

**CC222 – Visão Computacional**

**Geometria Projetiva**

**Instituto Tecnológico de Aeronáutica**

**Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Sala 121 IEC**

**[forster@ita.br](mailto:forster@ita.br)**

**ramal 5981**

## Tópicos da aula

- Rotação em 2D, Escala e Reflexo
- Deformação do quadrado unitário
- Corpo rígido em 2D
- Geometria Projetiva e Coordenadas homogêneas
- Dualidade
- Combinação de Transformações
- Classes de Transformações

## **Livros para acompanhar essa aula**

Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd edition)

D. F. Rogers, J. A. Adams

McGraw-Hill

Capítulos 2 e 3 pp 61-206

Fundamentos de Geometria Computacional

Resende, R. J., Stolfi, J.

IX Escola de Computação, Recife, 1994

Capítulo 2 pp 25-76

## Rotação em 2D

Rotação de 90 graus anti-horária

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

Exemplo

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Nova rotação, resulta rotação de 180 graus

$$P'' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P$$

## Forma Geral da Rotação (em torno da origem)

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

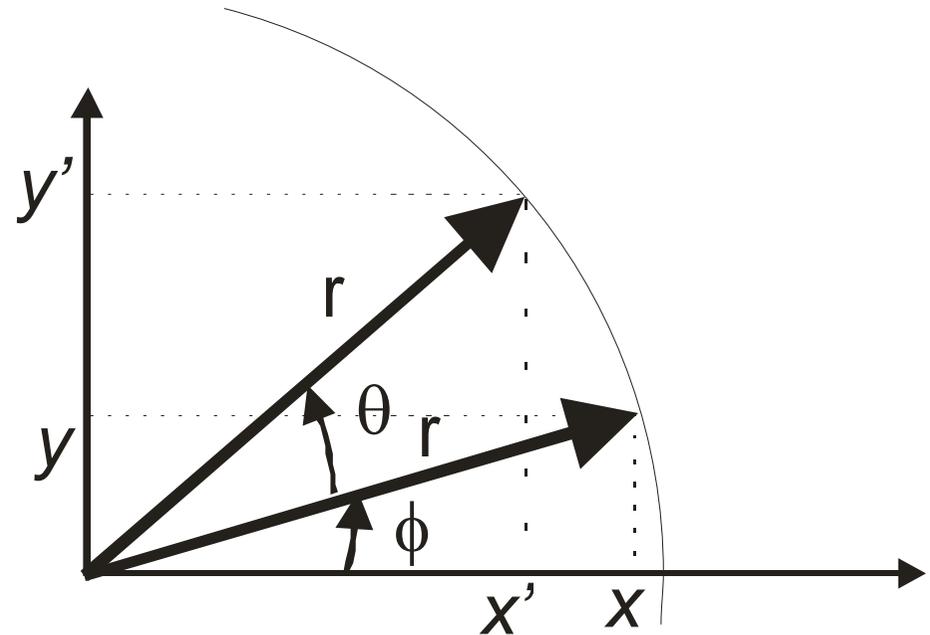
$$\begin{cases} x' = r \cos(\phi + \theta) \\ y' = r \sin(\phi + \theta) \end{cases}$$

$$\cos(\phi + \theta) = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta$$

$$\sin(\phi + \theta) = \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta$$

$$\begin{cases} x' = \underline{r \cos \phi \cos \theta} - \underline{r \sin \phi \sin \theta} \\ y' = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



## Propriedades da rotação

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ rotação por } \theta \text{ no sentido anti-horário em torno da origem}$$

Determinante  $\det T = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

Inversa: rotação por  $-\theta$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notar que  $T^T = T^{-1}$ , propriedade de matriz ortogonal

## Reflexo

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ reflexo sobre o eixo x.}$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ reflexo sobre o eixo y.}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ reflexo sobre a reta } x=y.$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 6 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Determinante é -1. Dois reflexos sobre retas passando pela origem compõem uma rotação. A matriz do reflexo é ortogonal.

## Escala

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ uniforme}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ não-uniforme}$$

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \text{ forma geral da escala, } a > 1 \text{ amplia ou expande, } a < 1 \text{ reduz ou comprime}$$

Se  $a=d$ , então escala é uniforme.

