Matemática Computacional → Solução de problemas matemáticos por meio de algoritmos

↓

Conjunto finito de passos finitos

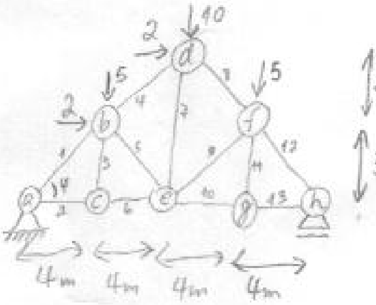
↓

termina em tempo finito

- Matemática Numérica ↓ operações de +, −, *, / e representação de números com ~~dígitos finitos~~ um número finito de dígitos
- Matemática Simbólica ↓ literal $a^2+ab+b^2-(a+b)^2 \to 0$
- Matemática Gráfica ↓ "Desenho Geométrico"

Sistemas de Equações Lineares

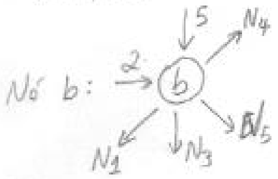
de onde vem...



$\cos\varphi = c = 4/5$

$\sin\varphi = s = 3/5$

Nó b:



eixo x: → +

$2 + N_4\cdot c + N_5\cdot c - N_1\cdot c = 0$

eixo y: ↓ +

$5 + N_3 + N_5\cdot s + N_9\cdot s - N_4\cdot s = 0$

Equações : 8 nós e 2 equações por nó → 16 equações

13 barras → 13 incógnitas

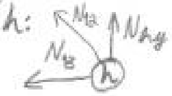
mais incógnitas: N_{ax}, N_{ay}, N_{hy}

Nó a:

$N_{ay} + N_1\cdot s = 0$

$N_{ax} - N_2 - N_1\cdot c = 0$

Nó h:



$N_{13} + N_{12}\cdot c = 0$

$N_{hy} + N_{12}\cdot s = 0$

Nó c: $N_2 - N_6 = 0$

$N_3 = 0$

Nó d: $2 + N_8\cdot c - N_4\cdot c = 0$

$10 + N_7 + N_8\cdot s + N_4\cdot s = 0$

Nó e: $N_6 - N_{10} + N_5 c - N_9 c = 0$

$N_7 + N_5 s + N_9 s = 0$

Nó f: $N_8 c + N_9 c - N_{12} c = 0$

$N_{11} + N_{12} s + N_9 s + 5 - N_8 s = 0$

Nó g: $N_{10} - N_{13} = 0$

$N_{11} = 0$

$$
\begin{array}{c}
a \\ \\ h \\ \\ b \\ \\ c \\ \\ d \\ \\ e \\ \\ f \\ \\ g \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-c & -1 & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & c & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & s & & & & 1 \\
-c & & & c & c & & & & & & & & & & & \\
s & & 1 & -s & s & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & -1 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & -c & & & & c & & & & & & & & \\
 & & & s & & & 1 & s & & & & & & & & \\
 & & & & c & 1 & & & -c & -1 & & & & & & \\
 & & & & s & & 1 & & s & & & & & & & \\
 & & & & & & & c & c & & & -c & & & & \\
 & & & & & & & -s & s & & 1 & s & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & -1 & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \\ N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \\ N_{ax} \\ N_{ay} \\ N_{hy}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

Problema da forma

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$A \to$ matriz dos coeficientes $(a_{ij})_{m\times n}$

$\underline{x} \to$ vetor de incógnitas : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$

$\underline{b} \to$ vetor dos termos independentes: $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$

Regra de Cramer

$\Delta = \det A$

$\Delta x_j = \det A^* \to A^*$ é A com a coluna j substituída por $\underline{b}$

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta}}$$

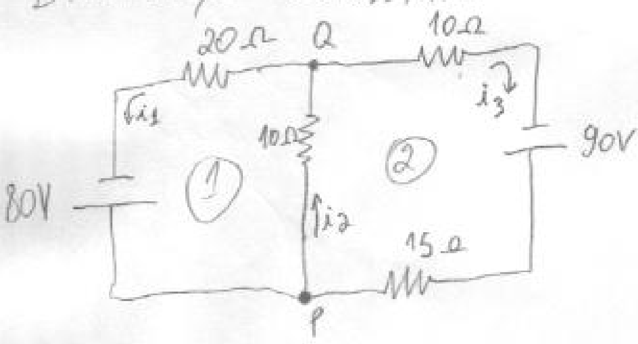
Problema: número de operações é pelo menos $(n+1)! \cdot (n-1)$

$n=5 \to 2.5s$ multiplicação: $400\mu s$

$n = 10 \to 3,4$ dias

$n = 20 \to 20$ bilhões de anos $\to$ 5 meses (usando Laplace) $\to$ 1,5 seg (eliminação Gaussiana)

Eliminação Gaussiana



Leis de Kirchhoff:

lei de correntes — a corrente que entra é igual à corrente que sai

Nó P: $i_1 + i_3 = i_2$

Nó Q: $i_2 = i_1 + i_3$

lei de potenciais: numa malha fechada, a soma das quedas de tensão é zero.

Malha 2: $10 i_2 + \underbrace{10 \cdot i_3 - 90 + 15 \cdot i_3} = 0$

Malha 1: $20 \cdot i_1 - 80 + 10 \cdot i_2 = 0$

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 10 i_2 + 25 i_3 = 90 \\ 20 \cdot i_1 + 10 i_2 = 80 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{array}\right]$$

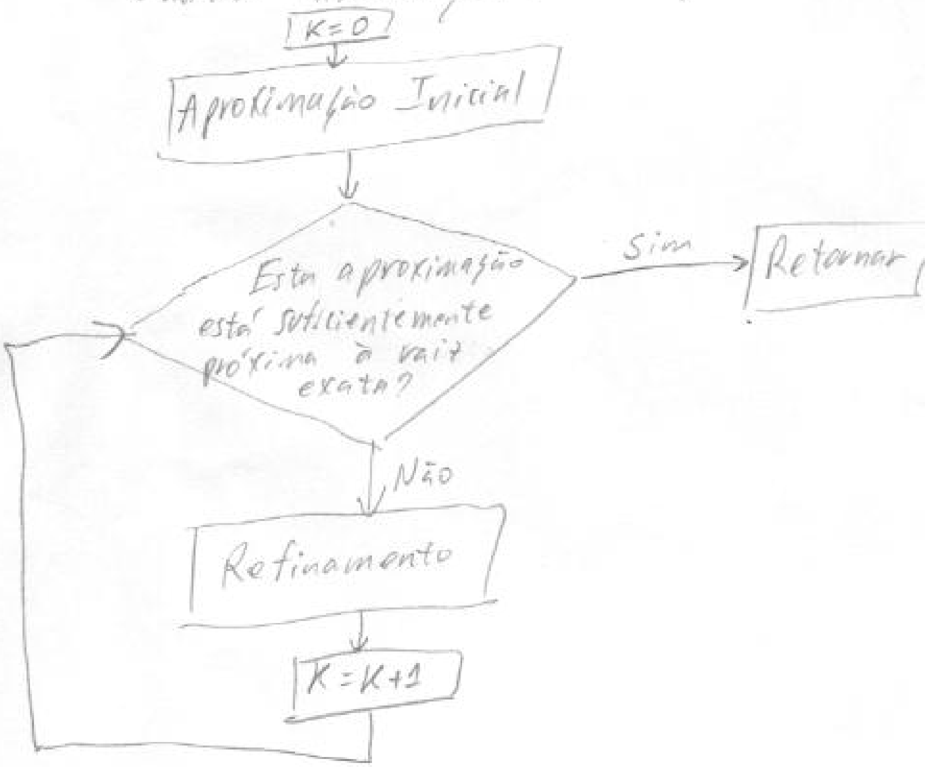
Aula 9-2

Análise gráfica da função inclui

- domínio da função
- pontos de descontinuidade
- intervalos de crescimento e decrescimento
- pontos de máximo e mínimo
- concavidade
- pontos de inflexão
- assíntotas

Fase de Refinamento

- iterações: são ciclos de repetição de instruções
  - em cada ciclo a solução obtida deve aproximar mais da solução do problema
  e utiliza informações de iterações anteriores



Aula 9-3

Critérios de parada

$|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$ → Ideal, mas não pode ser calculado

$|\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}| < \varepsilon$ → problema se o algoritmo for lento em algum ponto

$|f(\bar{x})| < \varepsilon$ → depende da escala de $f(x)$

número de iterações $> L$ → confiar no algoritmo, que não vai entrar em ciclos, divergir ou convergir muito lentamente

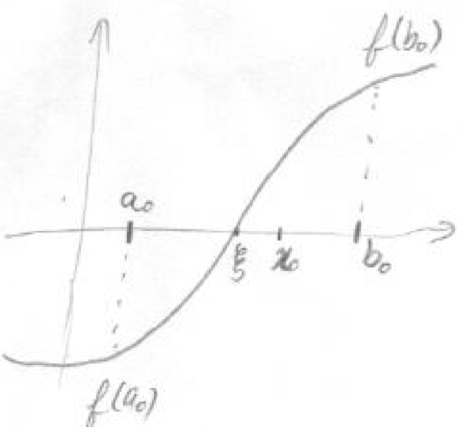
$a_k \leq \xi \leq b_k$, $b_k - a_k < \varepsilon$ → muitas vezes esses intervalos são mantidos largos para garantir a pertinência da raiz

Método da Bissecção

Dada função $f(x)$ e intervalo $[a,b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$

contínua em $[a,b]$

Refinar o intervalo $[a,b]$



$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Aula 9-4

Dois possíveis casos

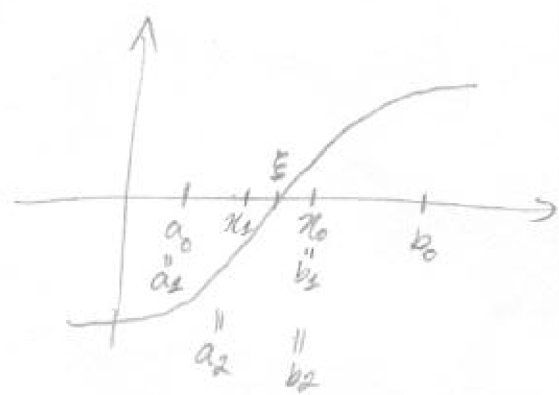
$f(x_0) > 0$

$f(x_0) < 0$

① Se $f(x_0) \cdot f(a_0) < 0 \Rightarrow [a_0, x_0]$ é um intervalo em que $f(x)$ é contínua $\Rightarrow a_0 \leq \xi \leq x_0$

② Se $f(x_0) \cdot f(b_0) < 0 \Rightarrow [x_0, b_0]$ é um intervalo em que $f(x)$ é contínua $\Rightarrow x_0 \leq \xi \leq b_0$

Caso ①: $a_1 = a_0$
e $b_1 = x_0$



$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$f(x_1) \cdot f(b_1) < 0 \Rightarrow a_2 = x_1$
$b_2 = b_1$

→ Cada vez tenho um intervalo menor contendo ξ (a raiz)

Algoritmo

Entrada: $f(x)$, a, b, ε, ε_f

fa = f(a); fb = f(b); /* fa*fb < 0 */

Enquanto(fabs(a-b) > ε)

x = (a + b)/2;

fx = f(x); Se fabs(fx) < εf → retorne x

Se fx·fa < 0 → b = x, fb = fx

Senão → a = x, fa = fx

$\bar{x} = (a+b)/2$ → retorne $\bar{x}$

Aula 9-5

Convergência do método:

consiste em demonstrar que as sequências $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ convergem para l quando $K \to \infty$

$\downarrow$

tal que $f(l) = 0$

→ Não basta, é necessário obter uma precisão determinada em tempo finito (paradoxo de Zenão)

Estimativa do número de iterações

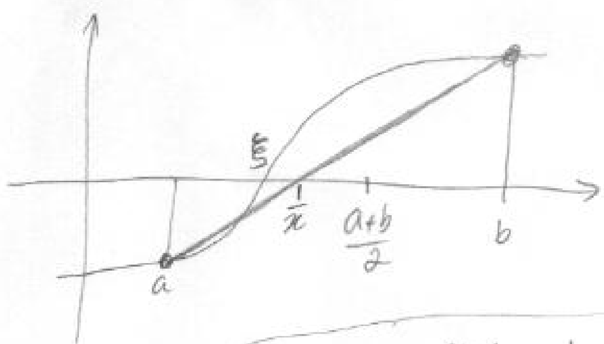
$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Rightarrow K = \underbrace{\lg(b_0 - a_0) - \lg \varepsilon}_{\text{números de dígitos binários a determinar}}$$

Método da Posição Falsa (Regula Falsi)

Método da bissecção

melhorar a escolha de $x = \frac{a+b}{2}$ para um valor mais próximo da raiz



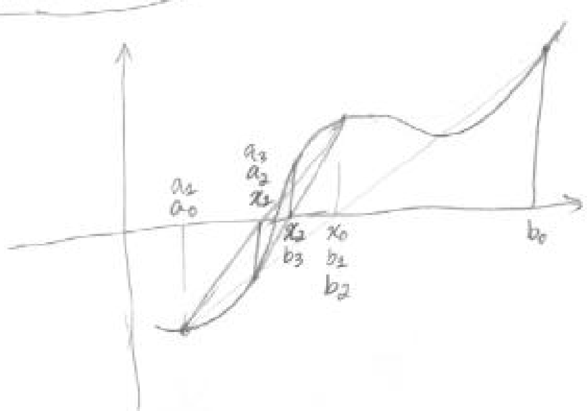
$$\frac{x - a}{b - x} = \frac{|f(a)|}{|f(b)|}$$

$$x|f(b)| - a|f(b)| = |f(a)|b - |f(a)|x$$

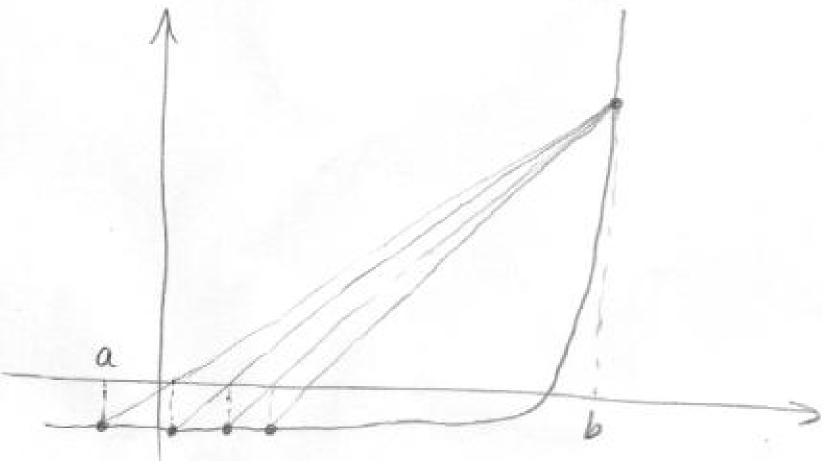
$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Aula 9-6



