 \quad -1410]$$
$$L_3 = [0 \quad 0 \quad -61300 \quad -61800]$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{array}\right]$$

x_3 = -61800/(-61300) = 1,01

x_2 = [-1410 - (-1400)·1,01]/2 = 0,0

x_1 = [57 - 52·1,01 - 4·0,0]/1 = 4,5

No entanto, a solução exata é:

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$
- $x_3 = 1$

Pivoteamentos parcial e completo

- Pivôs pequenos geram multiplicadores grandes, que aumentam os erros de arredondamento...
- Uma simples alteração no método de Gauss é escolher como pivô o *elemento de maior módulo*:
  - em cada coluna (pivoteamento parcial)
  - dentre todos os elementos possíveis no processo de eliminação (pivoteamento completo): exige um maior esforço computacional
- Voltemos a resolver o exemplo anterior com precisão de 3 casas decimais, mas com pivoteamento parcial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$

Exemplo 2 com pivoteamento parcial

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57] - (1/27) \cdot [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134]$$
$$L_2 = [0 \quad -0{,}07 \quad 52{,}1 \quad 52]$$
$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \quad 2 \quad 14 \quad 38] - (22/27) \cdot [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134]$$
$$L_3 = [0 \quad -87{,}6 \quad 16.5 \quad -71]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0.07 & 52{,}1 & 52 \\ 0 & -87{,}6 & 16{,}5 & -71 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87{,}6 & 16{,}5 & -71 \\ 0 & -0{,}07 & 52{,}1 & 52 \end{array}\right]$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad -0{,}07 \quad 52{,}1 \quad 52] - (0{,}07/87{,}6) \cdot [0 \quad -87{,}6 \quad 16{,}5 \quad -71]$$
$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 52{,}1 \quad 52{,}1]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87{,}6 & 16{,}5 & -71 \\ 0 & 0 & 52{,}1 & 52{,}1 \end{array}\right]$$

x_3 = 52,1/52,1 = 1

x_2 = [-71-16,5·1]/(-87,6) = 0,999

x_1 = [134 – (-3)·1 – 110·0,999]/27 = 1,00

Exercício

- Considere o sistema linear abaixo:

$$0{,}0002x_1 + 2x_2 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

- Utilizando aritmética de três dígitos decimais, resolva-o através da eliminação de Gauss:
  - sem pivoteamento parcial
  - com pivoteamento parcial
- Confira os resultados encontrados

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema com a finalidade de transformá-lo em um *sistema diagonal equivalente*, isto é, são nulos todos os coeficientes a_{ik}, quando $i \neq k$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 1$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \quad 5 \quad 1 \quad 1] - (1/5) \cdot [5 \quad 2 \quad 3 \quad 2]$$
$$L_2 = [0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6]$$
$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2 \quad 3 \quad 2 \quad 4] - (2/5) \cdot [5 \quad 2 \quad 3 \quad 2]$$
$$L_3 = [0 \quad 2{,}2 \quad 0{,}8 \quad 3{,}2]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 2{,}2 & 0{,}8 & 3{,}2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$[Ab]=\begin{bmatrix}5 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0 & 2{,}2 & 0{,}8 & 3{,}2\end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32}\cdot L_2 = [0 \quad 2{,}2 \quad 0{,}8 \quad 3{,}2] - (2{,}2/4{,}6)\cdot[0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6]$$
$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913]$$

$$[Ab]=\begin{bmatrix}5 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6\\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913\end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{23}\cdot L_3 = [0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6] - (0{,}4/0{,}609\cdot[0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913]$$
$$L_2 = [0 \quad 4{,}6 \quad 0 \quad -1{,}313]$$

Exemplo

$$[Ab]=\begin{bmatrix}5 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 4{,}6 & 0 & -1{,}313\\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913\end{bmatrix}$$

$$L_1 = [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - (2/4{,}6)\cdot[0 \quad 4{,}6 \quad 0 \quad -1{,}313]$$
$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1{,}571]$$
$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1{,}571] - (3/0{,}609)\cdot[0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913]$$
$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 0 \quad -12{,}78]$$

$$[Ab]=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & -12{,}78\\ 0 & 4{,}6 & 0 & -1{,}313\\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913\end{bmatrix}$$