## Composição de Transformações

Multiplicação de matrizes é associativa

$$P_F = T_4 T_3 T_2 T_1 P_0$$

$$P_1 = T_1 P_0, P_2 = T_2 P_1 = T_2 T_1 P_0, \dots$$

Então

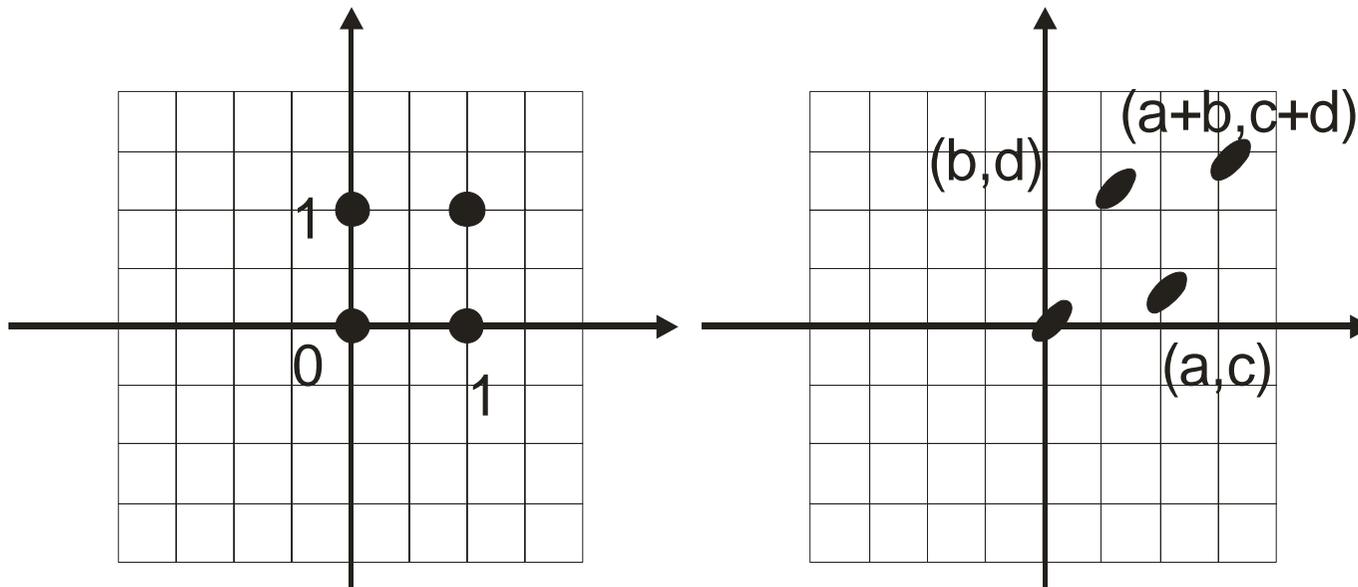
$$P_F = T P_0, \text{ onde } T = T_4 T_3 T_2 T_1$$

## Transformação do Quadrado Unitário

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & a+b \\ 0 & c & d & c+d \end{bmatrix}$$

Área do paralelogramo

$$A = ad - bc = \det T = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



## Transformação de corpo rígido

Que transformações levam retas perpendiculares em retas perpendiculares?

Sejam os vetores  $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$  e  $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ .

Seu produto escalar é  $v_1^T v_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$  e o vetorial  $|v_1 \times v_2| = (x_1 y_2 - y_1 x_2)$ .

$$v'_1 = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix} \quad e \quad v'_2 = \begin{bmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$$

Produto escalar deve ser o mesmo

$$v_1'^T v_2' = (a^2 + c^2)(x_1 x_2) + (b^2 + d^2)(y_1 y_2) + (ab + cd)(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Produto vetorial deve ser o mesmo

$$v_1' \times v_2' = (ad - cb)(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Condições para preservar a magnitude dos vetores e seus ângulos

$$a^2 + c^2 = 1$$

$$b^2 + d^2 = 1$$

$$ab + cd = 0 \quad \text{vetores (a,c) e (b,d) unitários e ortogonais}$$

Condição do produto vetorial

$$ad - cb = 1$$

Condição de que  $\det T = 1$

# Geometria Projetiva

## Coordenadas cartesianas

Função que biunivocamente mapeia um par de números reais nos pontos do plano.

