CC-222 Visão Computacional – 1ª prova – RESPOSTAS
Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Questão 1 – Geometria Projetiva (1.5)
Considere o enunciado do seguinte teorema de Pappus (no plano projetivo):
Sejam A1, A2 e A3 pontos distintos da reta **r** e sejam B1, B2 e B3 pontos distintos da reta **s**. As retas **r** e **s** se encontram no ponto O. Sejam:
C1, a intersecção da reta A2B3 com a reta A3B2,
C2, a intersecção da reta A1B3 com a reta A3B1 e
C3, a intersecção da reta A1B2 com a reta A2B1.
Então, C1, C2 e C3 são colineares.

a) Escreva a colinearidade garantida no teorema como uma igualdade baseada nos produtos vetoriais e produtos escalares dos vetores de coordenadas homogêneas dos pontos A1, A2, A3, B1, B2 e B3 no plano.
b) Sejam as coordenadas homogêneas dos pontos dadas a seguir.

$$A1=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix},\quad A2=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix},\quad A3=\begin{bmatrix}13\\-8\\1\end{bmatrix},\quad B1=\begin{bmatrix}4\\11\\1\end{bmatrix},\quad B2=\begin{bmatrix}3\\9\\1\end{bmatrix},\quad B3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Verifique se A1, A2 e A3 são colineares e se for o caso, encontre os coeficientes da reta **r**. Verifique se B1, B2 e B3 são colineares e se for o caso, encontre os coeficientes da reta **s**.
c) Obter as coordenadas dos pontos C1, C2 e C3 para os pontos dados no item (b) e verificar a colinearidade.

a) [(A1 x B2) x (A2 x B1)] . [(A1 x B3) x (A3 x B1)] x [(A1 x B3) x (A3 x B2)]=0

```
> a1:=<a1x,a1y,a1z>; a2:=<a2x,a2y,a2z>; a3:=<a3x,a3y,a3z>;
```

$$a1 := \begin{bmatrix}a1x\\a1y\\a1z\end{bmatrix}$$

$$a2 := \begin{bmatrix}a2x\\a2y\\a2z\end{bmatrix}$$

$$a3 := \begin{bmatrix}a3x\\a3y\\a3z\end{bmatrix}$$

```
> b1:=<b1x,b1y,b1z>; b2:=<b2x,b2y,b2z>; b3:=<b3x,b3y,b3z>;
```

$$b1 := \begin{bmatrix}b1x\\b1y\\b1z\end{bmatrix}$$

$$b2 := \begin{bmatrix}b2x\\b2y\\b2z\end{bmatrix}$$

$$b3 := \begin{bmatrix} b3x \\ b3y \\ b3z \end{bmatrix}$$

```
>
DotProduct(CrossProduct(CrossProduct(a1,b2),CrossProduct(a2
,b2)),  CrossProduct(
CrossProduct(CrossProduct(a1,b3),CrossProduct(a3,b1)),
CrossProduct(CrossProduct(a1,b3),CrossProduct(a3,b1))  ) );
```

$$0$$

Item b

```
> a1:=<-2,1,1>; a2:=<3,-2,1>; a3:=<13,-8,1>;
```

$$a1 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a2 := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a3 := \begin{bmatrix} 13 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(<a1|a2|a3>);
```

$$0$$

```
> r:=CrossProduct(a1,a2);
```

$$r := \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> b1:=<4,11,1>; b2:=<3,9,1>; b3:=<-1,1,1>;
```

$$b1 := \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b3 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(<b1|b2|b3>);
```

$$0$$

```
> s:=CrossProduct(b1,b2);
```

$$s := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Item c

```
>
c1:=CrossProduct(CrossProduct(a2,b3),CrossProduct(a3,b2));
```

$$c1 := \begin{bmatrix} -554 \\ 406 \\ -38 \end{bmatrix}$$

```
>
c2:=CrossProduct(CrossProduct(a1,b3),CrossProduct(a3,b1));
```

$$c2 := \begin{bmatrix} 166 \\ 19 \\ 19 \end{bmatrix}$$

```
> c3:=CrossProduct(CrossProduct(a1,b2),
CrossProduct(a2,b1));
```

$$c3 := \begin{bmatrix} 226 \\ 601 \\ 57 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(<c1|c2|c3>);
```

$$0$$

```
>
```

Questão 2 – Rotação de Imagens (1.5)

Uma forma de implementar a rotação de imagens é através da decomposição da rotação no produto de três matrizes de transformações lineares $R = A \cdot B \cdot C$, onde A é uma matriz de escala possivelmente não-uniforme, B é uma matriz de cisalhamento que preserva a coordenada y e C é uma matriz de cisalhamento que preserva a coordenada x.

a) Obter as matrizes A, B e C para uma rotação por um ângulo de valor α no sentido anti-horário.

b) Verificar se R, dada abaixo é uma matriz de rotação e, se for o caso, encontre A, B e C correspondentes a R.

$$R = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

c) Escreva o pseudo-código para realizar o cisalhamento correspondente à matriz B obtida sobre uma imagem de 320x200 pixels, utilizando interpolação linear. Determine o tamanho do retângulo que contém a imagem a ser gerada. Não se preocupe com os pontos da borda da imagem e com os pontos fora da imagem.

```
> A:=<<a,0>|<0,d>>; B:=<<1|b>,<0|1>>; C:=<<1|0>,<c|1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(MatrixMatrixMultiply(A,B),C);
```

$$\begin{bmatrix} a + a\,b\,c & a\,b \\ d\,c & d \end{bmatrix}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(MatrixMatrixMultiply(A,B),C)=
<<cos(alpha)|-sin(alpha)>,<sin(alpha)|cos(alpha)>>;
```

$$\begin{bmatrix} a + a\,b\,c & a\,b \\ d\,c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