A solução é:

- x_1 = -2,556
- x_2 = -0,2854
- x_3 = 4,783

Outra aplicação

- Uma variação do método de Gauss-Jordan pode ser utilizada para se encontrar a inversa de uma matriz *A* quadrada de ordem n
- Basta transformar a matriz *A* na correspondente matriz identidade, aplicando essas mesmas operações em uma matriz identidade de ordem n

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|A^{-1}]$$

Refinamento por resíduos

- Se $x^{(1)}$ for encontrado como solução do sistema $Ax = b$, então o erro dessa solução é $x - x^{(1)}$
- Multiplicando o erro por *A*:
  - $A(x - x^{(1)}) = Ax - Ax^{(1)} = b - b^{(1)} = r^{(1)}$ — resíduo
- O resíduo pode ser utilizado para se encontrar uma solução melhorada $x^{(2)}$:
  - $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$, onde $\delta^{(1)}$ é um vetor de correção
  - $Ax^{(2)} = b \Leftrightarrow A(x^{(1)} + \delta^{(1)}) = b \Leftrightarrow A\delta^{(1)} = b - Ax^{(1)} = r^{(1)}$
  - $\delta^{(1)}$ é solução do sistema $A\delta = r^{(1)}$
- Esses cálculos permitem um processo de refinamento da solução do sistema $Ax = b$

Exemplo

- Vamos refinar o sistema abaixo:

$$\begin{aligned} 8{,}7x_1 + 3{,}0x_2 + 9{,}3x_3 + 11{,}0x_4 &= 16{,}4 \\ 24{,}5x_1 - 8{,}8x_2 + 11{,}5x_3 - 45{,}1x_4 &= -49{,}7 \\ 53{,}3x_1 - 8{,}8x_2 - 23{,}5x_3 + 11{,}4x_4 &= -80{,}8 \\ 21{,}0x_1 - 81{,}0x_2 - 13{,}2x_3 + 21{,}5x_4 &= -106{,}3 \end{aligned}$$

- Através do método de Gauss, podemos encontrar a solução abaixo:

$$x^{(1)} = [0{,}97 \quad 1{,}98 \quad -0{,}97 \quad 1{,}00]^T$$

- Cálculo do resíduo:

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}042 \\ 0{,}214 \\ 0{,}594 \\ -0{,}594 \end{bmatrix}$$

Não está bom...

Exemplo

- Cálculo do vetor de correção $\delta^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 8{,}7 & 3{,}0 & 9{,}3 & 11{,}0 \\ 24{,}5 & -8{,}8 & 11{,}5 & -45{,}1 \\ 53{,}3 & -8{,}8 & -23{,}5 & 11{,}4 \\ 21{,}0 & -81{,}0 & -13{,}2 & 21{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}042 \\ 0{,}214 \\ 0{,}594 \\ -0{,}594 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}0295 \\ 0{,}0195 \\ -0{,}0294 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Solução melhorada:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 2{,}0000 \\ -0{,}9999 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Novo resíduo:

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}009 \\ -0{,}011 \\ 0{,}024 \\ 0{,}013 \end{bmatrix}$$

Melhor que o anterior

- Cálculo do novo vetor de correção:

$$\delta^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}0002 \\ -0{,}0002 \\ -0{,}0007 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Outra solução melhorada:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Novo resíduo:

$$r^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melhor aproximação

- Dado um sistema $Ax = b$, sejam y e z duas aproximações da solução exata x. Como saber qual delas é a melhor?
- A estratégia mais lógica parece ser comparar os respectivos resíduos: o menor seria da melhor solução
- Infelizmente, isso nem sempre é verdade...
- Exemplo:

$$\begin{cases} 0{,}24x_1 + 0{,}36x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}84 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}24x_3 = 0{,}52 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}25x_3 = 0{,}64 \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} 25 \\ -14 \\ -1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_y = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}00 \\ 0{,}08 \end{bmatrix} \quad r_z = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}24 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Conclusão: nem sempre a aproximação de menor resíduo é a melhor ou a mais exata
- Se a busca por resíduos menores não garante melhores soluções, como saber se o processo de refinamento por resíduos funciona?