Desvantagens do uso de coordenadas cartesianas

- Não suportam o conceito de pontos no infinito, o que gera muitos casos particulares (por exemplo, para encontrar a intersecção de duas retas deve-se considerar se são concorrentes, coincidentes ou paralelas).
- Não representam dualidade entre pontos e retas.
- Representação inconveniente para transformações geométricas.

## Coordenadas homogêneas

Se  $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  são coordenadas em  $\mathbb{R}^2$  então  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$  tais que  $X = \frac{x}{w}$  e  $Y = \frac{y}{w}$  com o peso  $w > 0$  são as coordenadas homogêneas do ponto representado.

Há múltiplas representações possíveis para um ponto em  $\mathbb{R}^2$  da forma

$$\begin{bmatrix} wX \\ wY \\ w \end{bmatrix}, \quad w > 0$$

(qualquer múltiplo representa o mesmo ponto)

Questão: o que acontece com  $\begin{bmatrix} x & y & w \end{bmatrix}^T$  se  $x$  e  $y$  permanecem constantes e  $w$  tende a zero? E se  $w$  tende ao infinito?

## Pontos no infinito

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$  com  $x$  e  $y$  constantes e  $w$  tendendo a zero, o ponto se afasta infinitamente da origem na direção do vetor  $(x,y)$ .

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$  (e seus múltiplos) representa o ponto infinito na direção do vetor  $(x,y)$

$\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$  representa o ponto no infinito “antípoda” do ponto  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$

A tripla  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  é considerada inválida.

## Pontos do outro lado do plano

O valor de  $w$  negativo pode ser interpretado como um ponto que atravessou o infinito (está além do infinito).

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$  corresponde ao ponto cartesiano  $\begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$  se estiver na frente do plano (aquém),

isto é, se  $w > 0$ , ou no seu verso se  $w < 0$  (além).

Dois pontos que diferem no sinal de  $w$  não são coincidentes, mas antípodas

$$-\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ -w \end{bmatrix} \quad -\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Retas

No plano cartesiano a reta é definida por três coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$  tais que, somente

se um ponto  $P = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$  pertence à reta, então  $AX + BY + C = 0$

(equação cartesiana da reta)

Reparar que múltiplos de  $(A,B,C)$  representam a mesma reta.

Escrevendo  $P$  em coordenadas homogêneas:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}, \quad A\left(\frac{x}{w}\right) + B\left(\frac{y}{w}\right) + C = 0, \quad \text{multiplicando por } w...$$

$$Ax + By + Cw = 0 \quad (\text{equação homogênea da reta})$$

Uma reta é definida por 3 coeficientes homogêneos  $\langle X, Y, W \rangle$  sendo que o ponto genérico  $P = [x \quad y \quad w]^T$  está na reta se e só se

$$Xx + Yy + Ww = 0$$

Exemplo

A reta  $\langle 2, 3, 1 \rangle$  passa pelos pontos tais que

$$2x + 3y + w = 0, \text{ ou seja, } 2X + 3Y + 1 = 0 \text{ em coordenadas cartesianas.}$$

Exercícios

- Qual a equação cartesiana da reta com coeficientes  $\langle 3, 5, 2 \rangle$ ?
- Quais os coeficientes homogêneos da reta  $3X - 2Y = 6$  (eq cartesiana)?
- Quais os coeficientes homogêneos dos eixos X e Y?
- Em que condições a reta é horizontal? Vertical? Passa pela origem?
- Quais as coordenadas homogêneas da origem do plano cartesiano?

## Pontos no infinito de uma reta

$Xx + Yy + Ww = 0$  é satisfeita pelos pontos infinitos  $\begin{bmatrix} Y \\ -X \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{bmatrix}$ .