```
> k:=simplify(solve( {a+a*b*c=cos(alpha), a*b=-sin(alpha),
d*c=sin(alpha),d=cos(alpha)},{a,b,c,d}));
```

$$k := \{ c = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, b = -\sin(\alpha)\cos(\alpha), a = \frac{1}{\cos(\alpha)}, d = \cos(\alpha) \}$$

```
> subs(k,[A, B, C]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} \frac{1}{\cos(\alpha)} & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & 1 \end{bmatrix} \right]$$

```
>
>
```

Item b

```
> R:=<<0.6|0.8>,<-0.8|0.6>>;
```

$$R := \begin{bmatrix} .6 & .8 \\ -.8 & .6 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(R,Transpose(R));
```

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 1. \end{bmatrix}$$

```
> alpha:=arcsin(-0.8);
```

$$\alpha := -.9272952180$$

```
> subs(k,[A, B, C]);
```

$$\left[\begin{bmatrix} 1.666666667 & 0 \\ 0 & .6000000000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & .4800000000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.333333333 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

```
>
subs(k,MatrixMatrixMultiply(MatrixMatrixMultiply(A,B),C));
```

$$\begin{bmatrix} .600000000 & .8000000002 \\ -.7999999998 & .6000000000 \end{bmatrix}$$

```
>
>
```

Item c

A matriz B preserva a coordenada y, então a altura ainda será 200.
A largura deverá ser a largura original de 320 mais 0.48 vezes a altura de 200, então 320+96=416 pixels.

For i=1 até 416
    For j=1 até 200
        X:= i-0.48*j;
        $E_{nova}(i,j) = E_{antiga}(\lfloor X \rfloor, j)(1 - X + \lfloor X \rfloor) + E(\lfloor X \rfloor + 1, j)(X - \lfloor X \rfloor)$
    Fim
Fim

```
> B:=Matrix(2, 2, [[1,0.48],[0,1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & .48 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(B,<<320,200>|<320,0>|<0,200>>);
```

$$\begin{bmatrix} 416. & 320. & 96. \\ 200. & 0. & 200. \end{bmatrix}$$

```
> MatrixVectorMultiply(Matrix(inverse(B)),<i,j>);
```

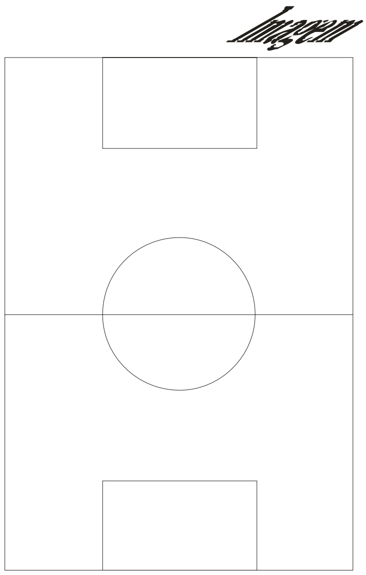
$$\begin{bmatrix} 1.000000000\,i - .4800000000\,j \\ 1.000000000\,j \end{bmatrix}$$

```
>
```

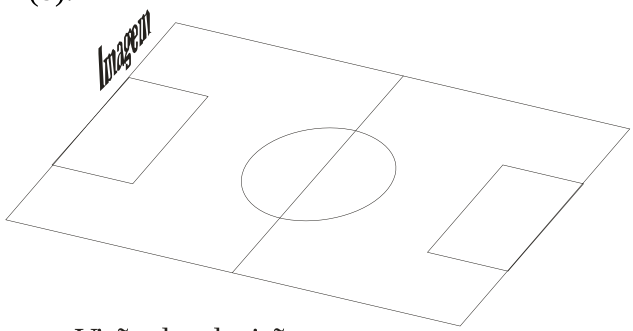
Questão 3 – Projeções (1.5)

Nos campos de futebol, encontramos propagandas na forma de um tapete sobre o gramado com uma imagem distorcida, mas que, quando televisionadas causam a impressão de que é uma figura ou estrutura de pé ao lado das traves.

a) Considere um retângulo no plano das traves com vértices de coordenadas cartesianas (0, 2, 5), (0, 2, 15), (0, 0, 5) e (0, 0, 15) e uma câmera de orifício com centro de projeção em (500, 20, 500). O plano do chão é dado por y=0. Quais as coordenadas sobre o chão que os vértices do quadrilátero devem ter para gerar a mesma imagem que o retângulo?
b) Considere agora o centro de projeção no infinito na direção do vetor (25, 1, 25). Quais as coordenadas do quadrilátero sobre o chão nessa nova condição?
c) Se sobre o retângulo imaginário no plano das traves quiséssemos produzir uma imagem, qual matriz de transformação 3x3 transformaria as coordenadas homogêneas dos pixels da imagem não distorcida (sistema de coordenadas sobre o retângulo) em coordenadas de pixels da imagem verdadeira impressa sobre o chão? Utilize o resultado do item (b).



Visão de cima do campo



Visão da televisão

Imagem no sistema de coordenadas do retângulo

a)

(0,0,5) e (0,0,15) já são respostas (estão sobre o plano y=0)

Equação da reta do centro de projeção aos pontos

$$\begin{cases} x = 500(1-t) + 0t & \Rightarrow x = 500 - 5000/9 = -55.555... \\ y = 20(1-t) + 2t = 0 \Rightarrow t = 10/9 & \\ z = 500(1-t) + 5t & \Rightarrow z = 500 - 4950/9 = -50 \end{cases}$$

$$\text{para o outro vértice}: z = 500(1-t) + 15t \Rightarrow z = 500 - 4850/9 = -38.888...$$

Resposta: (0,0,5) (0,0,15) (-55.556, 0, -50) e (-55.556, 0, -38.888)

b)
(0, 0, 5) e (0, 0, 15) já são respostas.
(0,2,5)+(25,1,25)t representa um ponto sobre a reta. Encontrar o ponto sobre o plano y=0.

$$\begin{cases} x = 0 + 25t & \Rightarrow x = -50 \\ y = 2 + t = 0 \Rightarrow t = -2 & \\ z = 5 + 25t & \Rightarrow z = -45 \end{cases}$$

para o outro vértice: $z = 15 + 25t \Rightarrow z = 15 - 50 = -35$

Resposta: (0,0,5) (0,0,15) (-50, 0, -45) (-50, 0, -35)

c)

Mapear o retângulo de vértices (5,0) (15,0) (5,2) (15,2) nos seguintes pontos respectivamente: (5,0) (15,0) (-45,-50) (-35, -50)

Transformação afim

$x' = ax + by + c$

$y' = dx + ey + f$

Substituindo

$5 = 5a + c$

$0 = 5d + f$

$15 = 15a + c$

$0 = 15d + f$

$-45 = 5a + 2b + c$

$-50 = 5d + 2e + f$

Subtraindo a primeira da terceira, a=1 e c=0
Subtraindo a segunda da quarta, d=0 e f=0
Substituindo na quinta, b=-25
Substituindo na sexta, e=-25

A matriz procurada é então $\begin{bmatrix} 1 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Conferindo...