Regula-falsi



(métodos de Quebra)

(métodos do ponto fixo)

MIL — Método Iterativo Linear

$$f(x)=0$$
$$\downarrow \text{ transformar}$$
$$x=\varphi(x)$$

Iteração:

$$x_k=\varphi(x_{k-1})$$

Exemplo

$$x^2+x-6=0$$
$$x=6-x^2$$
$$\downarrow$$
$$x_{k+1}=6-(x_k)^2 \quad \text{(não converge)}$$

ou

$$x^2=6-x$$
$$x=\pm\sqrt{6-x} \quad \text{(converge)}$$

ou

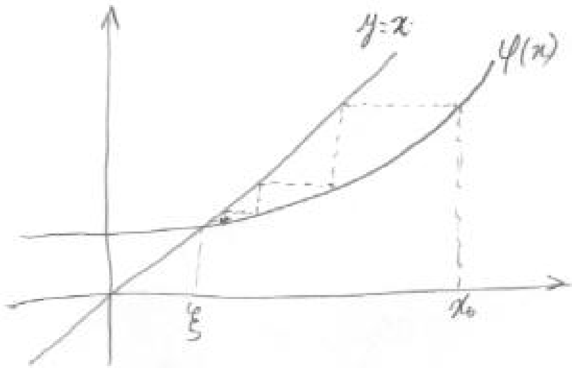
$$x=\frac{6}{x}-1$$

ou

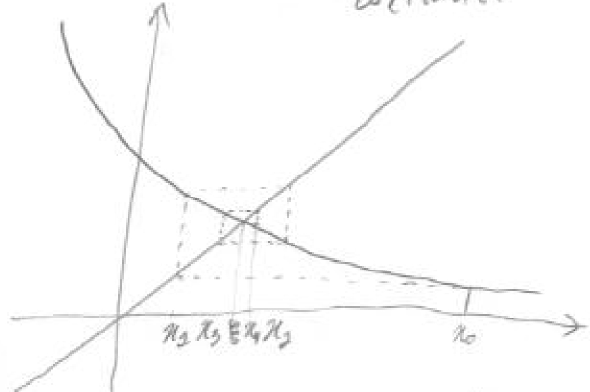
$$x=\frac{6}{x+1}$$

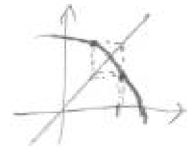
Aula 9-7

convergência monotônica

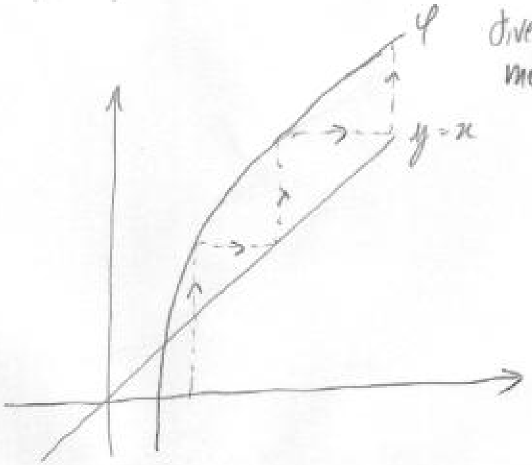


convergência oscilante

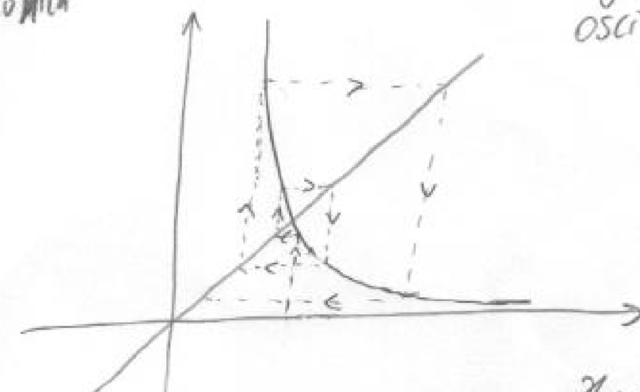




divergência monotônica



divergência oscilante



$x_1 = \varphi(x_0)$
$x_2 = \varphi(\varphi(x_0)) = \varphi^{o2}(x_0)$
$x_3 = \varphi^{o3}(x_0)$
$x_k = \varphi^{ok}(x_0)$

Pode convergir ou divergir para cada φ

Teorema (condição suficiente)

Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x)=0$

Se i) $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I (intervalo centrado em ξ, $f(\xi)=0$)

ii) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$

iii) $x_0 \in I$

então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ

Teorema do valor médio

$\exists c \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Parte principal da demonstração

$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi)$

$\exists c_k$ entre x_k e ξ, $x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi)$

Aula 9-8

Exemplos

a) $\varphi_1(x) = 6 - x^2$ e $\varphi_1'(x) = -2x$ converge para 2?

$|\varphi_1'(x)| < 1 \Leftrightarrow |2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ não encontro intervalo I centrado em 2

$\rightarrow$ não satisfaz o teorema anterior, não garante a convergência

b) $\varphi_2(x) = \sqrt{6-x}$ e $\varphi_2'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{6-x}}$ converge para 2?

$\varphi_2(x)$ é contínua para $x \leq 6$

$\varphi_2'(x)$ é contínua para $x < 6$

$|\varphi_2'(x)| < 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}\right| < 1 \Leftrightarrow x < 5{,}75$

Ordem de Convergência do MIL

$x_{k+1} - \xi = \varphi(x_k) - \varphi(\xi) = \varphi'(c_k)(x_k - \xi)$, $\exists\, c_k$ entre x_k e ξ

$\Rightarrow \dfrac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \varphi'(c_k)$

No lim $k \to \infty$, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k\to\infty} \varphi'(c_k) = \varphi'(\xi)$

O erro na interação seguinte é proporcional ao erro da interação anterior. Para K grande esse fator é de $\varphi'(\xi)$.

$(x_k - \xi) \cong \varphi'(\xi)^k (x_0 - \xi) \Rightarrow K \cong \dfrac{\lg(x_k - \xi) - \lg(x_0 - \xi)}{\lg(\underbrace{\varphi'(\xi)}_{<1})}$

Aula 9-9

Método de Newton-Raphson

Método iterativo linear considerando um $\varphi(x)$ especial

i) $|\varphi'(x)| \leq M < 1$, $\forall x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz

ii) quanto menor for $|\varphi'(\xi)|$ mais rápida a convergência

Quero
$$\varphi'(\xi) = 0$$

$$\varphi(x) = x + A(x)\cdot f(x)$$

$$\varphi'(x) = 1 + A'(x)\cdot f(x) + A(x) f'(x)$$

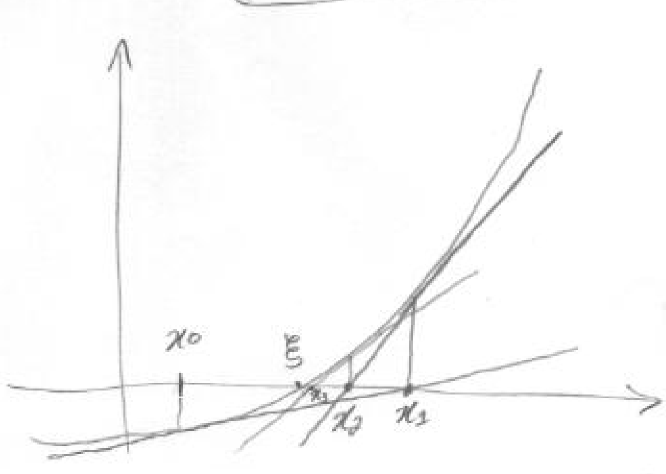
$$\varphi'(\xi) = 1 + A'(\xi)\cdot \underbrace{f(\xi)}_{0} + A(\xi)\cdot f'(\xi) \Rightarrow \varphi'(\xi) = 1 + A(\xi)\cdot f'(\xi)$$

$$\varphi'(\xi) = 0 \Rightarrow 1 + A(\xi)\cdot f'(\xi) = 0 \Rightarrow A(\xi) = \frac{-1}{f'(\xi)}$$

Assim escolhe-se $A(x) = \dfrac{-1}{f'(x)}$ e $\boxed{\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$

Iteração de Newton:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$



Graficamente
(método das tangentes

Aula 9-10

Características do Método de Newton

- converge mais rápido que os demais métodos que veremos (desde que inicialmente próximo a uma raiz)
- precisa do cálculo da derivada da função

Convergência do Método de Newton

- $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow e_{k+1} = e_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

polinômio de Taylor de grau 2:

- $f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \dfrac{f''(c_k)}{2}(x - x_k)^2$, c_k entre x e x_k

$$0 = f(\xi) = f(x_k) - f'(x_k)\underbrace{(x_k - \xi)}_{e_k} + \frac{f''(c_k)}{2}\underbrace{(x_k - \xi)^2}_{e_k^2}$$

$$\frac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} e_k^2 = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + e_k = e_{k+1}$$

- $e_{k+1} = \dfrac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} \cdot e_k^2 \rightarrow \lg e_{k+1} = \lg C + 2 \lg e_k$

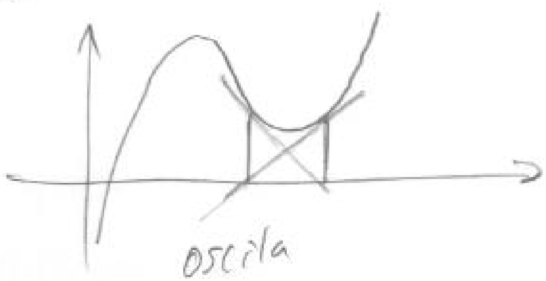
↳ O número de dígitos aproximadamente dobra a cada iteração

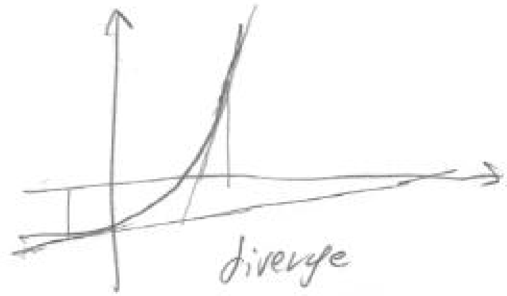
No lim $k \to \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{f''(c_k)}{2f'(x_k)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = \dfrac{1}{2}\varphi''(\xi) = C$

Portanto, método de newton tem convergência quadrática

Aula 9-11

Método de Newton é muito dependente do ponto inicial





Método da Secante

Quando não é possível calcular $f'(x)$

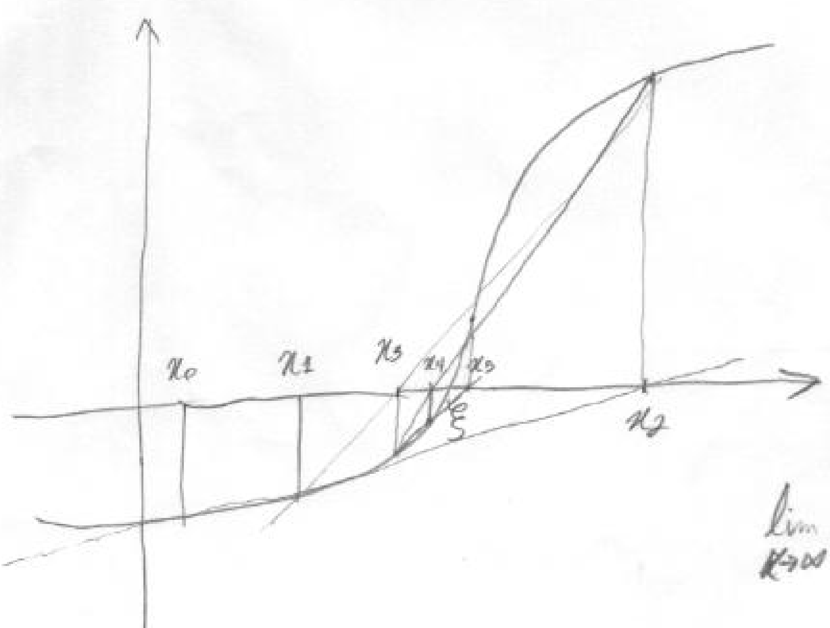
Aproximar a derivada de $f(x_k)$ utilizando x_{k-1}

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} =$$

$$\boxed{\varphi(x_k) = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

Partir de Dois pontos Iniciais x_0, x_1



Ordem de convergência

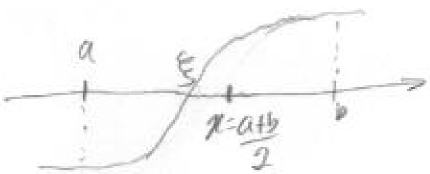
$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C$$

onde $p = 1,618$

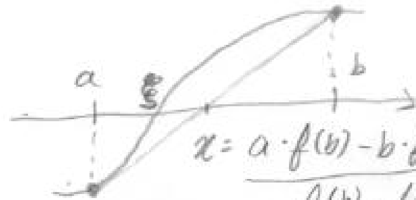
9-12 Resumo

Métodos de Quebra

Bissecção



Posição Falsa



$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$\sqrt{5}$ é solução de que equação?