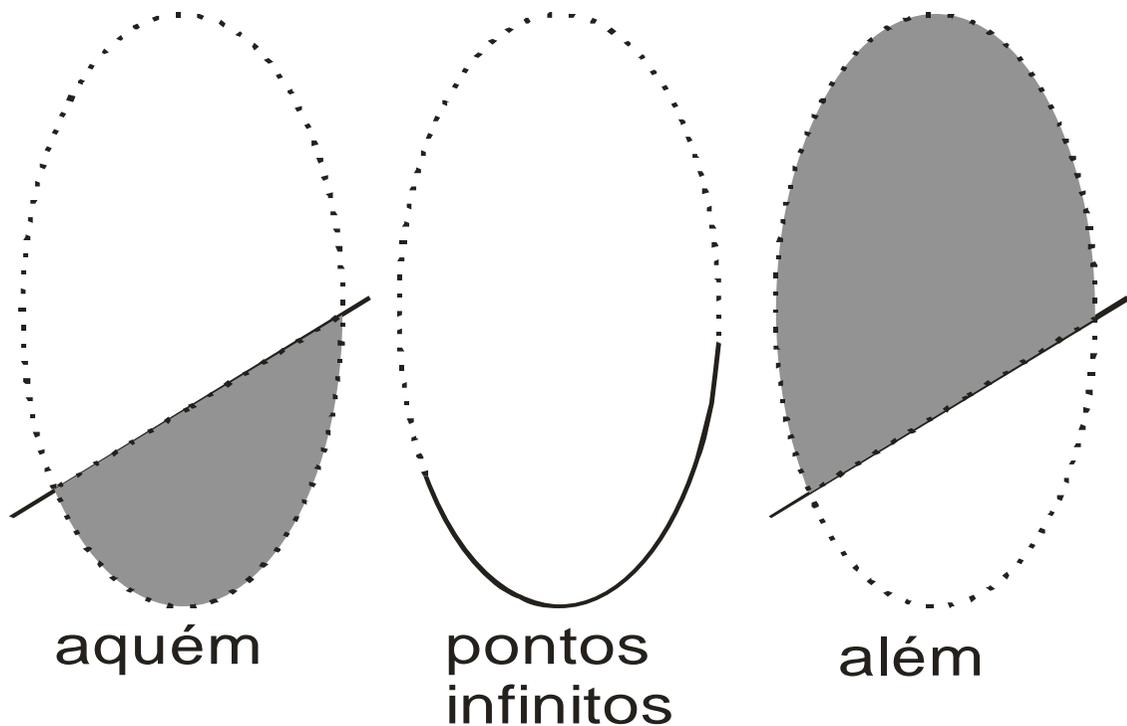
Toda reta paralela a um vetor  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  contém os pontos infinitos  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Duas retas de  $\mathbb{R}^2$  são paralelas entre si se e somente se as retas correspondentes de  $\mathbb{T}^2$  (o plano projetivo orientado) passam pelos mesmos pontos no infinito.

Se uma reta passa por um ponto  $P$ , também passa por seu antípoda  $\neg P$ .

Uma reta de  $\mathbb{T}^2$  é representada por duas retas euclidianas superpostas, uma no aquém e outra no além, com os mesmos coeficientes cartesianos, mais dois pontos infinitos, nas direções paralelas às retas.

A reta divide o plano  $\mathbb{T}^2$  em duas metades (os lados da reta) o lado positivo e o lado negativo de acordo com o sinal da expressão  $Xx + Yy + Ww$ . Se um ponto está do lado positivo da reta, seu antípoda estará no lado negativo.



## Teste de ponto contra reta

De que lado da reta está um ponto? Verificar o sinal do produto escalar.

$$r \diamond p = \text{sgn}(Xx + Yy + Ww)$$

-1 do lado negativo, +1 do lado positivo ou 0 se sobre a reta.

Se multiplicarmos os coeficientes de  $r$  por um número negativo, o valor de  $r \diamond p$  fica negado (os lados positivos e negativos da reta se invertem).

As retas  $r = \langle X, Y, W \rangle$  e  $r' = \langle -X, -Y, -W \rangle$  são coincidentes, mas não são iguais: diferem na sua orientação.

## Reta no infinito

$$Ax + By + Cw = 0 \text{ com } A=B=0.$$

Esta equação não é aceita por nenhum ponto de  $R^2$  (ou por todos se  $C=0$ ).

Triplas da forma  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \end{bmatrix}$  correspondem a uma das retas opostas que contém todos os pontos infinitos:

$$0x + 0y + 1w = 0 \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \text{a reta contém todos os pontos da forma } \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

A reta no infinito (com aquém positivo) é denominada  $\Omega$ .