Condicionamento de problemas

- Um problema é dito <u>mal condicionado</u> se pequenas alterações nos dados de entrada ocasionam grandes erros no resultado final
- Exemplo:

$$\begin{cases} 0{,}992x + 0{,}873y = 0{,}119 \\ 0{,}481x + 0{,}421y = 0{,}060 \end{cases}$$

Solução: x=1 e y=-1

- Suponha que os valores desse sistema sejam obtidos experimentalmente, e por isso os termos independentes possam variar de ±0,001:

Valor perturbado

$$\begin{cases} 0{,}992x + 0{,}873y = 0{,}120 \\ 0{,}481x + 0{,}421y = 0{,}060 \end{cases}$$

Solução: x=0,815 e y=-0,789

Erro na entrada: (|0,119-0,120|/|0,119|) ≈ 0,8%

Erro no resultado: (|1,0-0,815|/|1,0|) ≈ 18,5%

Outro exemplo

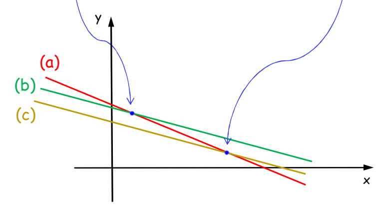
- Considere os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x + 3y = 11 & \text{(a)} \\ 1{,}5x + 4{,}501y = 16{,}503 & \text{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 11 & \text{(a)} \\ 1{,}5x + 4{,}501y = 16{,}500 & \text{(c)} \end{cases}$$

Solução: x=2 e y=3

Solução: x=10,28 e y=0,24



Métricas de condicionamento

- Há métricas para o condicionamento de sistemas lineares, baseadas em normas de vetores e matrizes (vide Cláudio & Marins)
- No entanto, esses cálculos são difíceis...
- Também é possível identificar o condicionamento de um sistema linear apenas com o uso dos refinamentos:
  - Se os resíduos $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(n)}$ são pequenos, mas as correções $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \ldots, \delta^{(n)}$ são grandes, então o *sistema é mal condicionado*
  - Para *sistemas bem condicionados*, bastam no máximo dois refinamentos (ou seja, $\delta^{(2)}$ é muito pequeno)
- Ao longo desse processo, os resíduos e as correções devem ser calculados com precisão dupla

Exemplo

- Considere o sistema abaixo em F(10,5,-98,100):

$$\begin{cases} 2{,}4759x_1 + 1{,}6235x_2 + 4{,}6231x_3 = 0{,}064700 \\ 1{,}4725x_1 + 0{,}95890x_2 - 1{,}3253x_3 = 1{,}0473 \\ 2{,}6951x_1 + 2{,}8965x_2 - 1{,}4794x_3 = -0{,}67890 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}8406 \\ -2{,}0717 \\ -0{,}24419 \end{bmatrix}$$

- Primeiro refinamento em F(10,10,-98,100):

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}0648 \\ 1{,}0473 \\ -0{,}6789 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}064821801 \\ 1{,}047355377 \\ -0{,}678823304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}000121801 \\ -0{,}000055377 \\ -0{,}000076696 \end{bmatrix}$$

Resíduos pequenos

- Resolução de $A\delta^{(1)} = r^{(1)}$:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} -0{,}0000042282 \\ 0{,}000025110 \\ -0{,}000057765 \end{bmatrix}$$

Correções pequenas

- Solução melhorada $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}8405 \\ -2{,}0717 \\ -0{,}24419 \end{bmatrix}$$

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Uma outra forma de ver...

- Consideremos o sistema de 3 equações $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A^{(0)} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Após a primeira fase da eliminação de Gauss:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = M^{(0)}.A^{(0)}, \quad \text{onde} \quad M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Após a segunda fase da eliminação de Gauss:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = M^{(1)}.A^{(1)}, \quad \text{onde} \quad M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Uma outra forma de ver...