$x^2 = 5$

$x = \frac{5}{x}$ (MIL)

→ não converge (partindo de 1)

$x^2 + 1 = 6$

$x(x + \frac{1}{x}) = 6$

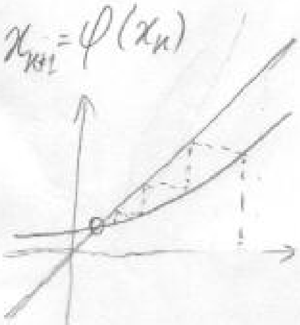
$x = \frac{6}{x + \frac{1}{x}} = \frac{6x}{x^2+1}$

(partindo de 1) converge

Métodos de Ponto Fixo

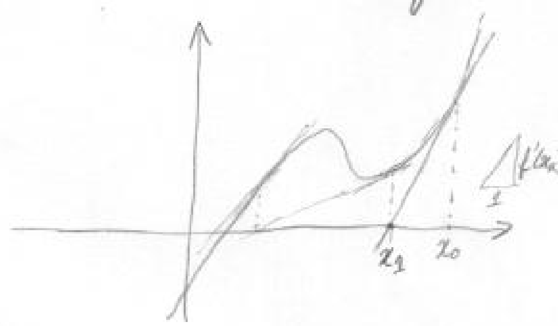
Método Iterativo Linear

$x_{k+1} = \varphi(x_k)$



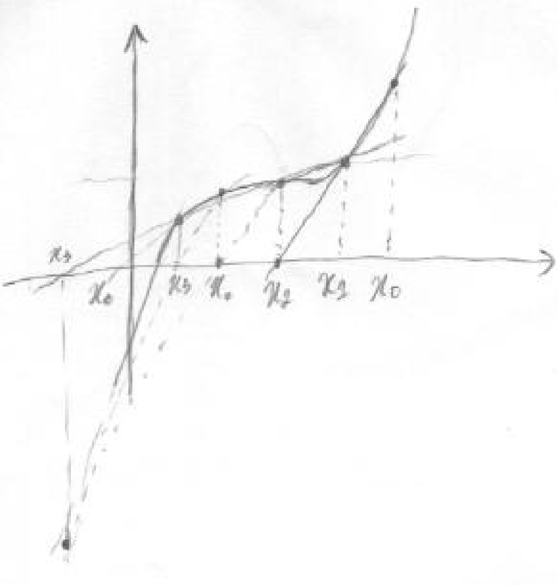
Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

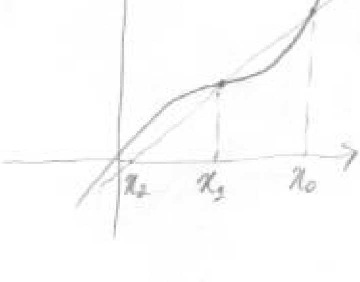


$$\frac{x_1 - x_0}{1} = \frac{-f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método das Secantes



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



$$\frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_1)}{f(x_0)}$$

$$f(x_0)x_1 - f(x_0)x_2 = f(x_1)x_0 - f(x_1)x_2$$

$$x_2[f(x_1) - f(x_0)] = f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1$$

$$\boxed{x_2 = \frac{f(x_1)x_0 - f(x_0)x_1}{f(x_1) - f(x_0)}}$$

Aula 10-1

Integração Numérica

Dados a, b e f contínua em $[a,b]$

calcular $\int_a^b f(x)\,dx$

- quando for difícil encontrar analiticamente uma primitiva $F(x)$ para $f(x)$
- quando computar essa primitiva através de sua expressão analítica tiver um custo alto ou propiciar acúmulo de erros

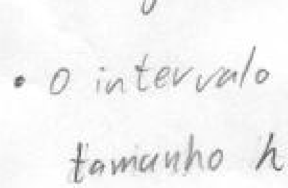
Fórmulas de Newton-Cotes (fechadas)

- aproximar $f(x)$ por polinômios em intervalos pequenos
- integrar os polinômios
- o intervalo $[a,b]$ é dividido em n subintervalos de igual tamanho $h = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \cong A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Obtenção dos coeficientes A_i

Dificuldades na Integração



Integração Numérica é fácil em curvas suaves (bem comportadas)

Aula 10-2

~~Regra~~ Newton-Cotes

$x_0 = a$

$x_n = b$

$$A_K = \int_{x_0}^{x_n} L_K(x)\,dx$$

Utilizando a forma polinomial de Lagrange

Regra do Trapézio

Utiliza polinômio de Lagrange de grau 1

$$f(x) \simeq p_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1)$$

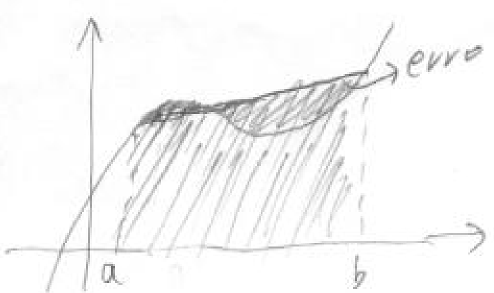
$$= -\frac{(x-x_1)\cdot f(x_0)}{h} + \frac{(x-x_0)\cdot f(x_1)}{h}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} p_1(x)\,dx = \frac{1}{h}\left[\left(x_1-\frac{x}{2}\right)\cdot f(x_0)\,x + \left(\frac{x}{2}-x_0\right)\cdot f(x_1)\,x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$= \frac{1}{h}\left[\left(x_1-\frac{x_1}{2}\right)\cdot f(x_0)\cdot x_1 + \left(\frac{x_1}{2}-x_0\right)\cdot f(x_1)\cdot x_1 - \left(x_1-\frac{x_0}{2}\right)\cdot f(x_0)\,x_0 - \left(\frac{x_0}{2}-x_0\right) f(x_1)\cdot x_0\right]$$

$$= \frac{1}{2h}\left[x_1^2 f(x_0) + x_1^2 f(x_1) - 2x_0 x_1 f(x_1) - 2x_1 x_0 f(x_0) + x_0^2 f(x_0) + x_0^2 f(x_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2h}\underbrace{(x_1-x_0)^2}_{h^2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]$$



Aula 10-3

Erro na interpolação

$$f(x) = p_1(x) + (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}, \quad \exists\, \xi_x \in \,]x_0, x_1[$$

Erro na integração

$$E_T = \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''(\xi_x)}{2}\,dx$$

Usando o TVM das integrais

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) f''(\xi_x)\,dx = f''(c)\int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx, \quad \exists\, c \in \,]x_0, x_1[$$

Como $\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx = -\frac{h^3}{6}$

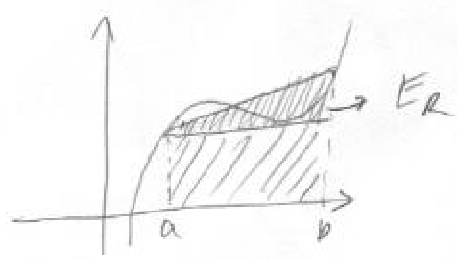
$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(c), \quad \exists\, c \in \,]x_0; x_1[$$

A Regra do Trapézio é, portanto, exata para polinómios até grau 1.

A integração é resumidamente dada por

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12} f''(c) = I_T + E_T$$

Regra do Retângulo (n=0)



Aproximar $f(x) \simeq f(x_0)$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \simeq \int_{x_0}^{x_1} f(x_0)\,dx = h \cdot f(x_0)$$

$$E_R = \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0) f'(\xi_x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} x\,dx - x_0\int_{x_0}^{x_1} dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x_0}^{x_1} - x_0(x_1-x_0) = \frac{1}{2}\left[x_1^2 - x_0^2 - 2x_0x_1 + 2x_0^2\right] = \frac{1}{2}h^2$$

$$E_R = \frac{h^2}{2} f'(c)$$

Aula 10-4

Regra 1/3 de Simpson $(n=2)$

Lagrange de grau 2

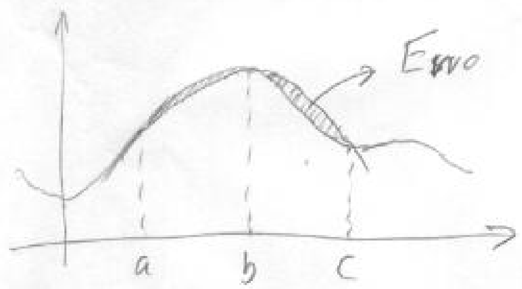
$$f(x) \simeq p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(h)(-h)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(2h)(h)} f(x_2)$$

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] = I_S$$

$$E_S = -\frac{h^5}{90} \cdot f^{iv}(c), \quad \exists c \in \,]x_0, x_2[$$

Regra de Simpson é portanto exata para polinômios até grau 3.

(mesmo tendo usado uma interpolação de grau 2!!!)



Regras de grau mais elevado

$\nearrow$ grau mais elevado pode aumentar o erro devido ao fenômeno de Runge

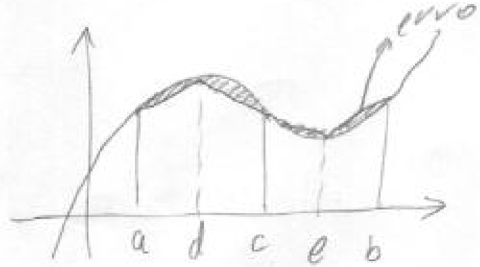
	$C\,(\cdot h)$	$A_0 \; A_1 \; A_2 \; \dots$		
$n=1$	$\frac{1}{2}$	1 1	(trapézio)	$\longrightarrow -\frac{h^3}{12} f''(\xi)$
$n=2$	$\frac{1}{3}$	1 4 1	(Simpson)	$\longrightarrow -\frac{h^5}{90} f^{iv}(\xi)$
$n=3$	$\frac{3}{8}$	1 3 3 1		$\longrightarrow -\frac{3h^5}{80} f^{iv}(\xi)$
$n=4$	$\frac{2}{45}$	7 32 12 32 7	(Boole)	$\longrightarrow -\frac{8h^7}{945} f^{vi}(\xi)$
$n=6$	$\frac{1}{140}$	41 216 27 272 27 216 41		
$n=8$	$\frac{4}{14175}$	989 5888 -928 10496 -4540 10496 -928 5888 989		

Aula 10-5

Regras Compostas

Regra dos Trapézios Repetida

- subdividir o intervalo em espaçamentos iguais
- aplicar repetidamente a regra do trapézio e somar
- eventualmente pode ser melhor que elevar o grau do polinómio



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h^3}{12} f''(c_i) \quad , \exists\, c_i \in \,]x_i; x_{i+1}[$$

Pode-se mostrar que o erro é $E_{TR} = \dfrac{-m h^3 f''(\xi)}{12}$ e $|E_{TR}| \le \dfrac{m h^3 \cdot M_2}{12}$

onde $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

$$I_{TR} = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{m-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[\underbrace{f(x_0)+f(x_1)}+\underbrace{f(x_1)+f(x_2)}+f(x_2)+f(x_3)+\dots+f(x_{m-1})+f(x_m)\right]$$

$$= h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + \frac{f(x_m)}{2}\right]$$

$$|E_{TR}| \le \frac{(b-a)\,h^2}{12} M_2$$

Aula 10-6

Regra $\frac{1}{3}$ de Simpson Repetida

pegar de 2 em 2 intervalos (número par de intervalos) $\quad m$ intervalos

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right] + \left[-\frac{h^5}{90} f^{IV}(c_k)\right]$$

$k = 1, \dots, \frac{m}{2}$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\Big\{\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \dots + \left[f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]\Big\} + \sum_{k=1}^{m/2}\left(-\frac{h^5}{90} f^{IV}(c_k)\right)$$

$$I_{SR} = \frac{h}{3}\Big\{\underbrace{\left[f(x_0) + f(x_m)\right]}_{} + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{m-2})\right]\Big\}$$

$\frac{h}{3} \cdot \Big($ soma dos extremos $+ 4 \cdot$ soma dos valores em índices ímpares $+ 2 \cdot$ soma dos valores em índices pares (exceto os extremos) $\Big)$

Pode ser mostrado que

$$E_{SR} = -\frac{m}{2}\frac{h^5}{90} f^{IV}(\xi) \quad \text{e} \quad |E_{SR}| \leq \frac{m h^5}{180} \cdot M_4 \text{, onde } M_4 = \max_{x \in [x_0, x_m]} |f^{IV}(x)|$$

$$\text{ou } |E_{SR}| \leq \frac{(b-a)\,h^4}{180} M_4 \quad \left(\text{pois } m = \frac{b-a}{h}\right)$$

Aula 10-2

Exercício

x	$f(x)$
0	0,0
0,5	0,106531
1,0	0,367879
1,5	0,723130
2,0	1,135335

Obter

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx$$

Utilizando os dados da tabela e

a) A regra do trapézio repetida

b) A regra de Simpson repetida

c) Comparar com o resultado analiticamente obtido

$f(x) = e^{-x} + x - 1$

$F(x) = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$

$-e^{-2} + \frac{4}{2} - 2 = -e^{-2}$

$-e^{0} + 0 - 0 = -1$

$\Big\} -e^{-2} + 1$

$F(x) = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x$

$F(0) = -e^{0} + 0 - 0$

$= -1$

$F(2) = -e^{-2} + \frac{4}{2} - 2$

$= -e^{-2}$

$F(2) - F(0)$

$= -e^{-2} + 1$

$f'(x) = -e^{-x} + 1$

$f''(x) = e^{-x}$

$f'''(x) = -e^{-x}$

$f^{IV}(x) = e^{-x}$

$M_2 = M_4 = e^0 = 1$

a) $\frac{h}{2}\left[\text{soma extremos} + 2 \cdot \text{soma intermediários}\right]$

$h = 0,5$

$\left[0 + 1,135335 + 2 \cdot (0,106531 + 0,367879 + 0,723130)\right] \cdot \frac{1}{4}$

$= 3,530415 \quad \cdot \frac{1}{4} = 0,882604$

b) $\frac{h}{3}\left[\text{soma extremos} + 4 \cdot \text{soma impar} + 2 \cdot \text{soma par}\right]$

$h = 0,5$

$\frac{1}{6}\left[0 + 1,135335 + 4 \cdot (0,106531 + 0,723130) + 2 \cdot (0,367879)\right]$

$= 5,189737/6 = 0,864956$

c) $1 - e^{-2} = 0,864665$

→ Erro em a: 0,01794

→ Erro em b: 0,000291

Erro em a: $|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)\,h^2}{12} \cdot M_2 = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{4} = 0,04166$

Erro em b: $|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)\,h^4}{180} \cdot M_4 = \frac{2}{180} \cdot \frac{1}{16} = 0,00069$

Aula 10-8

Quadratura Gaussiana

Fórmulas de Gauss

- para pontos $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ quaisquer (a determinar)

- exata para polinômios de grau $\leq 2n+1$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int_a^b L_0(x)\,dx\right] f(x_0) + \dots + \left[\int_a^b L_n(x)\,dx\right] f(x_n) + E_n$$

→ Exemplo: Polinômio de Lagrange de grau 1 → Integral exata até grau 3

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

Para Intervalo $[-1, 1]$ → exata até grau 3

exata para $g_0(t) = 1$
$g_1(t) = t$
$g_2(t) = t^2$
e $g_3(t) = t^3$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dt = A_0 g_0(t_0) + A_1 g_0(t_1) = A_0 + A_1 = 2$$

$$\int_{-1}^{1} t\,dt = A_0 g_1(t_0) + A_1 g_1(t_1) = A_0 t_0 + A_1 t_1 = 0$$

$$\int_{-1}^{1} t^2 dt = A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} t^3 dt = A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 = 0$$

Aula 10-9

Sistema de equações

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 t_0 + A_1 t_1 = 0 \\ A_0 t_0^2 + A_1 t_1^2 = \frac{2}{3} \\ A_0 t_0^3 + A_1 t_1^3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo...

$$t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad t_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad A_0 = A_1 = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong 1 \cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Para um intervalo $[a, b]$

Mudança de variáveis

$$x = \frac{1}{2}\left[a + b + t(b-a)\right] \quad \begin{cases} t = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left[a+b+b-a\right] = b \\ t = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left[a+b+a-b\right] = a \end{cases}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}\,dt$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}\left[a+b+t(b-a)\right]\right)\frac{b-a}{2}\,dt$$

Exemplo $\int_0^{10} e^{-x}\,dx$ $\quad [a,b] = [0,10] \rightarrow x = 5 + 5t$, $\quad dx = 5\,dt$

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow g(t) = e^{-5-5t}$$

$$\int_0^{10} e^{-x}\,dx = 5\int_{-1}^{1} e^{-5-5t}\,dt = I$$

$$I \cong 5\left[A_0 g(t_0) + A_1 g(t_1)\right] = 5\left[e^{-2.113249} + e^{-7.886751}\right] = 0{,}606102$$