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \neg\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Duas retas não-coincidentes se interceptam em dois pontos antipodais.

Dois pontos não-coincidentes determinam exatamente duas retas opostas entre si.

Essas regras funcionam para qualquer tipo de ponto (finito ou infinito) e reta (paralelas ou não, finita ou infinita).

## Colinearidade de 3 pontos

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{convertido em coord homogêneas} \quad \begin{vmatrix} x_0 / w_0 & y_0 / w_0 & 1 \\ x_1 / w_1 & y_1 / w_1 & 1 \\ x_2 / w_2 & y_2 / w_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando-se as linhas por  $w_0, w_1, w_2$  respectivamente, multiplica-se o determinante por  $w_0 w_1 w_2$ . Assim:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{válida para quais quer pontos (finitos ou infinitos).}$$

## Reta por 2 pontos

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x & y & w \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} y_0 & w_0 \\ y_1 & w_1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_0 & w_0 \\ x_1 & w_1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} w = 0$$

Reta que passa por  $p_0$  e  $p_1$  é 
$$p_0 \vee p_1 = \begin{bmatrix} y_0 w_1 - y_1 w_0 \\ -x_0 w_1 + x_1 w_0 \\ x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{bmatrix} \quad (\text{join - produto vetorial})$$

(vale para qualquer pontos não coincidentes, não antipodais)

Exercício: Determinar a reta que passa pela origem e por (X,Y).

## Ponto determinado por duas retas

$$r_0 = \langle X_0, Y_0, W_0 \rangle \quad e \quad r_1 = \langle X_1, Y_1, W_1 \rangle$$

$p = r_0 \wedge r_1$  (meet) é a intersecção das retas.  $(X, Y)$  em coordenadas cartesianas.

$$\begin{cases} X_0 X + Y_0 Y = -W_0 \\ X_1 X + Y_1 Y = -W_1 \end{cases}, \text{ pela regra de Cramer:}$$

$$X = \frac{-\begin{vmatrix} W_0 & Y_0 \\ W_1 & Y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}} \quad e \quad Y = \frac{-\begin{vmatrix} X_0 & W_0 \\ X_1 & W_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}}$$

Fazendo  $W=1$  e multiplicando  $X$ ,  $Y$  e  $W$  pelo denominador comum, obtemos as coordenadas homogêneas do ponto.

$$p = r_0 \wedge r_1 = \begin{bmatrix} -W_0Y_0 + W_1Y_0 \\ W_0X_1 - W_1X_0 \\ X_0Y_1 - X_1Y_0 \end{bmatrix} \text{ (meet – produto vetorial)}$$

Se as duas retas forem paralelas, a solução será um ponto infinito.

## Dualidade da Geometria Projetiva

O princípio da dualidade permite traduzir mecanicamente muitas fórmulas geométricas que envolvem pontos em outras fórmulas que envolvem retas e vice-versa. O mesmo vale para teoremas, algoritmos e estruturas de dados.

## Segmentos e triângulos

A combinação convexa em coordenadas homogêneas não necessita limitar a soma dos pesos em 1. A combinação é convexa para cada  $\alpha_i$  positivo, e pelo menos um deles não nulo.

Um segmento é definido como a combinação convexa de dois pontos.

Um triângulo é definido como a combinação convexa de 3 pontos, o que inclui os segmentos de reta que formam os lados do triângulo.

$$\text{Segmento: } \begin{bmatrix} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 \\ \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 \end{bmatrix}. \text{ Triângulo } \begin{bmatrix} \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \end{bmatrix}.$$

Não se aconselha interpretar o ponto correspondente a cada tupla de  $\alpha_i$  independentemente, mas o conjunto das possíveis tuplas.

## Orientação de 3 pontos

$$\Delta(p_0, p_1, p_2) = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Orientação positiva ou negativa.

Se for zero, os pontos são colineares.

# Projetividades

## (ou Transformações Projetivas)

São transformações do plano T2 ao plano T2.

Preserva a colinearidade de pontos.

Projetividades são transformações lineares inversíveis sobre coordenadas homogêneas.