- Resumindo:
  - $A = A^{(0)}$
  - $A^{(1)} = M^{(0)}.A^{(0)} = M^{(0)}.A$
  - $A^{(2)} = M^{(1)}.A^{(1)} = M^{(1)}.M^{(0)}.A$
  - $A = (M^{(1)}.M^{(0)})^{-1}.A^{(2)}$
  - $A = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}.A^{(2)}$
- É fácil comprovar que:

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = L.U$$

Decomposição LU

- A comprovação anterior pode ser generalizada em um teorema

$$A = L.U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Dada uma matriz quadrada de ordem n, seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A. Suponha que $\det(A_k) \neq 0$, $0 \leq k \leq n-1$. Então:
  - Existe uma única matriz triangular inferior $L=(m_{ij})$, com $m_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$. Os demais são os multiplicadores da Eliminação de Gauss
  - Existe uma única matriz triangular superior $U=(u_{ij})$, tais que $L.U = A$
  - $\det(A) = u_{11}.u_{12}. \ldots .u_{nn}$

Decomposição LU

- Portanto, dados o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição (ou fatoração) LU da matriz A, temos:
  - $Ax = b \Leftrightarrow (L.U)x = b$
- Chamando $Ux = y$, o sistema original passa a ser $Ly = b$, ou seja, surgem dois sistemas triangulares
- Por outro lado, é fácil verificar que $y = L^{-1}.b$ é o vetor b acumulando as operações da Eliminação de Gauss
- Por exemplo, no caso de um sistema com 3 equações:
  - Como $L = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}$, então $L^{-1} = M^{(1)}.M^{(0)}$
  - Portanto, $y = M^{(1)}.M^{(0)}.b$
- Vantagem da decomposição $A = L.U$: uma vez calculadas as matrizes L e U, resolvemos mais rapidamente qualquer sistema com a matriz A. Isso é útil, por exemplo, no refinamento por resíduos

Exemplo

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

multiplicadores

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & \boxed{1} & -4 \end{bmatrix}
$$

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\
4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3
\end{aligned}
\qquad
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}
$$

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b$$

$$
Ly = b \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
Ux = y \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 1/3\,x_2 + 2/3\,x_3 &= 5/3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Outra aplicação

- A decomposição LU também é útil no cálculo da matriz inversa
- Resolver o sistema $AX = B$, onde A, X e B são matrizes de ordem n, é o mesmo que resolver n sistemas $Ax = b$, onde x e b são vetores de tamanho n
- A inversa A^{-1} da matriz A pode ser encontrada através da resolução do sistema $AX = I$, onde I é a matriz identidade
- Nesse caso, basta realizar uma única vez a decomposição LU da matriz A, e depois utilizá-la na resolução de n sistemas

Decomposição LU com pivoteamento

- É possível incorporar as estratégias de pivoteamento parcial ou completo à decomposição LU
- Uma matriz quadrada P de ordem n é uma *matriz de permutação* se for obtida da correspondente matriz identidade através de permutações em suas linhas ou colunas
- As eventuais permutações de linhas ou colunas na matriz $A^{(k)}$, obtida em um passo intermediário da Eliminação de Gauss, podem ser realizadas através da multiplicação por uma matriz de permutação
- Exemplo:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad P.A^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A'^{(0)} = P^{(0)}.A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{1/4} & 2 & 11/4 \\ \boxed{3/4} & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A'^{(1)} = P^{(1)}.A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{3/4} & -4 & 13/4 \\ \boxed{1/4} & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{3/4} & -4 & 13/4 \\ \boxed{1/4} & \boxed{-1/2} & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

- L.U = A' = P.A, onde P = $P^{(1)}.P^{(0)}$:

$$A' = P.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- A'x = b' ⇔ PAx = Pb ⇔ LUx = Pb

Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

Ax = b ⇒ LUx = Pb

$$Ly = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Métodos iterativos

- Como foi inicialmente comentado, os métodos iterativos para resolução de sistemas lineares consistem em encontrar uma sequência de aproximações sucessivas
- Dada uma estimativa inicial $x^{(0)}$, calcula-se a sequência $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$..., até que determinado critério de parada seja satisfeito
- O sistema $Ax = b$ é transformado em $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$, $k>0$, onde C é uma matriz e g um vetor
- Possíveis critérios de parada:
  - máximo erro absoluto ou relativo
  - número de iterações
- Principais métodos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear em sua forma inicial:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

- Isolando a i-ésima incógnita na i-ésima equação:
  - $x_1 = (b_1 - a_{12}\,x_2 - \dots - a_{1n}\,x_2)/a_{11}$
  - $x_2 = (b_2 - a_{21}\,x_1 - \dots - a_{2n}\,x_n)/a_{22}$

  ...
  - $x_n = (b_n - a_{n1}\,x_1 - \dots - a_{n,n-1}\,x_{n-1})/a_{nn}$

Método de Gauss-Jacobi

- Dessa forma, para $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Exemplos de critérios de parada:
  - Erro absoluto: $d^{(k)} = \max_i |x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon$
  - Erro relativo: $d_r^{(k)} = d^{(k)}/(\max_i |x^{(k)}|) < \varepsilon$

Exemplo

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0{,}05 \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0{,}26$

$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0{,}26$ $\qquad d_r^{(1)} = 0{,}34/(\max |x_i^{(1)}|) = 0{,}1828 > \varepsilon$

$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0{,}34$

Exemplo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ -1{,}98 \\ 0{,}966 \end{bmatrix}$$ $\qquad d_r^{(2)} = 0{,}12/1{,}98 = 0{,}0606 > \varepsilon$

$$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{bmatrix} 0{,}9994 \\ -1{,}9888 \\ 0{,}9984 \end{bmatrix}$$ $\qquad d_r^{(3)} = 0{,}0324/1{,}9888 = 0{,}0163 < \varepsilon$

Critério das linhas

- Em um método iterativo, a convergência para a solução exata não é garantida: é preciso que o sistema satisfaça alguns requisitos
- Há uma condição suficiente para a convergência do Método de Gauss-Jacobi, conhecido como o *critério das linhas* :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Exemplos

- Considere o exemplo anterior:

$$\left.\begin{array}{lcl} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 & \longleftarrow & 2+1 < 10 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 & \longleftarrow & 1+1 < 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 & \longleftarrow & 2+3 < 10 \end{array}\right\} \text{Garantia de convergência}$$

- Considere o exemplo abaixo:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 = 3 & \longleftarrow & 1 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = -3 & \longleftarrow & 1 < 3 \end{array}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

  - No entanto, o método de Gauss-Jacobi converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
  - Isso mostra que o critério das linhas é <u>suficiente</u>, mas <u>não necessário</u>

Demonstração

- Sejam:
  - $x^* = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
  - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, ..., x^{(k)}_n]^T$: a k-ésima aproximação de x^*
  - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: o erro na k-ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k\to\infty} e^{(k)}_i = 0$, $1 \leq i \leq n$
- No Método de Gauss-Jacobi, pode-se constatar que:
  - $e^{(k+1)}_1 = -(a_{12}e^{(k)}_2 + a_{13}e^{(k)}_3 + ... + a_{1n}e^{(k)}_n)/a_{11}$
  - $e^{(k+1)}_2 = -(a_{21}e^{(k)}_1 + a_{23}e^{(k)}_3 + ... + a_{2n}e^{(k)}_n)/a_{22}$
  - $e^{(k+1)}_n = -(a_{n1}e^{(k)}_1 + a_{n2}e^{(k)}_2 + ... + a_{n(n-1)}e^{(k)}_{n-1})/a_{nn}$
- Sejam:
  - $E(k) = \max_{1\leq i\leq n}\{|e^{(k)}_i|\}$
  - $\alpha_i = (|a_{i1}| + ... + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + ... + |a_{in}|)/|a_{ii}|$, $1 \leq i \leq n$
    Quando o critério das linhas é satisfeito, $\alpha_i < 1$

Demonstração (continuação)