$\int_0^{10} e^{-x}\,dx = 0.999955$, erro de $0{,}3938$ (seriam necessários 16 pontos na regra do Trapézio e 9 pontos na regra de Simpson)

Aula 10-10

Exercício

Obter pela quadratura gaussiana

$$\int_0^2 (e^{-x} + x - 1)\, dx$$

e comparar com o resultado obtido analiticamente, regra do trapézio e Simpson

---

$a=0,\ b=2$

$x = \frac{1}{2}(0+2+t(2-0)) = 1 + t$

$dx = dt$

$e^{-x} + x - 1 = e^{-1-t} + 1 + t - 1 = e^{-1-t} + t$

$$\int_0^2 (e^{-x} + x - 1)\, dx = \int_{-1}^{1} (e^{-1-t} + t)\, dt \cong e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} + e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= e^{-0,1339746} + e^{-1,8660254} = 0,8746122 + 0,1547374$$

$$= 1,0293497$$

(2 pontos)

Comparar com 0,864665 → exato

Trapézio $\frac{h}{2}\left[0 + 1,135335\right] = 1,135335$ (2 pontos)

Simpson $\frac{h}{3}\left[0 + 4 \cdot 0,367879 + 1,135335\right] = 0,8689503$ (3 pontos)

Gauss em 2 intervalos

$a=0$

$b=1$

$x = \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$

$dx = \frac{1}{2}dt$

$e^{-x} + x - 1 = e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t - 1 \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

$I = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}} - \frac{1}{2} = 0,1642869$

$a=1$

$b=2$

$x = \frac{1}{2}(3+t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t$

$dx = \frac{1}{2}dt$

$I = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{3}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} - 1 + e^{-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}} + \frac{3}{2} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{4}} - 1\right)$

$= 0,7443775$

Total: 0,9086644

Aula 10-11

Exercício

Polinômio $x^6-2x^5-4x^4+2x^3-3x^2+12x+18$

a) Enumerar Raízes positivas, negativas e complexas
Utilizando regra de Descartes e regra de Huat

Positivas	Negativas	Complexas
4	2	0
2	2	2
0	2	4
4	0	2
2	0	4
0	0	6

$+ - - + - + +$ $p(x)$
positivas: 4, 2, 0

$+ + - - - - +$ $p(-x)$
negativas: 2, 0

Huat

1	-2	-4	2	-3	+12	+18
	4	16	4	9	144	
			<	<		
	-4	-4	12	24	-54	

pelo menos 2 complexas

b) Encontre a cota superior de Vene
e a cota superior de Laguerre-Thibault

Vene: $M=4$, $a_0=1$, $a_1<0$ $\rightarrow \frac{4}{1}=4$

Laguerre:

	1	-2	-4	2	-3	12	18
4		4	8	16	72	276	1152
	1	2	4	18	69	288	1170

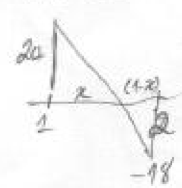
c) O que nos diz o teorema de Bolzano a respeito de $p(x)$ no intervalo $[1,2]$?
E o teorema de Budan no intervalo $[1,2]$?

	1	2
$p(x)$	24	-18
$p'(x)$	-8	-72
$p''(x)$	-52	-14
$p'''(x)$	-84	300
$p^{IV}(x)$	24	864
$p^{V}(x)$	480	1200
$p^{VI}(x)$	1440	1440

$V_1=2$ $V_2=1$

$|V_1-V_2|=1$ → número de raízes menor ou igual a 1 por múltiplo de 2
→ só 1 raiz no intervalo

d) Onde divide o intervalo $[1,2]$ pelo método da posição falsa



$\frac{x}{24}=\frac{1-x}{18}$

$18x=24-24x$

$42x=24$

$x=0{,}5714$

divide em 1,5714

e) Aplique uma iteração do método de Newton para $x_0=2$

$x_1=x_0-\frac{(-18)}{-72}=2-\frac{18}{72}$

$x_1=1{,}75$

Aula 11 - 1

Equações Diferenciais Ordinárias

- apenas uma variável independente (≠ eq. diferencial parcial)

$$y'(x) = x + y(x)$$

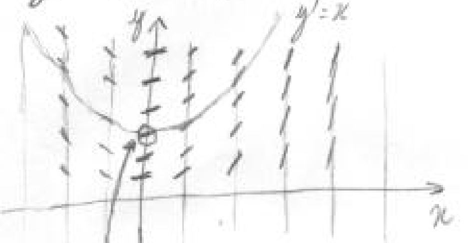
$$y'(x) = x^2 + y^2(x)$$

$$y''(x) + (1 - y^2(x))\, y'(x) + y(x) = 0$$

- ordem da equação é a mais alta ordem de derivação em função da variável independente

- Visualizar a solução da equação de 1ª ordem

$$y' = f(x,y)$$



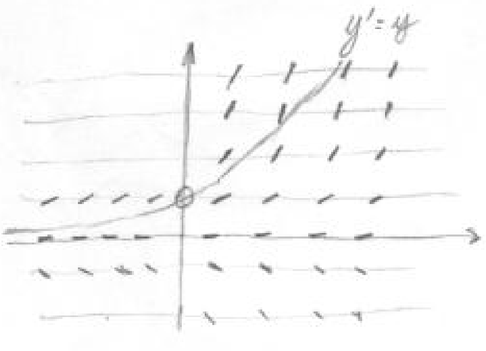
→ curvas isóclinas

condição inicial

campo de direções

sol. $y = \frac{x^2}{2} + C$

C depende de uma condição inicial



sol. $y = C \cdot e^x$

$\cancel{y = e^x + C}$

C depende de uma condição inicial

- É necessário amarrar com $\underline{m}$ condições para uma equação de ordem $\underline{m}$

- Problema de valor inicial:

  Todas as condições iniciais são dadas no mesmo ponto

$$y''' = f(x, y, y', y'') \;;\; y(0) = 1.0 \;;\; y'(0) = 1.2 \;;\; y''(0) = -0.5$$

ou

$$y'(x) = y(x) \;;\; y(0) = 1$$

Solução é única

(Aula 11-2)

- Problema de valor de contorno

$m \geq 2$ e as condições iniciais são dados em pontos distintos

$$\begin{cases} y''=0 \\ y(-1)=0 \\ y(1)-2y'(1)=0 \end{cases} \rightarrow \text{múltiplas soluções}$$

- Linear se para

$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)})$ → fácil encontrar solução analítica

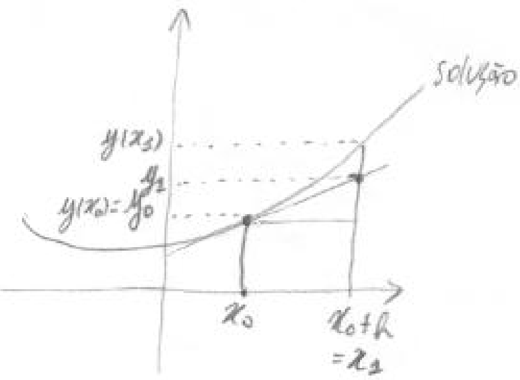
f for linear em função de y e suas derivadas

$y'' = x + \sin(x)\,y + \cos(x)\,y'$ → linear, variante em x

Métodos Numéricos Para Solução do Problema de Valor Inicial

1 - Método de Euler

Solução aproximada de $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$



Conhecemos (x_0, y_0)

Calculamos $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

Estimamos $y(x_0+h)$

aproximando $y(x)$ por uma reta

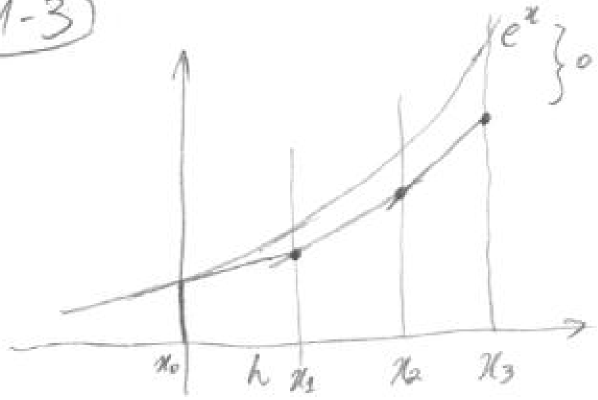
$$r_0(x) = y(x_0) + (x - x_0)\cdot y'(x_0)$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

Para os demais pontos

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

11-3



o erro pode aumentar a cada iteração

Exemplo

$$\begin{cases} y = y' \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2 - Método da Série de Taylor

Série de Taylor em torno de $x = x_0$

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(k)}(x_n)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$+ \underbrace{\left[\frac{y^{(k+1)}(\xi_x)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}\right]}_{\text{erro}} \qquad \xi \in \,]x_0, x[$$

Substituindo aproximações conhecidas (ou valores iniciais) das derivadas de y no ponto x_n

$$y(x_{n+1}) \cong y_{n+1} = y_n + y_n' \cdot h + y_n'' \frac{h^2}{2} + \dots + y_n^{(k)} \frac{h^k}{k!}$$

o erro é

$$e(x_{n+1}) = \frac{y^{(k+1)}(\xi_{x_{n+1}})}{(k+1)!} h^{k+1} \leq \frac{M_{k+1} h^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \left(M_{k+1} = \max_{x \in I} |y^{(k+1)}(x)| \right)$$

Obtivemos $y(x_{n+1})$, mas precisamos também de $y'(x_{n+1})$, $y''(x_{n+1})$, etc

Se $y'(x) = f(x, y(x))$

$$y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)\, y' = f_x + f_y f \qquad \text{(Regra da cadeia)}$$

$$y'''(x) = f_{xx} + f_{xy} f + (f_{yx} + f_{yy} f) f + f_y (f_x + f_y f)$$

por aí vai...

Aula 11-4

3 - Métodos de Runge-Kutta

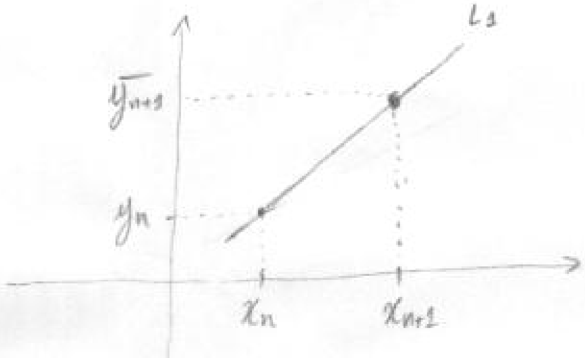
- mesma qualidade dos métodos de série de Taylor
- não necessita das derivadas de $f(x,y)$
  (mas calcula $f(x,y)$ em vários pontos)

Runge-Kutta de 1ª ordem = Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h\,y'_n \qquad \text{(Taylor de 1ª ordem) = método de Euler}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

Runge-Kutta de 2ª ordem = Método de Euler aperfeiçoado
(Método de Heun)



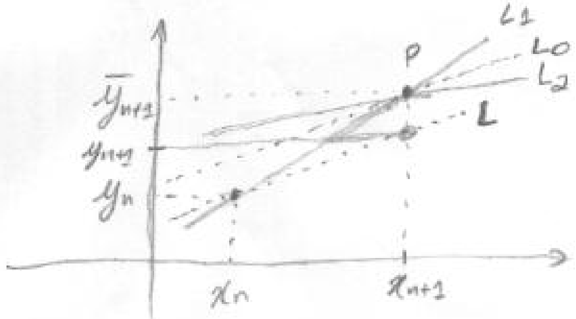
L_1: coef. angular $y_n' = f(x_n, y_n)$

$$z_1(x) = y_n + (x - x_n) f(x_n, y_n)$$

$$z_1(\underbrace{x_n + h}_{x_{n+1}}) = \bar{y}_{n+1}$$

L_2: coef. angular $f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$

$$z_2(x) = (y_n + h y_n') + [x - (x_n + h)]\, f(x_{n+1}, \underbrace{\bar{y}_{n+1}}_{y_n + h y_n'})$$



L_0: coef. angular $\dfrac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})}{2}$

L

$$z(x) = y_n + (x - x_n)\left[\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})}{2}\right]$$

$$\overbrace{y_{n+1}}^{z(x_{n+1})} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h y_n')\right]$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))\right]}$$

Aula 11-5

Método de ordem 2:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \quad \text{, onde}$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f(x_n + h, y_n + k_1)$$

Métodos de Runge-Kutta de ordem superior

3ª ordem

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2\right)$$

4ª ordem

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{onde}$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

Aula 11-6

Equações de Ordem Superior

$$u^{(m)} = f(x, u, u', u'', \dots u^{(m-1)})$$

Transformar num sistema de m equações de ordem 1

$$z_1 = u$$
$$z_2 = z_1' = u'$$
$$z_3 = z_2' = u''$$
$$z_4 = z_3' = u'''$$
etc
$$z_m = z_{m-1}' = u^{(m)} = f(x, z_1, z_2, z_3, \dots z_{m-1})$$

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \qquad z' = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_m \\ f(x, z_1, z_2, z_3, \dots z_{m-1}) \end{bmatrix} = F(x, z)$$

Método de Euler

$$z_{[n+1]} = z_{[n]} + h \cdot F(x_n, z_{[n]})$$

$$z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h \cdot f_1(x_n, z_{1(n)}, \overbrace{z_{2(n)}}^{z_{2(n)}})$$
$$z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h \cdot \underbrace{f_2(x_n, z_{1(n)}, z_{2(n)})}_{f(x_n, z_{1(n)}, z_{2(n)})}$$

Método de Euler aperfeiçoado

$$z_{[n+1]} = z_{[n]} + \frac{h}{2}\left[F(x_n, z_{[n]}) + F\left(x_n + h, z_{[n]} + h\, z'_{[n]}\right)\right]$$

$$F(x_n, z_{(n)}) = \begin{bmatrix} z_{2(n)} \\ \vdots \\ z_{m(n)} \\ f(x_n, z_{1(n)}, z_{2(n)}, \dots z_{m-1(n)}) \end{bmatrix}$$

$$F(x_n + h, z_{(n)} + h\, z'_{(n)}) = F\left(x_n + h, \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_m \\ f(x_n, z_{1(n)}, z_{2(n)}, \dots z_{m-1(n)}) \end{bmatrix}\right)$$

Aula 11-7

Exemplo (Livro do Kreyszig) - Advanced Engineering Mathematics

Aplicar método de Euler para o seguinte problema de valor inicial para $h=0,2$ computando $y_1 \dots y_5$

$$y' = x+y, \quad y(0)=0$$

$$f(x,y) = x+y$$

$$y_{n+1} = y_n + 0,2\,(x_n + y_n)$$

x_n	y_n	$0,2\cdot(x_n+y_n)$	$e^x - x - 1$	Runge-Kutta
0	0	0	0	0
0,2	0	0,04	0,021403	0,021400
0,4	0,04	0,088	0,091825	0,091818
0,6	0,128	0,1456	0,222119	0,222107
0,8	0,2736	0,21472	0,425541	0,425521
1,0	0,48832		0,718282	0,718251

Runge-Kutta

$$k_1 = h f(x_n, y_n) = 0,2\,(x_n + y_n)$$
$$k_2 = h f(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y_n + \tfrac{1}{2}k_1) = 0,2\cdot(x_n + 0,1 + y_n + \tfrac{1}{2}k_1)$$
$$k_3 = h f(x_n + \tfrac{1}{2}h,\ y_n + \tfrac{1}{2}k_2) = 0,2\cdot(x_n + 0,1 + y_n + \tfrac{1}{2}k_2)$$
$$k_4 = h f(x_n + h,\ y_n + k_3) = 0,2\cdot(x_n + 0,2 + y_n + k_3)$$

Erro para $x_n = 1,0$

Euler: 0,229
Heun: 0,0156
R-K4: 0,000031

Aula 11-E

Exercício - comp.