```
> M:=<<1,0,0>|<-25,-25,0>|<0,0,1>>;
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:=<<5,0,1>|<15,0,1>|<5,2,1>|<15,2,1>>;
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & 15 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixMatrixMultiply(M,B);
```

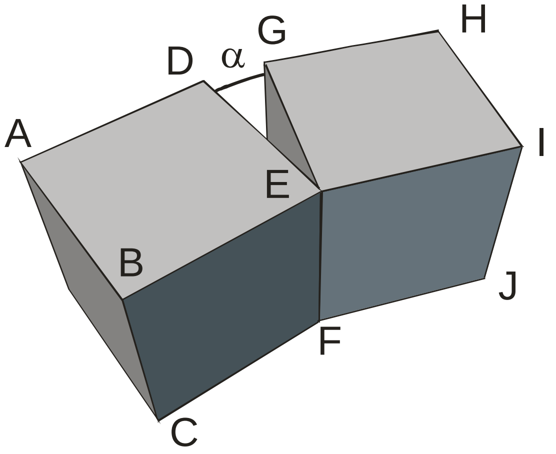
$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & -45 & -35 \\ 0 & 0 & -50 & -50 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 4 – Calibração de câmeras (1.5)
Considere uma peça articulada formada por dois cubos de igual dimensão conectados por uma aresta comum que forma um eixo, como visto na figura. O ângulo α corresponde ao ângulo entre as duas faces de contato dos cubos. Uma imagem dessa peça foi obtida por uma câmera de orifício e as coordenadas de imagem dos vértices rotulados na figura foram extraídas manualmente.

a) Desenvolva um método para estimar o ângulo α.
b) Aplique seu método para estimar α no caso abaixo.

$$A=\begin{bmatrix}103\\331\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}210\\476\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}247\\600\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}292\\246\end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix}415\\361\end{bmatrix},$$

$$F=\begin{bmatrix}413\\495\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}357\\228\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}535\\195\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}623\\314\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}585\\450\end{bmatrix}$$



Vamos definir as coordenadas 3D dos vértices dos cubos de forma a simplificar a obtenção do eixo z.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
X	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1	1
Y	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
Z	-1	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	0
x	103	210	247	292	415	413	357	535	623	585
y	331	476	600	246	361	495	228	195	314	450

Construir uma matriz de calibração para ABCDEF e outra para EFGHIJ

$$A=\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1Z_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 & -y_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2X_2 & -x_2Y_2 & -x_2Z_2 & -x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 & -y_2X_2 & -y_2Y_2 & -y_2Z_2 & -y_2 \\ & \vdots & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Construída a matriz no MATLAB para ABCDEF:

```
>> a=[-1 1    -1    1    0    0    0    0    103    -103    103    -103
-1    1    0    1    0    0    0    0    210    -210    0    -210
-1    0    0    1    0    0    0    0    247    0    0    -247
```

0	1	-1	1	0	0	0	0	0	-292	292	-292
0	1	0	1	0	0	0	0	0	-415	0	-415
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-413
0	0	0	0	-1	1	-1	1	331	-331	331	-331
0	0	0	0	-1	1	0	1	476	-476	0	-476
0	0	0	0	-1	0	0	1	600	0	0	-600
0	0	0	0	0	1	-1	1	0	-246	246	-246
0	0	0	0	0	1	0	1	0	-361	0	-361
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-495]

Decompor em valores singulares

>> [u,d,vt]=svd(a)

u = ...

d =

```
  1.0e+003 *
   1.6419         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
        0    0.6865         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
        0         0    0.5205         0         0         0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0    0.3935         0         0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0    0.0034         0         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0    0.0014         0         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0    0.0011         0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0    0.0008         0         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0         0    0.0004         0         0         0
        0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0003         0         0
        0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0002         0
        0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000
```

vt =