- Quando $k\to\infty$, $x^{(k)}\to x^*$ é equivalente a $E^{(k)}\to 0$
- Demonstraremos que $E^{(k+1)} \leq \alpha.E^{(k)}$, onde $\alpha = \max_{1\leq i\leq n}\{\alpha_i\}$
- Para $1 \leq i \leq n$:
  - $e^{(k+1)}_i = -(a_{i1}e^{(k)}_1 + ... + a_{i(i-1)}e^{(k)}_{i-1} + a_{i(i+1)}e^{(k)}_{i+1} + ... + a_{in}e^{(k)}_n)/a_{ii}$
  - $|e^{(k+1)}_i| \leq (|a_{i1}|.|e^{(k)}_1| + ... + |a_{i(i-1)}|.|e^{(k)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}|.|e^{(k)}_{i+1}| + ... + |a_{in}|.|e^{(k)}_n|)/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k+1)}_i| \leq (|a_{i1}| + ... + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + ... + |a_{in}|).E^{(k)}/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k+1)}_i| \leq \alpha_i.E^{(k)}$
- Portanto, $E^{(k+1)} \leq \alpha.E^{(k)}$
- Consequentemente, $E^{(k+1)}/E^{(k)} \leq \alpha$
  Como $\alpha<1$, então $E^{(k)}\to 0$ quando $k\to\infty$: há convergência!

Mais um exemplo

- Considere o sistema a seguir:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 & \longleftarrow & 3+1 > 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 & \longleftarrow & 5+2 > 2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 & \longleftarrow & 6 < 8 \end{array}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

  - No entanto, uma permutação entre as duas primeiras linhas garante a convergência:

$$\left.\begin{array}{lcl} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 & \longleftarrow & 2+2 < 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 & \longleftarrow & 1+1 < 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 & \longleftarrow & 6 < 8 \end{array}\right\} \text{Garantia de convergência}$$

  - Quando o critério das linhas não for satisfeito, convém tentar uma permutação de linhas e/ou colunas

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Seidel

- Analogamente ao Método de Gauss-Jacobi, calcula-se $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- No entanto, utiliza-se no cálculo de $x_j^{(k+1)}$:
  - valores calculados na mesma iteração: $x_1^{(k+1)},\ldots,x_{j-1}^{(k+1)}$
  - valores da iteração anterior: $x_{j+1}^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}$

Exemplo

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \varepsilon = 0{,}05 \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Processo iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1 - 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k+1)} - 0{,}25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -0{,}5x_1^{(k+1)} - 0{,}5x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1 - 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k+1)} - 0{,}25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -0{,}5x_1^{(k+1)} - 0{,}5x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

- Primeira iteração (k=0):

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} &= 1{,}5 - 0{,}75.1 - 0 = 0{,}75 \\ x_3^{(1)} &= -0{,}5.1 - 0{,}5.0{,}75 = -0{,}875 \end{aligned} \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}75 \\ -0{,}875 \end{bmatrix}$$

$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$

$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0{,}75$ $\qquad d_r^{(1)} = 1/(\max |x_i^{(1)}|) = 1 > \varepsilon$

$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0{,}875$

Exemplo

$$x_1^{(k+1)} = 1 - 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}2x_3^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k+1)} - 0{,}25x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = -0{,}5x_1^{(k+1)} - 0{,}5x_2^{(k+1)}$$

- Segunda iteração (k=1):

$$x_1^{(2)} = 1 - 0{,}2.0{,}75 - 0{,}2.(-0{,}875) = 1{,}025$$
$$x_2^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75.1{,}025 - 0{,}25.(-0{,}875) = 0{,}95$$
$$x_3^{(2)} = -0{,}5.1{,}025 - 0{,}5.0{,}95 = -0{,}9875$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{bmatrix}$$

$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0{,}025$

$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0{,}20$ $\quad d_r^{(2)} = 0{,}2/(\max |x_i^{(2)}|) = 0{,}1951 > \varepsilon$

$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0{,}1125$

Exemplo

$$x_1^{(k+1)} = 1 - 0{,}2x_2^{(k)} - 0{,}2x_3^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k+1)} - 0{,}25x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = 0 - 0{,}5x_1^{(k+1)} - 0{,}5x_2^{(k+1)}$$