Simular o sistema de Lotka-Volterra

$$x'(t) = Ax - Bxy$$
$$y'(t) = Cxy - Dy$$

$A=4$
$B=2$
$C=1$
$D=3$

Para $0 \leq t \leq 5$ 3 dig. sign.

a) $x(0) = 3$, $y(0) = 5$

b) $x(0) = 3$, $y(0) = 1$
$y(0) = 1.5$
e $y(0) = 2.0$

$(3,2) \to$ equilíbrio

K	t	x_n	y_n	$4x-2xy$	$xy-3y$
0	0	3	5	-18	0
1	0.01	2.82	5	-16,92	-0,9
2	0.02	2.6508	4,991		

Exercício

Resolver para $y(2)$ usar $h=0,5$

$$y' + 2y = x, \quad y(0) = 1$$

a) Euler $y_{k+1} = (x_k - 2y_k)\cdot h + y_k$

x_k	y_k	$\frac{x_k}{2} - y_k$
0	1	-1
0,5	0	0,25
1	0,25	0,25
1,5	0,5	0,25
2	0,75	

Correto
0,7729

$$e^{-2x}\left(\frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + \%c\right)$$

$$= C\cdot e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$y(0) = C\cdot e^{0} + \frac{0}{2} - \frac{1}{4} = 1$$

$$C = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25$$

$$y(2) = 1,25\cdot e^{-4} + 1 - \frac{1}{4}$$

usar $h=0,25$

x_k	y_k	$\frac{x_k}{4} - \frac{y_k}{2}$
0	1	-0.5
0.25	0.5	-0.1875
0.5	0.3125	-0.03125
0.75	0.2813	0.04685
1	0.3282	0.0859
1.25	0.4141	0.10545
1.5	0.5196	0.1152
1.75	0.6348	0.1201
2	0.7549	

Nome: Flávio Luiz Cardoso Ribeiro - Turma 3

Exercícios

21.111. Polinômio - quadrados mínimos
de grau 2

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

Suavizar os dados:

Resolução:

Encontraremos uma eq. tq.: $y = a + bx + cx^2$

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y(x_i) - y_i)^2 \quad , \quad \nabla E(a,b,c) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) b + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) c = \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) b + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^3\right) c = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^3\right) b + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^4\right) c = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Temos: $n = 5$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 11,61 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 32,7681 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 102,761 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 341,750 \\ \sum_{i=1}^{5} y_i = 11,350 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 29,7696 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 94,6053 \end{cases}$$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 5 & 11,610 & 32,7681 \\ 11,610 & 32,7281 & 102,7681 \\ 32,7281 & 102,7681 & 341,750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,350 \\ 29,770 \\ 94,605 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 11,67 & 33,0525 \\ -2,322 & 5,6303 & 26,6806 \\ -6,745 & 24,451 & 118,252 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,25 \\ 3,4153 \\ 18,7237 \end{bmatrix}$$

$-4,3427 \quad 2,3581 \qquad 3,8920$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1,002 \\ b = -4,014 \\ a = 5,0221 \end{cases} \qquad \boxed{y = 5,02 - 4,04x + 1,002x^2}$$

21.117 Grau 2

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$-0,71$	$-0,1$	$0,51$	$0,82$	$0,88$	$0,81$	$0,49$

$$\Rightarrow \begin{cases} na & \sum x_i b & \sum x_i^2 c = \sum y_i \\ \sum x_i a & \sum x_i^2 b & \sum x_i^3 c = \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 a & \sum x_i^3 b & \sum x_i^3 c = \sum x_i^2 y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 7 \\ \sum x_i = 0 \\ \sum x_i^2 = 28 \\ \sum x_i^3 = 0 \\ \sum x_i^4 = 196 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \sum y_i &= 2,7 \\ \sum x_i y_i &= 5,79 \\ \sum x_i^2 y_i &= 2,25 \end{aligned}$$

$$+(\bar{x}^4) \begin{bmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,7 \\ 5,79 \\ 2,25 \end{bmatrix} \Rightarrow b = 0,2067$$

$$c = \frac{-8,55}{84} = -0,101$$

$$\boxed{y = 0,792 + 0,206x - 0,101x^2} \qquad a = 0,792$$

(Flávio Luiz

21.54 Linha

x	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	4,6	4,8	4,6	4,9	5,0	5,4	5,1	5,5	5,6	6,0

$y = a + bx$

$$E = \sum (y(x_i) - y_i)^2 \qquad \nabla E(a,b) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} n\,a & \sum x_i = \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 10 & \\ \sum x_i = 150 & \sum y_i = 55,5 \\ \sum x_i^2 = 2580 & \sum y_i x_i = 796,2 \end{array} \right.$$

$$-\times 15 \left\{ \begin{array}{l} 10\,a + 150\,b = 55,1 \\ 150\,a + 2580\,b = 796,2 \end{array} \right.$$

$$330\,b = 23,7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 0,07 \\ a = 4,4327 \end{array} \right.$$

$$\boxed{R.: y = 4,4327 + 0,07x}$$

Nome: Flávio Luiz Cardoso Ribeiro Turma 3

Exercícios de CCI-22

① Representar $4/3 = 1,3333...$:

(a) Na base 10, com precisão 5 dígitos:

$$4/3 = 1\times10^{0} + 3\times10^{-1} + 3\times10^{-1} + 3\times10^{-1} + 3\times10^{-1}$$

(b) Na base 2, com precisão de 10 dígitos:

$$\begin{array}{r} \underline{1}.3333... \\ 2 \\ \hline \underline{0}.6666... \\ 2 \\ \hline \underline{1}.3333... \\ 2 \\ \hline \underline{0}.6666... \\ 2 \\ \hline \underline{1}.2222 \\ ... \end{array}$$

$$(1,333)_{10} = 1\times2^{0} + 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 1\times2^{-4} + 0\times2^{-5} + 1\times2^{-6} + 0\times2^{-7} + 1\times2^{-8} + 0\times2^{-9}$$

$$(1,333)_{10} = (1,0101010101)_2$$

Representar $\pi = 3,1415926...$

(a) Na base 10, com precisão 5 dígitos:

$$\pi = 3.10^{0} + 1.10^{-1} + 4.10^{-2} + 1.10^{-3} + 5\times10^{-4} + 9\times10^{-5}$$

(b) Na base 2, com precisão de 10 dígitos:

1º parte inteira:

$$(3)_{10} = 1\times2^{0} + 1\times2^{1} = (11)_2$$

2º parte decimal:

$$(0,1415926)_{10} \rightarrow (?)_2$$

0,1415929
×2
$\underline{0}$,283185
×2
$\underline{0}$,566370
×2
$\underline{1}$,132741
×2
$\underline{0}$,2654824
×2
$\underline{0}$,5309648
×2
$\underline{1}$,061929
×2
$\underline{0}$,123859
×2
$\underline{0}$,247719
×2
$\underline{0}$,49543
×2
$\underline{0}$,990877

$$\Rightarrow \pi = 1\times2^{1} + 1\times2^{0} + 0\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 0\times2^{-3} + 0\times2^{-4} + 0\times2^{-5} + 1\times2^{-6} + 0\times2^{-7} + 0\times2^{-8} + 0\times2^{-9} + 0\times2^{-10}$$

$$\pi = (11{,}00100110000)_2$$

2) Normalizar na forma $0{,}xxx \cdot B^{e}$

$$\frac{4}{3} = (0{,}13333 \cdot 10^{1})_{10} = (0{,}1010101010 \cdot 2^{1})_2$$

$$\pi = (0{,}31415 \cdot 10^{1})_{10} = (0{,}1100100100 \cdot 2^{2})_2$$

2) Explicar como são representados no padrão IEEE.

Seja um número na forma $1{,}xxx \cdot 2^{e}$, base 2

São representados na forma:

$$\underbrace{\_}_{\substack{\text{sinal} \\ (1\text{ bit})}}\ \underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_}_{\substack{\text{característica} \\ (8\text{ bits})}}\ \underbrace{\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_\ldots\_}_{\substack{\text{mantissa} \\ (23\text{ bits})}}$$

$$\text{sinal} = \begin{cases} 0, & \text{número positivo} \\ 1, & \text{número negativo} \end{cases}$$

característica = 128 + e (passar p/ base 2)

mantissa = xxx...x

Exemplos: $\frac{4}{3} = (0{,}101010\ldots 2^{1})_2 = (1{,}01010101 \cdot 2^{0})$

No IEEE: $\underbrace{0}_{\text{sinal}}\ \underbrace{1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0}_{128+0}\ \underbrace{0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\ldots}_{\text{mantissa}}$

{Flávio Luiz

② Usar os três métodos de interpolação aprendidos para estimar $y(3)$:

x	0	1	2	4	5
y	0	16	48	88	0

(a) Diferenças divididas:

$$g(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + d_4(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_3)$$

$$y(x) = g(x) = 0 + 16(x-0) + 8(x-0)(x-1) - 3(x)(x-1)(x-2) + {-1}\,x(x-1)(x-2)(x-4)$$

x	ord 0				
0	0 d_0	16 d_1	8 d_2	-3 d_3	-1 d_4
1	16	32	-4	-8	
2	48	20	-36		
4	88	-88			
5	0				

$$y(3) = 16.3 + 8.3.2 - 3.3.2.(+1) - 3.2.1.(-1)$$

$$y(3) = 48 + 48 - 18 + 6 = 84$$

(b) $$L_k = \prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$L_0 = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-4)(0-5)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{20}$$

$$L_1 = \frac{x(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-4)(1-5)} = \frac{x(x-2)(x-4)(x-5)}{-12}$$

$$L_2 = \frac{x(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-4)(2-5)}$$

$$L_3 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-5)}$$

$$L_4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-0)(5-1)(5-2)(5-4)}$$

$$P(x) = y_0L_0 + y_1L_1 + y_2L_2 + y_3L_3 + y_4L_4$$

$$P(3) = 84$$

(C) Solução de sistema linear

$$y(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ y(1) = 16 \Rightarrow a + b + c + d + e = 16 \\ y(2) = 48 \Rightarrow a + 2b + 4c + 8d + 16e = 48 \\ y(4) = 88 \Rightarrow a + 4b + 16c + 64d + 256e = 88 \\ y(5) = 0 \Rightarrow a + 5b + 25c + 125d + 625e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + c + d + e = 16 \quad \cdot(-2) \\ 2b + 4c + 8d + 16e = 48 \quad \cdot -4 \\ 4b + 16c + 64d + 256e = 88 \quad \cdot -5 \\ 5b + 25c + 125d + 625e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 6 & 14 \\ -4 & -6 & 24 & 168 \\ -5 & 20 & 120 & 620 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \\ 24 \\ -80 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(3) = 84}$$

1 / 1

Nome: Flávio Luiz Cardoso Ribeiro

Exercício 1 Resolver por decomposição LU

$$\begin{aligned} w + x + y &= 6 \\ -3w - 17x + y + 2z &= 2 \\ 4w - 17x + 8y - 5z &= 2 \\ -5x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -17 & 1 & 2 \\ 4 & -17 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} m_{21} = -3 \\ m_{31} = 4 \\ m_{41} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & -21 & 4 & -9 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad m_{32} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2} \quad m_{42} = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & 3/2 & -2 & -8 \\ 0 & 5/14 & -24/7 & 2/7 \end{bmatrix} \quad m_{43} = -24/7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -14 & 4 & 2 \\ 4 & 3/2 & -2 & -8 \\ 0 & \frac{5}{14} & \frac{12}{7} & 14 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{14} & \frac{12}{7} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{LUx}_{y} = b \quad \begin{cases} Ux = y \\ Ly = b \end{cases} \Rightarrow Ly = b \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 20 \\ y_3 = -52 \end{cases} \begin{cases} y_4 = 84 \end{cases}$$

$-3.6 + y_2 = 2$

$y_2 = 20$

$4.6 + \frac{3.20}{2} + y_3 = 2$

$y_3 = -52$

$\frac{50 - 52.12}{7}$

$-9 - \frac{5.20}{14.7} - 52.\frac{12}{7}$

$+ y_4 = 2$

$* Ux = y$

$x_4 = \frac{84}{14} = 6 \qquad x_3 - 8.6 = -52$

$-2x_3 = -4 \qquad \Rightarrow x_3 = 2$

$-14x_2 + 4.2 + 2.6 = 20$

$-14x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 0 + 2 = 6$

$x_1 = 4$

$$\boxed{\begin{cases} w = 8 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{cases}}$$

Exercício 2

$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad * Ly = b$

$\Rightarrow y_1 = 6$

$y_2 = 20$

$y_3 = -52$

$\frac{5}{14}.20 - 52.\frac{12}{7} + y_4 = 10$

$y_4 = 92$

$x_4 = \frac{92}{14} = \frac{46}{7}$

$-2x_3 - 8.\frac{46}{7} = -52 \Rightarrow x_3 = \boxed{2/7}$

$\boxed{-14.x_2 + 4.\frac{2}{7} + 2.\frac{46}{7} = 20}$

$-14x_2 + \frac{100}{7} = \frac{140}{7} \Rightarrow -\overset{7}{\cancel{14}}x_2 = \frac{\cancel{40}\,20}{7}$

$x_2 = \frac{-20}{49}$

$x_1 - \frac{20}{49} + \frac{14}{49} = 6 \Rightarrow x_1 = 6\left(1 + \frac{1}{49}\right) = \frac{300}{49}$

$\boxed{w = 300/49 \quad x = -20/49 \quad y = 2/7 \quad z = 46/7}$

$$\xrightarrow{-20}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&10&25&90\\20&10&0&80\\-20&20&-20&0\end{array}\right]\xrightarrow{-3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&10&25&90\\0&30&-20&80\\&-30&-75&-270\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&10&25&90\\0&0&-95&-190\end{array}\right]$$

$$-95\,i_3=-190$$
$$\boxed{i_3=2A}$$

$$10\,i_2+\underbrace{25\,i_3}_{50}=90$$
$$10\,i_2=40$$
$$\boxed{i_2=4A}$$

$$i_1-i_2+i_3=0$$
$$i_1-4+2=0$$
$$\boxed{i_1=2A}$$

Operações elementares:

- trocar duas equações (linhas) $\rightarrow M=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
- multiplicar equação por constante não nula $\rightarrow M=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
- adição de um múltiplo de uma equação à outra $\rightarrow M=\begin{bmatrix}1&0&0\\\alpha&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

▷ Transparências cap3: 24 a 29 Cecília
34 a 39 hirata

Exercício

Exercício 1 - Resolver

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8$$
$$8x_2 + 2x_3 = -7$$
$$6x_3 = 3$$

Solução por retrosubstituição

$$x_3 = 3/6 = 1/2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_1 = 4$$

Exercício 2 - Resolver

$$u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 + u_{14} x_4 = b_1$$
$$u_{22} x_2 + u_{23} x_3 + u_{24} x_4 = b_2$$
$$u_{33} x_3 + u_{34} x_4 = b_3$$
$$u_{44} x_4 = b_4$$

(escrever solução na forma de programa)

(generalizar para tamanho n)

$$x_4 = \frac{b_4}{u_{44}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - u_{34} \cdot x_4}{u_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - u_{24} \cdot x_4 - u_{23} \cdot x_3}{u_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - u_{14} \cdot x_4 - u_{13} \cdot x_3 - u_{12} \cdot x_2}{u_{11}}$$

Exercício 3 - Resolver

$$x_1 = b_1$$
$$l_{21} x_1 + x_2 = b_2$$
$$l_{31} x_1 + l_{32} x_2 + x_3 = b_3$$
$$\cdots$$
$$l_{n1} x_1 + l_{n2} x_2 + l_{n3} x_3 + \cdots + l_{nn-1} x_{n-1} + x_n = b_n$$

$$x_1 = b_1$$
$$x_2 = b_2 - l_{21} \cdot x_1$$
$$x_3 = b_3 - l_{31} \cdot x_1 - l_{32} \cdot x_2$$
$$\cdots$$
$$x_n = b_n - l_{n1} \cdot x_1 - l_{n2} \cdot x_2 - l_{n3} \cdot x_3 \cdots - l_{nn-1} x_{n-1}$$

Exercício 4

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -20$$

→ aplicar eliminação Gaussiana

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & -20 & -20 & 0 & 0 \end{array}\right] -3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -95 & -20 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{U} \quad \underbrace{}_{L^{-1}}$$

inversa

$$-20\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 20 & 0 & 1 \end{array}\right] +3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

L

produto com U

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 20 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & -95 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 25 \\ 20 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

5.

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aula 2 - 0.1

Eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

$$\begin{array}{c} \times m_{21} \\ \ominus \\ \ominus \times m_{31} \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \cancel{a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{11}}\ {}^{0} & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{13} & b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \cancel{a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{11}} & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{13} & b_3 - b_2 \cdot \frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} \longrightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pivot

$$\begin{array}{c} \\ \times m'_{32} \\ \ominus \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right] \longrightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m'_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$m'_{ij} = \frac{a'_{ij}}{a'_{ii}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & \cancel{a'_{32} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \cdot a'_{22}}\ {}^{0} & a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \cdot a'_{23} & b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \cdot b'_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{bmatrix} \rightarrow M_2 \cdot M_1 \cdot A \cdot \underline{x} = M_2 \cdot M_1 \cdot \underline{b}$$

Aula 2 - 0.2

Retrossubstituição

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ & & a_{33}'' & b_3'' \end{array}\right]$$

$$x_3 = \frac{b_3''}{a_{33}''}$$

$$x_2 = \frac{b_2' - a_{23}' \cdot x_3}{a_{22}'}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{13} \cdot x_3 - a_{12} \cdot x_2}{a_{11}}$$

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32}' & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32}' & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot A\underline{x} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_2 M_1 \cdot \underline{b}$$

Aula 2-03

O que fazer quando tenho que resolver uma série de sistemas com os mesmos coeficientes, mas termos independentes distintos?

$$A\,\underline{x}_1 = \underline{b}_1$$
$$A\,\underline{x}_2 = \underline{b}_2$$
$$A\,\underline{x}_3 = \underline{b}_3$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \rightarrow m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

→ são inversíveis
det da triangular
= produtório da diag. principal

$$\underbrace{M_2 \cdot M_1 \cdot A}_{U}\,\underline{x} = M_2 \cdot M_1 \cdot \underline{b}$$

$$\underbrace{M_1^{-1} \cdot M_2^{-1}}_{L} \cdot \underbrace{M_2 \cdot M_1 \cdot A}_{U}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$A = L \cdot U$$

Se $L \cdot \underbrace{U\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b} \rightarrow \begin{cases} L \cdot \underline{y} = \underline{b} \\ U \cdot \underline{x} = \underline{y} \end{cases}$

Passos (Método de Doolittle)

1. determinar decomposição LU de A e guardar
   - → $O(n^3)$ operações
2. para cada sistema a resolver
   - 2.1 obtenha $\underline{y}$ por substituição direta em $L\underline{y} = \underline{b}$
   - 2.2 obtenha $\underline{x}$ por retrosubstituição em $U\underline{x} = \underline{y}$
   - → ~~[illegible]~~ $O(n^2)$ operações

A matriz L é da forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ \cdots \end{bmatrix}$ e U da forma $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ & & u_{33} & \\ & & \cdots \end{bmatrix}$

É comum armazenar na forma $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \\ & \cdots \end{bmatrix}$

$l_{ij} = m_{ij}$ da eliminação gaussiana

▷ Transparências 30 a 42

Problemas na Eliminação Gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como faço a eliminação?

→ Trocar linhas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Outro problema

$$\begin{bmatrix} 0,001 & 2,42 \\ 1,00 & 1,58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,20 \\ 4,57 \end{bmatrix}$$

Eliminando com 3 algarismos significativos

$$\begin{bmatrix} 0,001 & 2,42 \\ 0 & -2420 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,20 \\ -5200 \end{bmatrix}$$

multiplicador m_{21} ficou muito grande $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1000$

cuja solução errada é $x_1 = 0,00$ e $x_2 = 2,15$

→ trocar linhas

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 1,58 \\ 0,001 & 2,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,57 \\ 5,20 \end{bmatrix}$$

com os mesmos três significativos:

$$\begin{bmatrix} 1,00 & 1,58 \\ 0 & 2,42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,57 \\ 5,20 \end{bmatrix}$$

solução $x_1 = 1,18$ e $x_2 = 2,15$ → multiplicador $m_{21} = 0,001$ (pequeno)

▷ transparências de pivoteamento 30 a 42

Estratégia: procurar pivot com maior módulo

pivoteamento parcial: procura na coluna, troca linhas

pivoteamento total: procura na submatriz, troca linhas e colunas

Aula 2-5

Eliminação Gaussiana:

Matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Multiplica uma linha e soma a outra

$\boxed{det = 1}$

com pivoteamento:

Matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ permuta duas linhas

$\boxed{det = \pm 1}$

pivoteamento parcial → pré-multiplica

pivoteamento completo → pré-multiplica e pós-multiplica

dificuldades: • troca a ordem das incógnitas $x_1 \dots x_n$

• complexidade maior, busca pivot em $O(n^2)$

Exemplo LU com pivoteamento parcial

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 \quad\quad - 3x_3 = -2 \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

pivot

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = P_0 A$$

↓

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}' = P_1 A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

pivot

$$A'' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{bmatrix}$$

Solução $Ly = P\underline{b}$ depois $U\underline{x} = y$

$P = P_1 \cdot P_0$

Aula 2-E

Exercício 1

Resolver por decomposição LU

$$
\begin{aligned}
w + x + y &= 6\\
-3w - 17x + y + 2z &= 2\\
4w - 17x + 8y - 5z &= 2\\
-5x - 2y + z &= 2
\end{aligned}
\rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -17 & 1 & 2\\ 4 & -17 & 8 & -5\\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\downarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & -21 & 4 & -5\\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & \frac{3}{2} & -2 & -8\\ 0 & \frac{5}{14} & -\frac{24}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -14 & 4 & 2\\ 4 & 3/2 & -2 & -8\\ 0 & 5/14 & -\frac{12}{7} & 14 \end{bmatrix}
$$

full(LU(sparse(A),0))

CORRIGIR

$$
L\underline{y} = \underline{b} \rightarrow
\begin{aligned}
y_1 &= 6\\
-3y_1 + y_2 &= 2\\
4y_1 + \tfrac{3}{2}y_2 + y_3 &= 2\\
\tfrac{5}{14}y_2 - \tfrac{2}{7}y_3 + y_4 &= 2
\end{aligned}
$$

$y_1 = 6$

$y_2 = 2 + 3 \cdot 6 = 2 + 18 = 20$

$y_3 = 2 - 4 \cdot 6 - \frac{3}{2} \cdot 20 = 2 - 24 - 30 = -52$

~~$y_4 = 2 - \frac{5 \cdot 20}{14} + \frac{2 \cdot 52}{7} = \frac{14 - 50 + 104}{7} = \frac{68}{7}$~~

$y_4 = 2 - \frac{5}{14} y_2 + \frac{2}{7} y_3$

$= 2 - \frac{5}{14} \cdot 20 + \frac{2}{7} \cdot (-52) = \frac{14 - 50 - 104}{7} = -20$

$154 - 14 = 140$

$$
U\underline{x} = \underline{y} \qquad
\begin{aligned}
w + x + y &= 6\\
-14x + 4y + 2z &= 20\\
-2y - 8z &= -52\\
-2z &= \cancel{68}\ -20
\end{aligned}
$$

$z = \frac{-20}{-2} = \boxed{10}$

$y = \frac{-52 + 80}{-2} = \frac{28}{-2} = \boxed{-14}$

$x = \frac{20 - 4y - 2z}{-14} = \frac{20 + 56 - 20}{-14} = \boxed{-4}$

$w = 6 - x - y = 6 + 4 + 14 = \boxed{24}$

format rat

Resolver para $\underline{b} = \begin{bmatrix} 6\\ 2\\ 2\\ 10 \end{bmatrix}$ $\quad y = \begin{pmatrix} 6\\ 20\\ -52\\ -12 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 4\\ 0\\ 2\\ 6 \end{pmatrix}$

Aula 2-E2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & X & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LU dessa matriz

rank máximo 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não acho pivot → rank máximo 3

não acho pivot → rank máximo 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & X & 0 \end{bmatrix}$$

Significado do ϵ da máquina:

É o maior erro relativo decorrente da representação de um número

Estabilidade de um algoritmo:

O algoritmo é estável se sua solução não depende muito dos erros ~~nos~~ cálculos.

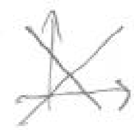
Condicionamento (condição) diz respeito ao problema:

a) Problema bem-condicionado

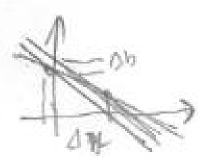
Solução varia pouco se os dados são alterados levemente

b) Problema mal-condicionado

Solução varia muito se os dados são alterados levemente

a) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$  $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2{,}02 \\ x_1 - x_2 &= 2{,}02 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1{,}01 \\ x_2 &= 1{,}01 \end{aligned}$

b) $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 11 \\ 1{,}5x + 4{,}501y &= 16{,}503 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}$ $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 11 \\ 1{,}5x + 4{,}501y &= 16{,}500 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= 10{,}28 \\ y &= 0{,}24 \end{aligned}$



Normas

Medir a discrepância onde há erros em ~~uma~~ ou mais variáveis

"tamanho" ou "comprimento" de um vetor

Normas de vetores

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (Norma 1) $|x| + |y|$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ (Norma 2/Euclidiana) $\sqrt{x^2+y^2}$

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ (Norma ∞)

Aula 3 - E2

Propriedades das normas

- $\|x\| > 0$ se $x \neq 0$ e $\|x\| = 0$ se $x = 0$
- $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\forall \lambda$ escalar
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

Quando usar cada norma

Norma 2 é diferenciável (média tem a menor norma2 de um cj de dados)

Norma ∞ garante o limite máximo do erro de cada variável (média do min com o max)

Norma 1 desconsidera outliers (mediana)

Normas de Matrizes

Norma 1: $\|A\|_1 = \max\limits_{j} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ maior soma dos módulos nas colunas

Norma 2: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \text{ autovalor}(A^T A)}$

Norma ∞: $\|A\|_\infty = \max\limits_{i} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$ maior soma dos módulos nas linhas

Norma de Frobenius: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij})^2}$

Número de Condição de uma matriz A (não-singular)

$$\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Propriedade: $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Considerando o erro relativo como $\varepsilon_{\text{máquina}}$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \lesssim \text{cond}(A) \cdot \varepsilon_{\text{máquina}}$$

Método de Refinamento

Aula 4-1

$\underset{\sim}{A}\underline{x} = \underline{b}$

Resolvendo obtenho $\underline{x}_1$

Resíduo:

$\underline{b}_1 = A\underline{x}_1$

$\underline{r}_1 = \underline{b} - \underline{b}_1 \rightarrow \|r_1\| > \text{tol.}$

$\underline{z}_1 = \underline{x} - \underline{x}_1$?

$A\underline{x} - A\underline{x}_1 = \underline{b} - \underline{b}_1$

$A\underline{z}_1 = \underline{r}_1$

Resolvendo obtenho

$\hat{\underline{z}}_1$

$\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \hat{\underline{z}}_1$

$\underline{z}_2 = \underline{x} - \underline{x}_2$?

$\underline{b}_2 = A\underline{x}_2$

$\underline{r}_2 = \underline{b} - \underline{b}_2$

$A\underline{z}_2 = \underline{r}_2$

Continuar até convergência ...

* plotar $\|r_i\|$ contra i para números de condição diferentes

Introdução Sobre Métodos Iterativos

- Partem de uma aproximação inicial arbitrária
- A cada iteração obtém uma aproximação melhor

Métodos de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi

- Reescrevem o sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ da forma $\underline{x}^{(k+1)} = G\underline{x}^{(k)} + \underline{c}$
- São lentos e nem sempre convergem para a solução
- Trocas de linhas do sistema alteram o comportamento
- Não convergem se o maior auto-valor de G (raio espectral) é maior que 1 em módulo.
- São eficientes em tempo e memória para matrizes muito esparsas

Aula 4-2

Método de Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1' = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2' = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n' = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

$$\underline{x} = C\underline{x} + \underline{g}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} \leftarrow C \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{g}$$ repetidamente

Quando parar?

a) repetir até $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < p$

alguma norma de vetor

valor escolhido para precisão

b) Critério de erro relativo

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < p_R$$

c) número de iterações

Exemplo Transparência Hirata 63 – 64

Critério das Linhas

Uma condição suficiente para convergência do método de Gauss-Jacobi

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|$$

linha k

soma cada elemento da coluna $j \neq k$ (em módulo)

dividir pelo módulo do elemento da diagonal

Se $\max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1 \Rightarrow$ converge

Exemplo: Gauss-Jacobi convergência

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \frac{2+1}{10} = 0,3 < 1 \\ \to \frac{1+1}{5} = 0,4 < 1 \\ \to \frac{2+3}{10} = 0,5 < 1 \end{matrix}$$

Todos são menores que 1 ⇒ converge!