```
   0.0003   -0.0004   -0.0005   -0.0000   -0.3720   -0.6845    0.2028   -0.0600   -0.1847    0.4846    0.0964   -0.2648
  -0.0005   -0.0011    0.0001    0.0001    0.4477   -0.1606   -0.2769    0.6285   -0.2753    0.1742    0.4313    0.0999
   0.0002    0.0006   -0.0003    0.0013   -0.2494    0.1935    0.6387    0.4292    0.3396   -0.1343    0.4078   -0.0918
  -0.0008   -0.0006   -0.0008   -0.0004    0.5773    0.1930    0.3621   -0.3039   -0.2182    0.1062    0.1003   -0.5806
   0.0008   -0.0009   -0.0014    0.0002    0.1547    0.2339   -0.0645    0.0483    0.5510    0.7624   -0.1580    0.0711
  -0.0008   -0.0010    0.0011    0.0001   -0.2918    0.4314   -0.0737   -0.3703   -0.3408    0.2807    0.5607    0.2774
   0.0003    0.0007   -0.0008    0.0019    0.1560   -0.3261   -0.2854   -0.3724    0.5542   -0.2129    0.5370   -0.0909
  -0.0012    0.0001   -0.0001   -0.0007   -0.3638    0.2894   -0.5020    0.2159    0.0161   -0.0127    0.0249   -0.6958
  -0.4328    0.6582    0.6148    0.0372    0.0009   -0.0004    0.0002   -0.0000    0.0007    0.0017   -0.0002   -0.0001
   0.4574    0.6604   -0.3562   -0.4772    0.0002    0.0006   -0.0004    0.0001   -0.0009    0.0005    0.0013    0.0002
  -0.1548   -0.3490    0.3173   -0.8681    0.0001   -0.0009    0.0007   -0.0002    0.0024   -0.0006    0.0011    0.0002
   0.7612   -0.0935    0.6281    0.1314    0.0004    0.0004   -0.0003    0.0000   -0.0001    0.0002    0.0001   -0.0014
```

Verificar que a última coluna representa o espaço nulo (ou quase)

>> a*vt(:,12)

```
ans =

  1.0e-003 *

  -0.0880
   0.2538
  -0.1656
   0.0880
  -0.2538
   0.1651
  -0.1961
   0.4519
  -0.2559
   0.1961
  -0.4518
   0.2551
```

Normalizar dividindo pelo ultimo (m34=1)

>> vt(:,12)/vt(12,12)

ans =

```
  188.3199
  -71.0204
   65.3135
  412.8826
  -50.5737
 -197.2753
   64.6471
  494.8186
    0.0913
   -0.1767
   -0.1240
    1.0000
```

A matriz de projeção é dada por

```
>> p=[  188.3199  -71.0204   65.3135  412.8826
  -50.5737 -197.2753   64.6471  494.8186
    0.0913   -0.1767   -0.1240    1.0000
]

p =

  188.3199  -71.0204   65.3135  412.8826
  -50.5737 -197.2753   64.6471  494.8186
    0.0913   -0.1767   -0.1240    1.0000
```

Verificar se projeta o ponto A corretamente

```
>> p*[-1;1;-1;1]

ans =

   88.2288
  283.4699
    0.8560

>> vc=p*[-1;1;-1;1];
>> vc=vc/vc(3)

vc =

  103.0710
  331.1564
    1.0000

>>
```

OK!!

Fazer novamente para os pontos EFGHIJ

```
>> b=[0	1	0	1	0	0	0	0	0	-415	0	-415
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-413
0	1	-1	1	0	0	0	0	0	-357	357	-357
1	1	-1	1	0	0	0	0	-535	-535	535	-535
1	1	0	1	0	0	0	0	-623	-623	0	-623
1	0	0	1	0	0	0	0	-585	0	0	-585
0	0	0	0	0	1	0	1	0	-361	0	-361
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-495
0	0	0	0	0	1	-1	1	0	-228	228	-228
0	0	0	0	1	1	-1	1	-195	-195	195	-195
0	0	0	0	1	1	0	1	-314	-314	0	-314
0	0	0	0	1	0	0	1	-450	0	0	-450
]
```

```
b =

     0     1     0     1     0     0     0     0     0  -415     0  -415
     0     0     0     1     0     0     0     0     0     0     0  -413
     0     1    -1     1     0     0     0     0     0  -357   357  -357
     1     1    -1     1     0     0     0     0  -535  -535   535  -535
     1     1     0     1     0     0     0     0  -623  -623     0  -623
     1     0     0     1     0     0     0     0  -585     0     0  -585
     0     0     0     0     0     1     0     1     0  -361     0  -361
     0     0     0     0     0     0     0     1     0     0     0  -495
     0     0     0     0     0     1    -1     1     0  -228   228  -228
     0     0     0     0     1     1    -1     1  -195  -195   195  -195
     0     0     0     0     1     1     0     1  -314  -314     0  -314
     0     0     0     0     1     0     0     1  -450     0     0  -450