No plano podem ser representadas por matrizes 3x3 de determinante não-nulo.

$$F = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xw} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yw} \\ f_{wx} & f_{wy} & f_{ww} \end{bmatrix}$$

Formam-se duas classes de projetividades:

As de determinante positivo (ou projetividades positivas), que preservam a orientação dos triângulos.

As de determinante negativo (negativas), que invertem a orientação dos triângulos.

Multiplicando-se a matriz  $F$  por um escalar positivo, continuamos representando a mesma transformação. ( $F \cdot p = \alpha F \cdot p$  em coordenadas homogêneas).

## Translações

Transformações da forma

$$(X, Y) \mapsto (X + X_0, Y + Y_0) = (X, Y) + (X_0, Y_0)$$

Preservam distâncias, direções e ângulos.

Translação que leva a origem para o ponto  $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & w_0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xw_0 + wx_0 \\ yw_0 + wy_0 \\ ww_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0 & 0 & x_0 \\ 0 & w_0 & y_0 \\ 0 & 0 & w_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Exercício: Aplicar translação a um ponto infinito.

Exercício: Escrever a matriz que mapeia  $(X_0, Y_0)$  em  $(X_1, Y_1)$ .

## Propriedades das transformações já vistas

Translações não podem ser representadas como transformações lineares no plano cartesiano (só em coordenadas homogêneas). São transformações afins em coordenadas cartesianas.

Rotações preservam ângulos e distâncias.

Escalas uniformes preservam ângulos e direções.

Escalas não-uniformes preservam direções verticais e horizontais.

Reflexos preservam distâncias, invertem ângulos

## Cisalhamentos

$$(X, Y) \mapsto (X + \alpha Y, Y)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{cisalhamento horizontal – preserva coordenada } Y, \\ \text{paralelismo e \u00e1reas})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \quad (\text{cisalhamento vertical})$$

## Mais classes de transformações

Isometrias ou transformações isométricas: rotações, translações e reflexos. Modelam movimentos rígidos no plano, preservam distâncias e ângulos.

Similaridades ou transformações euclidianas: incluem as isometrias e escalas uniformes, preservam ângulos e razões entre distâncias.

Transformações unitárias: incluem as isometrias e os cisalhamentos, preservam áreas e paralelismo.

Transformações afins inversíveis: preservam o paralelismo e (consequentemente) mapeiam pontos do infinito no infinito e pontos finitos em pontos finitos.

Todas essas classes de transformações são fechadas quanto à inversão e à composição.

Propriedade:  $(F \cdot G)^{-1} = G^{-1} \cdot F^{-1}$

As similaridades têm a forma

$$\begin{bmatrix} a & -b & x_d \\ b & a & y_d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}, \quad \text{pelo menos } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

As transformações afins têm a forma

$$(X, Y) \mapsto (aX + bY + e, cX + dY + f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\text{Ou } \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

## Aplicação de Projetividades em Retas

$$Xx + Yy + Ww = 0$$

$$r^T p = 0$$

$$r^T F^{-1} Fp = 0,$$

Mas  $Fp = p'$ .

Se  $r'^T p' = 0$ , então  $r'^T = r^T F^{-1}$

Assim, transpondo ambos os lados:

$$r' = F^{-T} r$$

## Exemplo

Rotação em torno de um ponto arbitrário.

Rotação por ângulo  $\theta$  em torno do ponto  $(m, n)$

- Translação de  $(m, n)$  à origem.
- Rotação por  $\theta$ .
- Translação da origem à  $(m, n)$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1^{-1}$$

**Exemplo: Rotação de 90 graus em torno de (4,3)**

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T_1^{-1}$$

$$T = T_3 T_2 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo:

### Reflexo sobre uma reta arbitrária.

$$y = \tan \theta x + k$$

- Transladar para que a reta passe pela origem
- Rotação para que a reta coincida com o eixo x
- Reflexo sobre eixo x
- Rotação inversa para corrigir a direção
- Translação inversa para corrigir a posição

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1^{-1} = R_1^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A seqüência de transformações é dada por

$$T = T_1^{-1} R_1^{-1} M R_1 T_1$$

Exemplo: Reta  $y = \frac{1}{2}(x + 4)$ , Pontos  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$