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \frac{1}{1} = 1 \geq 1 \\ \to \frac{1}{3} = 0.333\ldots \end{matrix}$$

Máximo é 1 que não é menor que 1 ⇒ não sei se converge!

(de fato, vai convergir)

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \frac{1+3}{1} \geq 1$$

⇒ não sei se converge...

Trocando as linhas 1 e 2

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{2+2}{5} < 1 \\ \frac{1+1}{3} < 1 \\ \frac{0+6}{8} < 1 \end{matrix}$$

⇒ converge

Aula 4-3

Método de Gauss-Seidel

- Método de Gauss-Jacobi é muito lento
- a implementação de Gauss-Jacobi é mais simples e mais facilmente paralelizável – pode ser uma boa opção para implementação em hardware
- para operações em seqüência o método de Gauss-Seidel é mais rápido e estável

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}\boxed{x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{b_3 - a_{31}\boxed{x_1^{(k+1)}} - a_{32}\boxed{x_2^{(k+1)}} \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}}{a_{33}}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}}$$

▷ Interpretação Gráfica
Transp Hirata 67 ~ 71

Convergência do Método de Gauss-Seidel

Critério de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\cdot\beta_1 + |a_{j2}|\cdot\beta_2 + \cdots + |a_{jj-1}|\cdot\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{j-1} |a_{jk}|\cdot\beta_k + \sum_{k=j+1}^{n} |a_{jk}|}{|a_{jj}|}$$

$$\beta = \max_{1\le j\le n} \{\beta_j\}$$

Se $\beta < 1 \Rightarrow$ O método de Gauss-Seidel gera uma seqüência convergente de $\underline{x}^{(k)}$

Quanto menor for β, mais rápida será a convergência

▷ Transparências 72 e 73 Hirata

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & -0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = (0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1)/1 = 0{,}7$

$\beta_2 = (0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1)/1 = 0{,}44$

$\beta_3 = (0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}44 \times 0{,}2 + 0{,}2)/1 = 0{,}358$

$\beta_4 = (0{,}7 \times 0{,}1 + 0{,}44 \times 0{,}3 + 0{,}358 \times 0{,}2)/1$

Aula 4-4

Critério das Linhas em Gauss-Seidel

Se $\alpha = \max \alpha_k < 1$

$$\alpha_k = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right) / |a_{kk}|$$

então o método de Gauss-Seidel converge!

Critério das linhas satisfeito implica critério de Sassenfeld satisfeito.

O critério de Sassenfeld pode ser satisfeito sem que o critério das linhas o seja

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3} < 1$

$\alpha_2 = \frac{1}{1} \rightarrow$ não satisfaz critério das linhas

$\beta_2 = \frac{1/3}{1} < 1$

$\beta_3 = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} / 2 < 1 \rightarrow$ satisfaz Sassenfeld

Representação de Ponto Flutuante

(Aula 4-E)

▷ programa flut.c

Representar $4/3 = 1,3333\ldots$

Na base 10, com precisão de 5 dígitos

Na base 2, com precisão de 10 dígitos

Representar π

Na base 10, com precisão de 5 dígitos

Na base 2, com precisão de 10 dígitos

Normalizar da forma $0,XXXX \cdot B^{e}$

Explicar como esses números são representados ~~no~~ padrão IEEE (precisão simples)

tipo float de 32 bits

usar o programa flut.c

double

$b = 2$

$p = 53$

$E1 = -1022$

$E2 = 1023$

$\varepsilon = 2,2204 \cdot 10^{-16}$

Aula 5-1

Interpolação

Determinar os parâmetros de uma função $g(x)$ para que

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

$n+1$ pontos $\rightarrow$ um único polinômio de grau n

D Transp. Hirata: 118 - 121

Forma de Lagrange

$$g(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

$g(x_i) = y_i \quad , \; i = 0 \dots n \qquad (n+1)$ pontos

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq i \\ 1 & \text{se } k = i \end{cases}$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)} \rightarrow \text{polinômio de grau } n$$

D Transp Hirata 122 - 123

Interpolação por Diferenças Divididas / Forma de Newton

$$g(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + d_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \rightarrow \text{polinômio de grau } n$$

$f[x_0] = f(x_0)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$p_0(x) = f[x_0]$ $\qquad$ $f(x_0, \cancel{x_0}) = F_0(x)$

$p_1(x) = f[x_0, x_1, \cancel{x_2}]$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x]$$

Aula 5-E

Usar os três métodos de interpolação aprendidos para estimar $y(3)$

x	y
0	0
1	16
2	48
4	88
5	0

a) diferenças finitas

b) Lagrange

c) solução do sist. linear

usando um polinômio de grau 4

a)

x	y				
0	0	16	8	−3	−1
1	16	32	−4	−8	
2	48	20	−36		
4	88	−88			
5	0				

$$y = 0 + 16(x-0) + 8(x-0)(x-1) - 3(x-0)(x-1)(x-2) - 1(x-0)(x-1)(x-2)(x-4)$$

$$y(3) = 16\cdot 3 + 8\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$= 48 + \underbrace{48-18}_{30} + 6 = 78 + 6 = 84$$

b) $$16 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-4)(1-5)} + 48 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-4)(2-5)} + 88 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-5)}$$

$1 \quad (-1) \quad (-2) \quad (-3) \qquad 2 \quad 1 \quad (-2) \quad (-3) \qquad 4 \quad 3 \quad 2 \quad (-1)$

$$= -\frac{4}{3}(x-0)(x-2)(x-4)(x-5) + 4\,(x-0)(x-1)(x-4)(x-5) - \frac{11}{3}(x-0)(x-1)(x-2)(x-5)$$

$$= -\frac{4}{3}\, 3 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1)(-2) - \frac{11}{3}\, 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$= \boxed{-8 + 48 + 44 = 84}$$

c) $$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \\ 48 \\ 88 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ajuste de Curvas

Quando as técnicas de interpolação não são apropriadas:

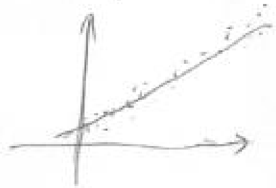
a) extrapolação: valores fora do intervalo tabelado

b) valores com erros

Ajuste de curvas: encontrar parâmetros que definem uma função/curva média para representar os dados

Exemplo: encontrar uma reta que aproxime os dados de um experimento: b medido em função de t

$$b = c + d \cdot t$$



- medida de posição, d seria a velocidade, t: tempo
- custo de produzir t peças: custo fixo c e d: custo dependente do número de peças
- medida de deformação, t é a carga (eq. da mola)

Várias medidas b_i, t_i

Se tivesse apenas duas medidas: (interpolação)

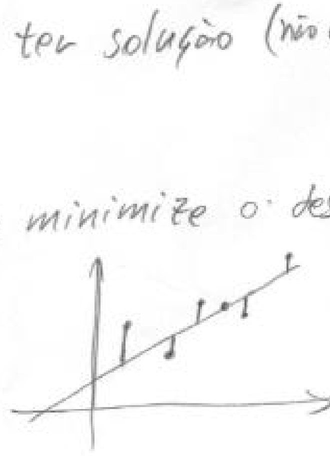
$$\begin{cases} c + d \cdot t_1 = b_1 \\ c + d \cdot t_2 = b_2 \end{cases}$$

Para m medidas

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (A\underline{x} = \underline{b})$$

Sistema superdeterminado, pode não ter solução (não depende só de A, mas de $\underline{b}$ também)

Idéia: Encontrar uma "solução" que minimize o desvio



Aula 6-2

Sistemas Superdeterminados $A\underline{x} = \underline{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = b_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 \\ r_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2 \\ r_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3 \end{cases}$$

Minimizar algum critério sobre $\underline{r} = [r_1\ r_2\ r_3]'$

a) $E = |r_1| + |r_2| + |r_3|$ (Manhatan)

b) $E = \max\{|r_1|, |r_2|, |r_3|\}$ (Chebyshev)

$\rightarrow$ não são diferenciáveis, problemas de programação linear $\rightarrow$ método Simplex

c) $E = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ (Euclides/Pitagoras) $\longrightarrow$ Método dos Mínimos Quadrados

ou

$E = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \longrightarrow$ diferenciável : $\nabla_{(x_1,x_2)} E = 0 \Rightarrow$ mínimo

$$E = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2)^2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1)\cdot a_{11} + 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2)\cdot a_{21} + 2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3)\cdot a_{31} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_2} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1)\cdot a_{12} + 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2)\cdot a_{22} + 2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3)\cdot a_{32} = 0$$

$$\begin{cases} (a_{11}\cdot a_{11} + a_{21}\cdot a_{21} + a_{31}\cdot a_{31})x_1 + (a_{12}\cdot a_{11} + a_{22}\cdot a_{21} + a_{32}\cdot a_{31})x_2 = a_{11}\cdot b_1 + a_{21}\cdot b_2 + a_{31}\cdot b_3 \\ (a_{11}\cdot a_{12} + a_{21}\cdot a_{22} + a_{31}\cdot a_{32})x_1 + (a_{12}\cdot a_{12} + a_{22}\cdot a_{22} + a_{32}\cdot a_{32})x_2 = a_{12}\cdot b_1 + a_{22}\cdot b_2 + a_{32}\cdot b_3 \end{cases}$$

$A\underline{x} = \underline{b} \rightarrow$ super determinado sem solução

$A^T A\,\underline{x} = A^T\cdot\underline{b} \rightarrow$ Sistema de equações lineares a ser resolvido (sistema de equações normais)

$$\underline{x} = \underbrace{(A^TA)^{-1}A^T}_{A^+}\cdot\underline{b}$$

$A^+ \rightarrow$ matriz pseudo-inversa de A

$$\underbrace{A\,\underline{x}}_{\cancel{b}} = \underbrace{A\cdot(A^TA)^{-1}\cdot A^T}_{P}\cdot\underline{b}$$

$P \rightarrow$ matriz de projeção

$\cancel{b} = P\cdot\underline{b} \Rightarrow \underline{r} = P\cdot\underline{b} - \cancel{b}$

Aula 6-3

encontrar reta $b = c + d \cdot t$
Valores experimentais
t_i, b_i

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo

t	b
-1	1
1	1
2	3

$$\rightarrow \begin{cases} c - d = 1 \\ c + d = 1 \\ c + 2d = 3 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$A^T A \, \underline{x} = A^T \underline{b} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow c = \frac{9}{7}, \; d = \frac{4}{7}$$

a melhor linha é $\frac{9}{7} + \frac{4}{7} t$

Ajuste de Reta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i \cdot b_i \end{bmatrix}$$

Ajuste de Parábola

$b = c + dt + et^2$

$$\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \\ t_1^2 & \cdots & t_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} t_i & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{m} t_i & \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i^3 \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^2 & \sum_{i=1}^{m} t_i^3 & \sum_{i=1}^{m} t_i^4 \end{bmatrix}$$

comparar com

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 1\,dx & \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx \\ \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx & \int_0^1 x^3\,dx \\ \int_0^1 x^2\,dx & \int_0^1 x^3\,dx & \int_0^1 x^4\,dx \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Matriz de Hilbert

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & \cdots & t_m \\ t_1^2 & \cdots & t_m^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i \cdot b_i \\ \sum_{i=1}^{m} t_i^2 \cdot b_i \end{bmatrix}$$

Aula 6-4

Propriedades da Matriz A^TA

- Simétrica $(A^TA)^T = A^TA$
- positiva-definida $y^T(A^TA)\cdot y > 0$, $\forall y \neq 0$ → desde que A seja de posto completo

(todos auto-valores de A^TA são positivos)

Resolver o sistema $A^TA\underline{x} = A^T\underline{b}$ utilizando a decomposição de Cholesky

$$C = A^TA = L\cdot L^T$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}\cdot l_{21} & l_{11}\cdot l_{31} \\ l_{21}\cdot l_{11} & l_{21}^2+l_{22}^2 & l_{21}l_{31}+l_{22}\cdot l_{32} \\ l_{11}\cdot l_{31} & l_{32}\cdot l_{21}+l_{32}\cdot l_{22} & l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{c_{11}} \quad l_{21} = \frac{c_{12}}{l_{11}} \quad l_{31} = \frac{c_{13}}{l_{11}} \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \quad l_{32} = \frac{a_{23} - l_{21}l_{31}}{l_{22}}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

Resolver

$$L\cdot \underbrace{L^T\underline{x}}_{y} = A^T\underline{b}$$

1º resolve: $L\cdot \underline{y} = A^T\underline{b}$

depois resolve: $L^T\cdot\underline{x} = \underline{y}$

Aula 7-1

$\triangleright$ Transparências de Ajuste de curvas

Aproximação por uma base de funções genérica

$f(x)$: função que eu quero aproximar
x_i, $1 \leq i \leq m$: pontos amostrados
$g_j(x)$, $1 \leq j \leq n$: base de funções (linearmente independentes nos pontos x_i)

$\varphi(x)$: função aproximadora

$$\varphi(x) = \alpha_1 \cdot g_1(x) + \alpha_2 \cdot g_2(x) + \dots + \alpha_n g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j g_j(x)$$

Minimizar $\|f(x) - \varphi(x)\|$

Utilizo o critério dos mínimos quadrados nos pontos amostrados x_j

$$d_i = f(x_i) - \varphi(x_i)$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{m} d_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - \varphi(x_i))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left[f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) \dots - \alpha_n g_n(x_i) \right]^2$$

Derivadas parciais de F são zero para F mínimo

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = 2 \sum_{i=1}^{m} \left[f(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) \dots - \alpha_n g_n(x_i) \right] \cdot \left[-g_j(x_i) \right] = 0 \quad \forall j \right.$$

j equações $\qquad \alpha_j \rightarrow j$ incógnitas

Aula 7-2

Sistema de Equações Normais

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \sum_{i=1}^{m} g_1(x_i)\cdot g_2(x_i)$$ (produto escalar)

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \sum_{i=1}^{m} [g_1(x_i)]^2$$

$$\left\{ \alpha_1 \cdot \sum_{i=1}^{m} g_1(x_i)\cdot g_j(x_i) + \alpha_2 \cdot \sum_{i=1}^{m} g_2(x_i)\cdot g_j(x_i) + \cdots + \alpha_n \sum_{i=1}^{m} g_n(x_i)\cdot g_j(x_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot g_j(x_i) \right.$$

$$\langle g_1, f \rangle = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cdot g_1(x_i)$$

$$\begin{bmatrix} \langle g_1,g_1\rangle & \langle g_1,g_2\rangle & \cdots & \langle g_1,g_n\rangle \\ \langle g_2,g_1\rangle & \langle g_2,g_2\rangle & \cdots & \langle g_2,g_n\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle g_n,g_1\rangle & \langle g_n,g_2\rangle & \cdots & \langle g_n,g_n\rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle g_1,f\rangle \\ \langle g_2,f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n,f\rangle \end{bmatrix}$$

$$A\underline{\alpha} = \underline{b}$$

Exemplos de funções

$$\langle g_0(x)=1,\ g_1(x)=x,\ g_2(x)=x^2 \rangle$$

$$\langle g_0(x)=1,\ g_1(x)=\cos x,\ g_2(x)=\sin x,\ g_3(x)=\cos 2x,\ g_4(x)=\sin 2x \rangle$$

$$\langle g_0(x)=1,\ g_1(x)=x,\ g_2(x)=x^2-\tfrac{1}{2} \rangle$$

Se a base for ortogonal

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$ (octonormal $=1$)