>> [u,d,vt]=svd(b) % decomposição SVD de b

u =

   -0.2381   -0.2460    0.3792    0.2811    0.2225    0.1325    0.3631   -0.2284   -0.0887   -0.0860   -0.6144    0.1273
   -0.1408    0.0935    0.4417   -0.2366    0.1641   -0.1072    0.3813    0.3183   -0.4813    0.2889    0.3379   -0.0770
   -0.2399   -0.4400    0.0793   -0.3063    0.2185    0.3266    0.1491    0.1445    0.6163    0.0009    0.2624   -0.0503
   -0.4867   -0.2625   -0.4668   -0.3348    0.2088    0.0338   -0.2865    0.0752   -0.4411   -0.0300   -0.1837    0.0503
   -0.5055    0.0929   -0.1128    0.5665    0.2233   -0.1499   -0.0280   -0.3149    0.0418    0.0640    0.4560   -0.1272
   -0.3385    0.5665   -0.0148   -0.1994    0.1730   -0.4087    0.0969    0.2545    0.3685   -0.1991   -0.2683    0.0769
   -0.2071   -0.2140    0.3298    0.2445   -0.2750   -0.1462   -0.4149    0.3850    0.0488    0.0450    0.0652    0.5628
   -0.1687    0.1121    0.5294   -0.2836   -0.1009    0.0889   -0.4352   -0.3365   -0.0783   -0.4245    0.0782   -0.2917
   -0.1532   -0.2810    0.0507   -0.1956   -0.3898   -0.5198    0.0166   -0.2660    0.1610    0.4821   -0.1778   -0.2712
   -0.1774   -0.0957   -0.1702   -0.1220   -0.5172   -0.0829    0.4937   -0.1600   -0.1064   -0.4832    0.2314    0.2712
   -0.2548    0.0468   -0.0569    0.2855   -0.4209    0.2903    0.0526    0.4841   -0.0219   -0.0650   -0.1676   -0.5628
   -0.2604    0.4358   -0.0114   -0.1534   -0.2645    0.5319    0.0027   -0.2527    0.0488    0.4607   -0.0474    0.2915


d =

  1.0e+003 *

    2.0560         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0    0.7710         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0    0.5929         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.4821         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0    0.0034         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0    0.0013         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.0011         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0    0.0008         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0003         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0002         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0001         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0    0.0000


vt =

   -0.0006    0.0005   -0.0010    0.0001    0.1785   -0.4026   -0.1964    0.0188   -0.1188   -0.8201    0.0294   -0.2823
   -0.0007   -0.0011   -0.0002    0.0004    0.2576    0.2632    0.1785   -0.4111    0.4957   -0.2536   -0.5855    0.1035
    0.0004    0.0009    0.0007    0.0013   -0.1261   -0.2765    0.1241   -0.2792   -0.6769    0.1443   -0.5789    0.0149
   -0.0009   -0.0003    0.0005   -0.0005    0.3571   -0.1326    0.6103    0.3166    0.0601    0.1922   -0.0736   -0.5799
   -0.0003    0.0005   -0.0004    0.0000   -0.3548    0.5672    0.4957    0.0907   -0.3069   -0.4345    0.1203    0.0319
   -0.0004   -0.0007    0.0003    0.0004   -0.4729   -0.3518    0.1336    0.5629    0.3151   -0.1045   -0.3590    0.2807
    0.0002    0.0005    0.0002    0.0007    0.2676    0.4623   -0.4607    0.5412   -0.2109    0.0051   -0.3935   -0.1005
   -0.0006    0.0000    0.0011   -0.0005   -0.5807    0.1244   -0.2568   -0.1857    0.2010    0.0751   -0.1327   -0.6951
    0.4888   -0.5720    0.6491   -0.1118    0.0004   -0.0000    0.0001    0.0001   -0.0007   -0.0013    0.0003   -0.0001
    0.4786    0.6317    0.0924   -0.6028    0.0001   -0.0001    0.0005    0.0000    0.0009   -0.0004   -0.0011    0.0003
   -0.2021   -0.4932   -0.4100   -0.7402   -0.0003   -0.0000   -0.0005    0.0000   -0.0016    0.0005   -0.0011    0.0002
    0.7008   -0.1746   -0.6341    0.2762   -0.0005    0.0000    0.0005    0.0002    0.0004    0.0003   -0.0003   -0.0014

>> b*vt(:,12) %verificar espaço nulo

ans =

  1.0e-004 *

    0.1884
   -0.1140
   -0.0744
```

```
    0.0744
   -0.1884
    0.1139
    0.8331
   -0.4318
   -0.4015
    0.4015
   -0.8331
    0.4316

>> vt(:,12)/vt(12,12) % obter os elementos da matriz de projeção

ans =

  201.0217
  -73.6978
  -10.6276
  413.0081
  -22.7246
 -199.9193
   71.5964
  495.0308
    0.0496
   -0.1824
   -0.1626
    1.0000

>> q=[  201.0217  -73.6978  -10.6276  413.0081
  -22.7246 -199.9193   71.5964  495.0308
    0.0496   -0.1824   -0.1626    1.0000
]

q =

  201.0217  -73.6978  -10.6276  413.0081
  -22.7246 -199.9193   71.5964  495.0308
    0.0496   -0.1824   -0.1626    1.0000
```

Testar se projeta o ponto H corretamente

```
>> vh=q*[1;1;-1;1] %ponto H

vh =

  550.9596
  200.7905
    1.0298

>> vh=vh/vh(3)

vh =

  535.0161
  194.9801
    1.0000
```

Obtemos as matrizes de rotação.