- Terceira iteração (k=2):

$$x_1^{(3)} = 1 - 0{,}2.0{,}95 - 0{,}2.(-0{,}9875) = 1{,}0075$$
$$x_2^{(3)} = 1{,}5 - 0{,}75.1{,}0075 - 0{,}25.(-0{,}9875) = 0{,}9912$$
$$x_3^{(3)} = -0{,}5.1{,}0075 - 0{,}5.0{,}9912 = -0{,}9993$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}$$

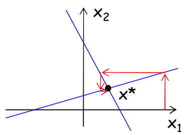
$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0{,}0175$

$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0{,}0412$ $\quad d_r^{(3)} = 0{,}0412/(\max |x_i^{(3)}|) = 0{,}0409 < \varepsilon$

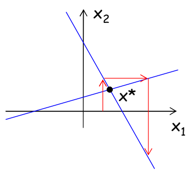
$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0{,}0118$

Interpretação geométrica

- No caso de um sistema linear de ordem 2, é possível visualizar a convergência do método:



- Os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ satisfazem a primeira equação, enquanto os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ satisfazem a segunda



- No mesmo sistema, a convergência pode não ocorrer...

Critério de Sassenfeld

- Sejam os seguintes valores:

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

$$\beta_i = \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right] \text{, para } 1 < i \le n$$

$$\beta = \max \{\beta_j\},\ 1 \le j \le n$$

- Se $\beta < 1$, então o Método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$
  - Quanto menor for β, mais rápida será a convergência

Exemplo

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 &= 0{,}4 \\
0{,}6x_1 + 3x_2 - 0{,}6x_3 - 0{,}3x_4 &= -7{,}8 \\
-0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + x_3 + 0{,}2x_4 &= 1{,}0 \\
0{,}4x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 + 4x_4 &= -10{,}0
\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0{,}2 + 0{,}2) = 0{,}7$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}3) = 0{,}44$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1} \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}44 + 0{,}2) = 0{,}358$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4} \cdot (0{,}4 \cdot 0{,}7 + 1{,}2 \cdot 0{,}44 + 0{,}8 \cdot 0{,}358) = 0{,}2736$$

$$\beta = 0{,}7 < 1$$

Demonstração

- Sejam:
  - $x^* = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
  - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \ldots, x^{(k)}_n]^T$: a k-ésima aproximação de x^*
  - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: o erro na k-ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k\to\infty} e^{(k)}_i = 0$, $1 \le i \le n$
- No Método de Gauss-Seidel, pode-se constatar que:
  - $e^{(k+1)}_1 = -(a_{12}e^{(k)}_2 + a_{13}e^{(k)}_3 + \ldots + a_{1n}e^{(k)}_n)/a_{11}$
  - $e^{(k+1)}_2 = -(a_{21}e^{(k+1)}_1 + a_{23}e^{(k)}_3 + \ldots + a_{2n}e^{(k)}_n)/a_{22}$
  - $e^{(k+1)}_n = -(a_{n1}e^{(k+1)}_1 + a_{n2}e^{(k+1)}_2 + \ldots + a_{n(n-1)}e^{(k+1)}_{n-1})/a_{nn}$
- Sejam:
  - $E(k) = \text{máx}_{1\le i\le n}\{|e^{(k)}_i|\}$
  - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|)/|a_{11}|$
  - $\beta_i = (\beta_1.|a_{i1}| + \ldots + \beta_{i-1}.|a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|)/|a_{ii}|$, $1 < i \le n$

Demonstração (continuação)