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{bmatrix} \langle g_1,g_1\rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle g_2,g_2\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle g_n,g_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle g_1,f\rangle \\ \langle g_2,f\rangle \\ \cdots \\ \langle g_n,f\rangle \end{bmatrix}$$

Decomposição QR

Aula 7-E

Passos da ortogonalização (Gram-Schmidt)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$b' = \underline{b} - \frac{(\underline{a}^T \underline{b})}{(\underline{a}^T \underline{a})} \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$c' = c - \frac{(b'^T \underline{c})}{(b'^T \underline{b}')} \cdot \underline{b}' - \frac{(\underline{a}'^T \underline{c})}{(\underline{a}'^T \underline{a})} \cdot \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \left(\frac{2}{2} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{as colunas}]{\text{Normalizar}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = Q$$

$A = Q \cdot R \longrightarrow$ Q é ortonormal $\quad Q^T \cdot Q = I$

$$Q^T A = R \longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = R^T \cdot Q^T \cdot Q \cdot R = R^T R$$

$$A^T A \underline{x} = A^T \underline{b} \Rightarrow R^T R \underline{x} = R^T Q^T \underline{b}$$

$$\Downarrow \quad R\underline{x} = Q^T \underline{b}$$

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

$$QR\underline{x} = \underline{b}$$

$$R\underline{x} = Q^T \underline{b}$$

Aula 8 - 1ª semana

Zeros de Polinômios

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

Avaliação do polinômio pela Regra de Horner

$$p(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 4$$

$p(2) = ?$

$$p(2) = 3 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 4$$

$$\begin{cases} n \text{ adições} \\ \frac{n(n+1)}{2} \text{ multiplicações} \end{cases} \qquad (n=5)$$

$$p(2) = -4 + 2(3 + 2(-1 + 2(-2 + 2(4 + 3 \cdot 2))))$$

$$\begin{cases} n \text{ adições} \\ n \text{ multiplicações} \end{cases}$$

Teorema do Resto

Se $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, então para qualquer α existe um único polinômio $q(x)$ de grau $n-1$ que

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x) + p(\alpha)$$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & (x-\alpha) \\ \hline p(\alpha) & q(x) \end{array}$$

Aula 8-2

	3	4	-2	-1	3	-4
2	+	6	20	36	70	146
	3	10	18	35	73	142

$142 \to p(2)$

$$q(x) = 3x^4 + 10x^3 + 18x^2 + 35x + 73$$

$$\begin{array}{l|l} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n & x-\alpha \\ \hline 0 + (a_1 - a_0\cdot\alpha)x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots & a_0x^{n-1} + (a_1 - a_0\alpha)\cdot x^{n-2} \end{array}$$

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
α		$b_0\cdot\alpha$	$b_1\cdot\alpha$	...	$b_{n-2}\cdot\alpha$	$b_{n-1}\cdot\alpha$
	$\underbrace{a_0}_{b_0}$	$\underbrace{a_1+b_0\cdot\alpha}_{b_1}$	$\underbrace{a_2+b_1\cdot\alpha}_{b_2}$	...	$\underbrace{a_{n-1}+b_{n-2}\alpha}_{b_{n-1}}$	$\underbrace{a_n+b_{n-1}\cdot\alpha}_{p(\alpha)}$

Corolário

Se $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$ e $p(\alpha) = 0$, então existe um único polinômio de grau $n-1$, $q(x)$ que

$$p(x) = (x-\alpha)\cdot q(x)$$

$q(x) \to$ polinômio reduzido

Definição

Se $\bar{x}$ é um zero de $f(x)$, então a multiplicidade m de $\bar{x}$ é o ínfimo de todos os números k, tais que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{|f(x)|}{|x-\bar{x}|^k} < \infty$$

, isto é $f(x)$ tende mais rápido a zero do que $|x-\bar{x}|^k$

Aula 8-3

Teorema

Se $\bar{x}$ é zero de f e para algum inteiro m, $f(x)$ é (m vezes) continuamente diferenciável,
então a multiplicidade $\bar{x}$ é no mínimo m se e só se

$$f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \cdots = f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0$$

e exatamente m se, além disso

$$f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$$

$f(x) = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2$

$x = 2$

$= 4 - 8 + 4 = 0$

$= 4 - 4 = 0$

$= 2$

↳ multiplicidade é 2

$f(x) = e^x - 1$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$x = 0$

$= 1 - 1 = 0$

$= 1$ ⤳ multiplicidade é 1

$= 1$

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$

$\cdots$

$x = 0$

$= 0$

$= \emptyset$ → não existe derivada em $\bar{x} = 0$

$= \emptyset$ ↗ multiplicidade não é inteira

$\cdots$

Teorema

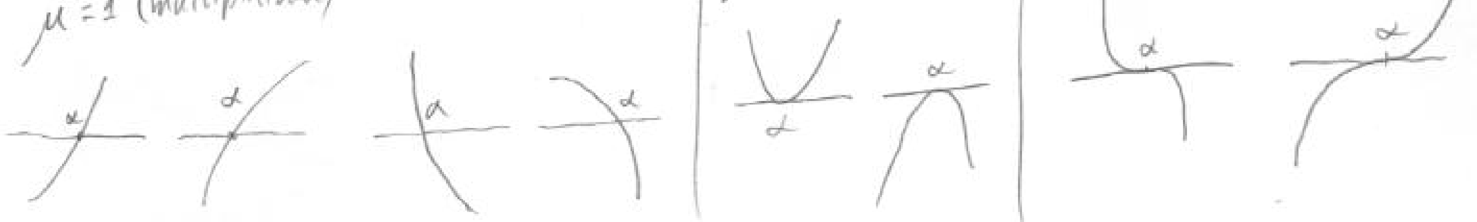
Seja $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$

existem números complexos distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$
e inteiros $m_1 \ldots m_s$ tal que para uma constante c

$$p(x) = c\,(x-\alpha_1)^{m_1} (x-\alpha_2)^{m_2} \cdots (x-\alpha_s)^{m_s} \quad , \quad \sum_{j=1}^{s} m_j = n$$

Teorema de Taylor

$\mu = 1$ (multiplicidade) | $\mu = 2, 4, 6, \ldots$ | $\mu = 3, 5, 7, 9, \ldots$



Aula 8-4

Enumeração das Raízes

Se $p(x)$ é de grau n, temos que a soma das multiplicidades é n

Problema: determinar as raízes e suas multiplicidades não é fácil

Regra de Descartes

O número de raízes positivas de uma equação $p(x)=0$ de coeficientes reais nunca é maior que o número de trocas de sinal T na seqüência de seus coeficientes não nulos.

Se é menor, então é sempre por um número par

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$$

$+ \quad + \quad - \quad -$ → 1 troca de sinal

$T=1 \Rightarrow 1$ raiz é positiva

$$p(-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

$- \quad + \quad + \quad -$ → 2 trocas de sinal

$T=2 \Rightarrow p(x)$ pode ter 2 não-positivas

* Se uma raiz de um polinômio de coeficientes reais for complexa, então sua conjugada também é raiz

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \rightarrow T=4 \rightarrow$ 4 positivas ou 2 positivas + 2 complexas ou 4 complexas

Aula 8-5

Regra de Huat

$p(x)=0$, grau n, coef. reais

Se para algum K, $1 \leq K < n$, tivermos

$a_K^2 \leq a_{K+1} \cdot a_{K-1}$, então $p(x)$ terá raízes complexas

Regra da Lacuna

a) Se para algum K, $1 \leq K < n$, tivermos

$a_K = 0$ e $a_{K-1} \cdot a_{K+1} > 0$, então $p(x)=0$ terá raízes complexas

b) Se existirem 2 ou mais coeficientes nulos sucessivos, então $p(x)=0$ terá raízes complexas.

$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \rightarrow T = 2 \rightarrow$ duas ou zero raízes reais positivas

$p(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3 \rightarrow T = 3 \rightarrow$ três ou um raiz real negativa

Reais Positivas	Reais Negativas	Complexas	Total
2	3	0	5
2	1	2	5
0	3	2	5
0	1	4	5

Huat:

2	3	1	2	-5	3
	9	1	4	25	
		<			
	2	6	-5	6	

$a_2^2 < a_1 \cdot a_3 \rightarrow$ pelo menos 2 raízes complexas

Aula 8-6

Exemplo

$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$

$+ \quad - \quad - \quad + \quad - \quad + \rightarrow T=4 \rightarrow 4, 2, 0$ raízes positivas

$p(-x) = + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \rightarrow T=0 \rightarrow 0$ raízes negativas

Como $a_2 = 0$ e $a_1 \cdot a_3 > 0$ (mesmo sinal)

$\rightarrow$ tem pelo menos 2 raízes complexas

Localização das Raízes

Determinar intervalo que contenha todas as raízes reais de $p(x)$, ou o raio interno e externo do anel que contém as raízes complexas de $p(x)$.

Teorema de Laguerre

$p(x)$, coef. reais $\quad \alpha$, um número

$p(x) = q(x)(x-\alpha) + R$

Se os coeficientes de $q(x)$ e R forem todos positivos ou nulos, então teremos que todas raízes reais positivas x_i verificam $x_i < \alpha$

Cota de Laguerre-Thibault

Faça a deflação de $p(x)$ por $(x-1), (x-2), \ldots$ até $(x-m)$ onde $q(x)$ tenha todos coeficientes positivos ou nulos e $R(x) > 0$

Esse m é a cota superior para raízes reais de $p(x)$

Faça o mesmo para $p(-x)$ para encontrar a cota inferior.

Aula 8-7

Laguerre-Thibaut

$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 \rightarrow T=3 \rightarrow$ 3 positivas ou 1 positiva

	1	1	-9	-1	20	-12
1		1	2	-7	-8	12
	1	2	-7	-8	12	0

→ negativos ↳ $p(1)=0$, 1 é raiz

	1	1	-9	-1	20	-12
2		2	6	-6	-14	12
	1	3	-3	-7	6	0

→ $p(2)=0$, 2 é raiz

→ negativos

	1	1	-9	-1	20	-12
3		3	12	9	24	132
	1	4	3	8	44	120

→ tudo positivo, 3 é cota superior

$p(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12 \rightarrow T=2 \rightarrow$ 2 negativas ou 0 negativas

	-1	1	9	-1	-20	-12
1		-1	0	9	8	-12
	-1	0	9	8	-12	-24

...

	+1	-1	-9	+1	+20	+12
+4		+4	+12	+12	+52	+288
	+1	+3	+3	+13	+72	+300

→ tudo ~~negativo~~ positivo, -4 é cota inferior

Aula 8-8

Cota de Vene

Valor absoluto do menor dos coeficientes negativos

$$0 < \alpha < 1 + \frac{M}{a_0 + a_1 + \cdots + a_p}$$

cada raiz positiva de p(x)

último coeficiente positivo antes do primeiro negativo

$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$

$M = |-12|$

$a_p = a_1 = 1$

$a_0 = 1$

cota de vene: $1 + \frac{12}{1+1} = 7$

$-p(-x) = x^5 - x^4 - 9x + x^2 + 20x + 12$

$M = |-9|$

$a_p = a_0 = 1$

cota de vene: $1 + \frac{9}{1} = 10$

cota inferior: -10

Cota de Kojima

$|\alpha| \leq q_1 + q_2$

raiz complexa ou real

onde q_1 e q_2 são os valores maiores de

$$\left|\frac{a_i}{a_0}\right|^{1/i}$$

→ cota inferior aplicar sobre $p\left(\frac{1}{x}\right)$

$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$

$\{1^1, 9^{1/2}, 1^{1/3}, 20^{1/4}, 12^{1/5}\} = \{1, 3, 1, 2.11474, 1.64375\}$

$q_1 = 3, q_2 = 2.11474$

$|\alpha| < 5.11474$

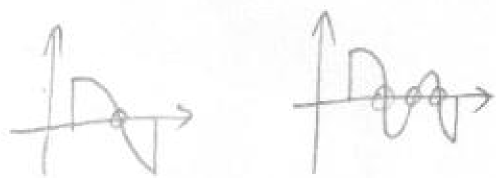
Aula 8-9

Separação das Raízes

Encontrar uma seqüência de subintervalos distintos tais que cada subintervalo contenha exatamente uma raiz real e cada raiz real esteja contida num subintervalo

Teorema de Bolzano

Se f for contínua em $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$, então existe pelo menos uma raiz real em $[a,b]$



Teorema de Budan

Seqüência: $p(a)\quad p'(a)\quad p''(a)\quad p'''(a)\quad \ldots\quad p^{(n+1)}(a)$

V_a = número de variação de sinais na seqüência

O número de raízes de $p(x)$ no intervalo (a,b) é igual ou menor que $|V_a - V_b|$ por um múltiplo de 2

Exemplo

$p(x) = x^3-2x^2-x+2 \qquad p(0)=2 \qquad p(3)=8$

$p'(x) = 3x^2-4x-1 \qquad p'(0)=-1 \qquad p'(3)=10$

$p''(x) = 6x-4 \qquad p''(0)=-4 \qquad p''(3)=14$

$p'''(x) = 6 \qquad p'''(0)=6 \qquad p'''(3)=6$

$(a,b)=(0,3) \qquad V_0=2 \qquad V_3=0$

2 raízes reais em $[0,3]$
ou
0 raízes reais em $[0,3]$

Aula 9 - 1

Zeros de Funções

Determinar uma aproximação para x, representável na precisão da máquina, para a equação $f(x)=0$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Fase 1: Localizar ou isolar as raízes

Fase 2: Refinar a cada iteração a aproximação à raiz (método iterativo)

Teorema de Bolzano

$f(x)$ contínua em $[a,b]$

Se $f(a)\cdot f(b)<0$ então existe pelo menos um ponto $x=\xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$

→ Análise gráfica

Construir uma tabela de valores de x e $f(x)$ e procurar trocas de sinais nos intervalos em que $f(x)$ é contínua

Exemplo

$f(x)=\sqrt{x}-5\cdot e^{-x}$

$f(1)=\sqrt{1}-5\cdot e^{-1}\cong -0{,}839$

$f(2)=\sqrt{2}-5\cdot e^{-2}\cong 0{,}736$

$f(x)$ é contínua em $[1,2]$ → $f(x)$ tem pelo menos 1 zero em $[1,2]$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+5e^{-x}>0, \forall x>0$ → $f(x)$ sempre crescente em $[1,2]$

→ apenas 1 zero em $(1,2)$