```
>> p

p =

  188.3199  -71.0204   65.3135  412.8826
  -50.5737 -197.2753   64.6471  494.8186
    0.0913   -0.1767   -0.1240    1.0000

>> q1=p(1,1:3)'; q2=p(2,1:3)'; q3=p(3,1:3)';
>> gama=sqrt(q3'*q3)

gama =
```

```
    0.2344

>> q1=q1/gama;q2=q2/gama;q3=q3/gama;
>> ox=q1'*q3

ox =

  393.9966

>> oy=q2'*q3

oy =

  404.5708

>> fx=sqrt(q1'*q1-ox^2)

fx =

  812.2877

>> fy=sqrt(q2'*q2-oy^2)

fy =

  816.9410

>> r

r =

  1.0e+005 *

    0.3901   -0.0377   -0.0562    0.5274
   -0.0979    0.4467   -0.1337   -1.2699
    0.1166   -0.1774    0.0393    0.5898
    0.7175   -1.2935    0.3104    4.1548

>> r=zeros(3,3);
>> r(3,:)=q3';
>> pg=p/gama;
>> r(1,1)=(ox*pg(3,1)-pg(1,1))/fx; r(1,2)=(ox*pg(3,2)-pg(1,2))/fx;
r(1,3)=(ox*pg(3,3)-pg(1,3))/fx;
>> r(2,1)=(oy*pg(3,1)-pg(2,1))/fy; r(2,2)=(oy*pg(3,2)-pg(2,2))/fy;
r(2,3)=(oy*pg(3,3)-pg(2,3))/fy;
>> r

r =
```

```
   -0.8002    0.0074   -0.5997
    0.4570    0.6569   -0.5996
    0.3895   -0.7539   -0.5291

>> r'*r

ans =

    1.0010    0.0007   -0.0003
    0.0007    1.0000    0.0005
   -0.0003    0.0005    0.9991
```

Agora para q:

```
>> old_p=p;
>> p=q;
>> rp=r;
>> p

p =

  201.0217  -73.6978  -10.6276  413.0081
  -22.7246 -199.9193   71.5964  495.0308
    0.0496   -0.1824   -0.1626    1.0000

>> q1=p(1,1:3)'; q2=p(2,1:3)'; q3=p(3,1:3)';
>> gama=sqrt(q3'*q3)

gama =

    0.2493

>> q1=q1/gama;q2=q2/gama;q3=q3/gama;
>> ox=q1'*q3

ox =

  404.4030

>> oy=q2'*q3

oy =

  381.1657

>> fx=sqrt(q1'*q1-ox^2)

fx =
```

```
  758.7103

>> fy=sqrt(q2'*q2-oy^2)

fy =

  767.0494

>> r=zeros(3,3);
>> r(3,:)=q3';
>> r(1,1)=(ox*pg(3,1)-pg(1,1))/fx; r(1,2)=(ox*pg(3,2)-pg(1,2))/fx;
r(1,3)=(ox*pg(3,3)-pg(1,3))/fx;
>> pg=p/gama;
>> r(1,1)=(ox*pg(3,1)-pg(1,1))/fx; r(1,2)=(ox*pg(3,2)-pg(1,2))/fx;
r(1,3)=(ox*pg(3,3)-pg(1,3))/fx;
>> r(2,1)=(oy*pg(3,1)-pg(2,1))/fy; r(2,2)=(oy*pg(3,2)-pg(2,2))/fy;
r(2,3)=(oy*pg(3,3)-pg(2,3))/fy;
>> r

r =

   -0.9566   -0.0003   -0.2914
    0.2177    0.6818   -0.6984
    0.1989   -0.7315   -0.6521

>> r'*r

ans =

    1.0020    0.0032   -0.0030
    0.0032    1.0000    0.0010
   -0.0030    0.0010    0.9980

>> rq=r;
>> rp

rp =

   -0.8002    0.0074   -0.5997
    0.4570    0.6569   -0.5996
    0.3895   -0.7539   -0.5291

>> rq

rq =

   -0.9566   -0.0003   -0.2914
    0.2177    0.6818   -0.6984
    0.1989   -0.7315   -0.6521
```

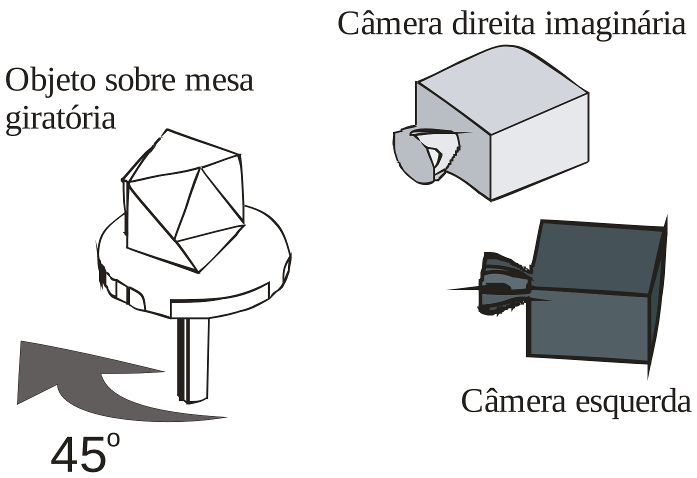
Finalmente, calculando os ângulos:

```
>> z1=rp*[0;0;1]

z1 =

   -0.5997
   -0.5996
   -0.5291

>> z2=rq*[0;0;1]

z2 =

   -0.2914
   -0.6984
   -0.6521

>> norm(z1,2)

ans =

    0.9995

>> norm(z2,2)

ans =

    0.9990

>> dot(z1,z2)

ans =

    0.9386

>> acos(dot(z1,z2))*180/pi

ans =

   20.1900

>>
```

Teórico: 20 graus.

Questão 5 – Visão estéreo (1.5)
Considere o seguinte cenário. Um objeto é colocado sobre o tampo de uma mesa giratória (centro do tampo está na origem e eixo de rotação é o eixo y). Uma câmera de orifício fixa ao chão é colocada com centro de projeção no ponto de coordenadas cartesianas (100, 0, 0) e o eixo óptico aponta para a origem do sistema de coordenadas global.
Os parâmetros intrínsecos relevantes da câmera são $f = 6, s_x = 3, s_y = 3, o_x = 0, o_y = 0$.
Foi tirada uma imagem do objeto, que chamamos imagem da câmera esquerda, e rotacionamos o objeto de 45º no sentido horário, obtendo outra imagem, chamada imagem da câmera direita. Encontre:

a) O tamanho da linha de base,
b) As coordenadas de imagem dos epipólos,
c) A matriz essencial,
d) A matriz fundamental,
e) A reconstrução 3D de um ponto com imagem esquerda de coordenadas (-0.2857, 0.5714) e imagem direita de coordenadas (0.3944, 0.5578).



a)
$$100\frac{\sqrt{2}}{2} = 70.71$$
Coordenadas do centro de projeção: (70.71, 0, 70.71) e (0,0,100)
Linha de base (70.71, 0, 70.71-100=-29.29)
Tamanho da linha de base: norma=raiz(70.71*70.71+29.29*29.29)=76.54

b) coordenadas de imagem dos epipólos: construir matriz dos parâmetros intrínsecos:
$$M_{int} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ para ambas as câmeras.
Epipólo está em y=0
Construir matriz dos extrínsecos: transformar um ponto do espaço no sistema de coordenadas de câmera.

1. Translação para trazer centro de projeção à origem
2. Rotação de 180 no eixo y

3. Projeção

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{ext} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Total

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 100 \\ & & & \end{bmatrix} = M_{\text{int}} M_{ext}$$

Aplicar ao ponto (70.71, 0, 70.71)
(-4.8283, 0)

Por simetria, (4.8283, 0) deve ser o epipólo da imagem direita.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -70.71 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -70.71 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{ext} = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0 & 0.7071 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0 & -0.7071 & 100 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Total

$$M = \begin{bmatrix} -1.4142 & 0 & 1.4142 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0 & -0.7071 & 100 \\ & & & \end{bmatrix} = M_{\text{int}} M_{ext}$$

Aplicar ao ponto (0, 0, 100)
Obtemos (4.8286, 0)

c) A matriz essencial

E=RS
R é a rotação de 45 graus e S corresponde à matriz produto escalar da translação

$$R=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}, S=\begin{bmatrix}0 & -29.29 & 0\\ 29.29 & 0 & -70.71\\ 0 & 70.71 & 0\end{bmatrix}$$

Assim,

$$E=\begin{bmatrix}0 & 29.2884 & 0\\ 29.29 & 0 & -70.71\\ 0 & 70.71 & 0\end{bmatrix}$$

d) A matriz fundamental

$$F=M_{\text{int}}{}^{-T}EM_{\text{int}}{}^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -70.71 & 0\\ 29.29 & 0 & -70.71\\ 0 & 29.29 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}0 & 7.322 & 0\\ 7.322 & 0 & -35.36\\ 0 & 35.36 & 0\end{bmatrix}$$

Até aqui no MATLAB:
To get started, select "MATLAB Help" from the Help menu.

```
>> p1= [ 1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0]

p1 =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0

>> r1=[-1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 -1 0; 0 0 0 1]

r1 =

    -1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0    -1     0
     0     0     0     1

>> t1=[1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 -100; 0 0 0 1]

t1 =
```

```
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1  -100
     0     0     0     1

>> mext1=p1*r1*t1

mext1 =

    -1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0    -1   100

>> mint=[2 0 0; 0 2 0; 0 0 1]

mint =

     2     0     0
     0     2     0
     0     0     1


>> m1=mint*mext1

m1 =

    -2     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0    -1   100


>> m1*[70.71 0 70.71 1]'

ans =

 -141.4200
         0
   29.2900

>> ep1=m1*[70.71 0 70.71 1]'

ep1 =

 -141.4200
         0
   29.2900

>> ep1/ep1(3)
```

```
ans =

   -4.8283
         0
    1.0000

>> r2=[0.7071 0 -0.7071; 0 1 0; 0.7071 0 0.7071]

r2 =

    0.7071         0   -0.7071
         0    1.0000         0
    0.7071         0    0.7071

>> t2=[1 0 0 -70.71; 0 1 0 0; 0 0 1 -70.71; 0 0 0 1]

t2 =

    1.0000         0         0  -70.7100
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.0000  -70.7100
         0         0         0    1.0000

>> r2=[0.7071 0 -0.7071 0; 0 1 0 0; 0.7071 0 0.7071 0; 0 0 0 1]

r2 =

    0.7071         0   -0.7071         0
         0    1.0000         0         0
    0.7071         0    0.7071         0
         0         0         0    1.0000

>> mext2=p1*r1*r2*t2

mext2 =

   -0.7071         0    0.7071         0
         0    1.0000         0         0
   -0.7071         0   -0.7071   99.9981

>> m2=mint*mext2

m2 =

   -1.4142         0    1.4142         0
         0    2.0000         0         0
   -0.7071         0   -0.7071   99.9981