- Quando $k\to\infty$, $x^{(k)}\to x^*$ é equivalente a $E^{(k)}\to 0$
- Demonstraremos por indução em i ($1\le i\le n$) que $E^{(k+1)} \le \beta.E^{(k)}$, onde $\beta = \text{máx}_{1\le i\le n}\{\beta_i\}$
- Base (i=1):
  - $|e^{(k+1)}_1| \le (|a_{12}|.|e^{(k)}_2| + |a_{13}|.|e^{(k)}_3| + \ldots + |a_{1n}|.|e^{(k)}_n|)/|a_{11}|$
  - $|e^{(k+1)}_1| \le [(|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|)/|a_{11}|].\ \text{máx}_{1\le i\le n}\{|e^{(k)}_i|\}$
  - $|e^{(k+1)}_1| \le \beta_1.E^{(k)} \le \beta.E^{(k)}$
  - Hipótese: $|e^{(k+1)}_{i-1}| \le \beta_{i-1}.E^{(k)} \le \beta.E^{(k)}$
- Passo:
  - $|e^{(k+1)}_i| \le (|a_{i1}|.|e^{(k+1)}_1| + \ldots + |a_{i(i-1)}|.|e^{(k+1)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}|.|e^{(k)}_{i+1}| + \ldots + |a_{in}|.|e^{(k)}_n|)/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k+1)}_i| \le (|a_{i1}|.\beta_1 + \ldots + |a_{i(i-1)}|.\beta_{i-1} + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|).E^{(k)}/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k+1)}_i| \le \beta_i.E^{(k)} \le \beta.E^{(k)}$
- Portanto, $E^{(k+1)}/E^{(k)} \le \beta$
- Como $\beta<1$, então $E^{(k)}\to 0$ quando $k\to\infty$: há convergência!

Exemplos

- Considere o sistema abaixo, anteriormente visto:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= -3 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} \beta_1 &= 1/1 = 1 \\ \beta_2 &= (1.1)/3 = 1/3 \\ \beta &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

  - No entanto, o Método de Gauss-Seidel converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
  - Isso mostra que o critério de Sassenfeld, como o critério das linhas, é <u>suficiente</u>, mas <u>não necessário</u>
- Considere outro sistema:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 &= 23 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta_1 &= 1/10 = 0{,}1 \\ \beta_2 &= (6.0{,}1)/2 = 0{,}3 \\ \beta &= 0{,}3 < 1 \end{aligned}$$

  - Neste caso, o critério de Sassenfeld garante a convergência, mas o critério das linhas, não...

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Relação entre os critérios

- Se um sistema satisfaz o critério das linhas, então também satisfará o critério de Sassenfeld
- Demonstração:
  - Seja $\alpha = \text{máx}_{1 \leq i \leq n}\{\alpha_i\} < 1$,
    onde $\alpha_i = (|a_{i1}| + ... + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + ... + |a_{in}|)/|a_{ii}|$
  - Vamos provar por indução em i que $\beta_i \leq \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq n$
  - Base (i=1):
    - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + ... + |a_{1n}|)/|a_{11}| = \alpha_1 < 1$
  - Hipótese: $\beta_i \leq \alpha_i < 1$, $1 \leq i < n$
  - Passo ($1 \leq i \leq n$):
    - $\beta_i = (\beta_1.|a_{i1}| + ... + \beta_{i-1}.|a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + ... + |a_{in}|)/|a_{ii}|$
    - $\beta_i \leq (|a_{i1}| + ... + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + ... + |a_{in}|)/|a_{ii}| = \alpha_i < 1$
  - Portanto, $\alpha < 1 \Rightarrow \beta < 1$
- A volta nem sempre é verdadeira...

Considerações finais

- Tanto o critério das linhas como o critério de Sassenfeld são condições *suficientes* para a convergência, mas não *necessárias*
- Em sistemas esparsos (com grande número de coeficientes nulos), o Método da Eliminação de Gauss não é apropriado, pois não preserva esta vantajosa qualidade. Nesses casos, convém utilizar métodos iterativos
- Os métodos iterativos são menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento

Métodos diretos *versus* iterativos

- Convergência
  - Diretos: não faz sentido considerar essa questão, pois calculam a solução exata
  - Iterativos: ocorre sob determinadas condições
- Esparsidade da matriz de coeficientes
  - Diretos: alteram a estrutura da matriz
  - Iterativos: utilizam sempre a matriz inicial
- Erros de arredondamento
  - Diretos: ocorrem a cada etapa e acumulam-se
  - Iterativos: somente os erros da última etapa afetam a solução