>> m2*[0 0 100 1]'
```

```
ans =

  141.4200
         0
   29.2881

>> ep2 =m2*[0 0 100 1]'

ep2 =

  141.4200
         0
   29.2881

>> ep2/ep2(3)

ans =

    4.8286
         0
    1.0000

>> mext2kk=p1*r1*r2'*t2

mext2kk =

   -0.7071         0   -0.7071   99.9981
         0    1.0000         0         0
    0.7071         0   -0.7071         0

>> m2kk=mint*mext2kk

m2kk =

   -1.4142         0   -1.4142  199.9962
         0    2.0000         0         0
    0.7071         0   -0.7071         0

>> ep2kk =m2kk*[0 0 100 1]'

ep2kk =

   58.5762
         0
  -70.7100

>> ep2kk/ep2kk(3)

ans =
```

```
   -0.8284  -→ errou o sentido da rotação
         0
    1.0000
```

Verificar se m1 e m2 estão corretas

```
>> c=m1*[-7.071 0 7.071 1]'

c =

   14.1420
         0
   92.9290

>> c1=c/c(3)

c1 =

    0.1522
         0
    1.0000

>> c=m2*[0 0 10 1]'

c =

   14.1420
         0
   92.9271

>> c2=c/c(3)

c2 =

    0.1522
         0
    1.0000

>> ckk=m2kk*[0 0 10 1]'

ckk =

  185.8542
         0
   -7.0710

>> ckk/ckk(3)

ans =
```

```
  -26.2840
         0
    1.0000

>> r2

r2 =

    0.7071         0   -0.7071         0
         0    1.0000         0         0
    0.7071         0    0.7071         0
         0         0         0    1.0000

>> r=r2'

r =

    0.7071         0    0.7071         0
         0    1.0000         0         0
   -0.7071         0    0.7071         0
         0         0         0    1.0000

>> s=[0 -29.29 0; 29.29 0 -70.71; 0 70.71 0]

s =

         0  -29.2900         0
   29.2900         0  -70.7100
         0   70.7100         0


>> r=r(1:3,1:3)

r =

    0.7071         0    0.7071
         0    1.0000         0
   -0.7071         0    0.7071

>> E=r*s

E =

         0   29.2881         0
   29.2900         0  -70.7100
         0   70.7100         0

>> F=inv(mint)*E*inv(mint)

F =
```

```
         0    7.3220         0
    7.3225         0  -35.3550
         0   35.3550         0


>> [u,d,vt]=svd(F)

u =

         0    0.2028    0.9792
   -1.0000         0         0
         0    0.9792   -0.2028


d =

   36.1053         0         0
         0   36.1052         0
         0         0         0


vt =

   -0.2028         0    0.9792
         0    1.0000         0
    0.9792         0    0.2028

>> u/u(3,3)

ans =

         0   -1.0000   -4.8286
    4.9310         0         0
         0   -4.8286    1.0000

>> vt/vt(3,3)

ans =

   -1.0000         0    4.8283
         0    4.9307         0
    4.8283         0    1.0000

>> P=[10 20 30 1]'

P =

    10
    20
```

```
    30
     1

>> k1=m1*P

k1 =

   -20
    40
    70

>> k1/k1(3)

ans =

   -0.2857
    0.5714
    1.0000

>> k2=m2*P

k2 =

   28.2840
   40.0000
   71.7141

>> k2/k2(3)

ans =

    0.3944
    0.5578
    1.0000

>>
```

e) Reconstrução

$$\begin{bmatrix} wx \\ wy \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Construir sistema tendo X,Y,Z como incógnitas

$$\begin{bmatrix} m_{31}x - m_{11} & m_{32}x - m_{12} & m_{33}x - m_{13} \\ m_{31}y - m_{21} & m_{32}y - m_{22} & m_{33}y - m_{23} \\ m'_{31}x' - m'_{11} & m'_{32}x' - m'_{12} & m'_{33}x' - m'_{13} \\ m'_{31}y' - m'_{21} & m'_{32}y' - m'_{22} & m'_{33}y' - m'_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{14} - m_{34}x \\ m_{24} - m_{34}y \\ m'_{14} - m'_{34}x' \\ m'_{24} - m'_{34}y' \end{bmatrix}$$

Aplicar a pseudo-inversa e obter solução de mínimos quadrados.

```
>> m1

m1 =

    -2     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0    -1   100

>> m2

m2 =

   -1.4142         0    1.4142         0
         0    2.0000         0         0
   -0.7071         0   -0.7071   99.9981

>> x1=-0.2857; y1=0.5714;
>> x2=0.3944; y2=0.5578;
>> mt=[ m1(3,1)*x1-m1(1,1) m1(3,2)*x1-m1(1,2) m1(3,3)*x1-m1(1,3); m1(3,1)*y1-m1(2,1) m1(3,2)*y1-m1(2,2) m1(3,3)*y1-m1(2,3); m2(3,1)*x2-m2(1,1) m2(3,2)*x2-m2(1,2) m2(3,3)*x2-m2(1,3); m2(3,1)*y2-m2(2,1) m2(3,2)*y2-m2(2,2) m2(3,3)*y2-m2(2,3)]

mt =

    2.0000         0    0.2857
         0   -2.0000   -0.5714
    1.1353         0   -1.6931
   -0.3944   -2.0000   -0.3944

>> mb=[ m1(1,4)-m1(3,4)*x1; m1(2,4)-m1(3,4)*y1; m2(1,4)-m2(3,4)*x2; m2(2,4)-m2(3,4)*y2]

mb =

   28.5700
  -57.1400
  -39.4392
  -55.7789
```

```
>> pinv(mt)*mb

ans =

    9.9997
   20.0001
   29.9997

>>
```