CC222 – Visão Computacional

Transformações Lineares

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Sala 121 IEC

forster@ita.br

ramal 5981

Tópicos da aula

- Representação (analítica) de pontos e vetores
- Transformações lineares
- Método dos mínimos quadrados
- Combinações baricêntricas
- Equação da reta
- Transformações de retas

Livro para acompanhar essa aula

Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd edition)

D. F. Rogers, J. A. Adams

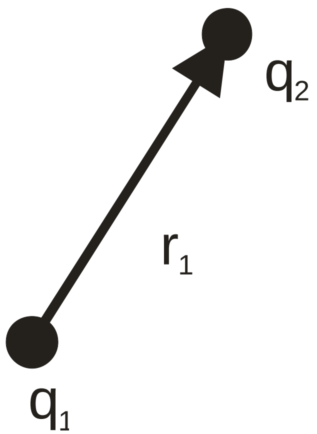
McGraw-Hill

Capítulos 2 e 3 pp 61-206

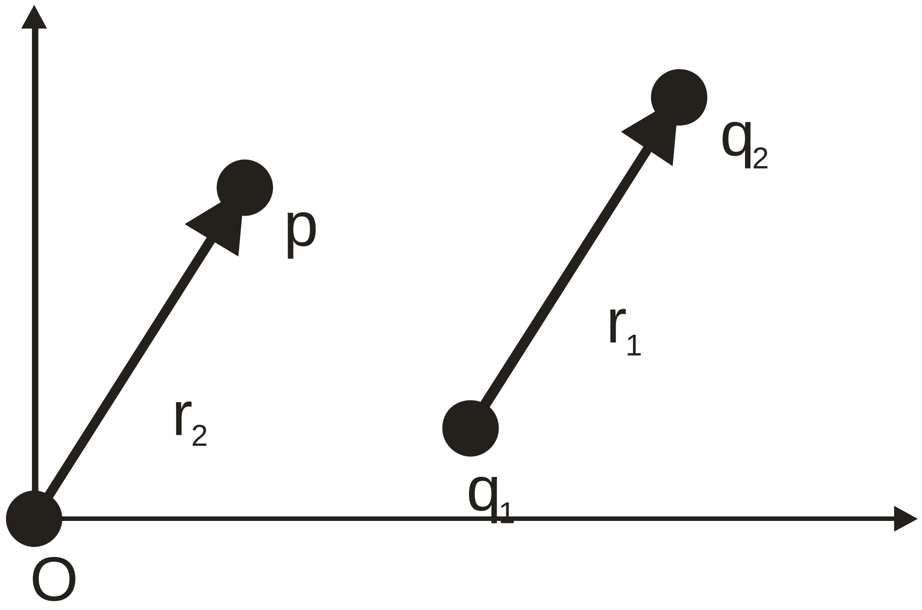
Representação de pontos e vetores

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vetores



$$\vec{r}_1 = q_2 - q_1$$



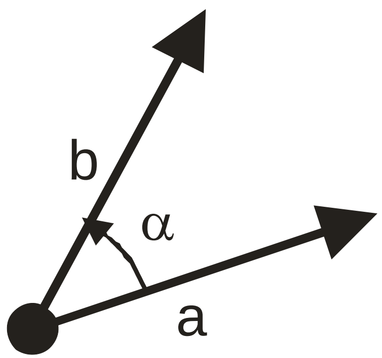
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

Vetor: direção/orientação e comprimento

Produto escalar

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \alpha$$

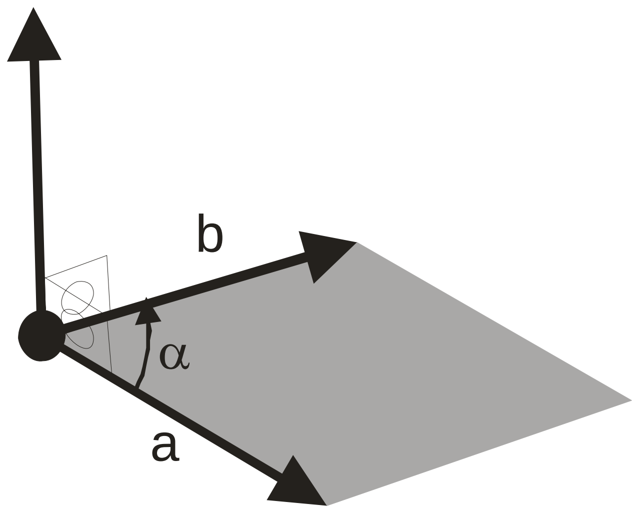


Nulo se vetores perpendiculares

Produto vetorial em 3D

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$$



Perpendicular aos vetores **a** e **b**.

Nulo para vetores paralelos (ou opostos)

Em 2D, encontro a direção perpendicular a um vetor.

$$\mathbf{a}^{\perp}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}a_2\\ -a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$$

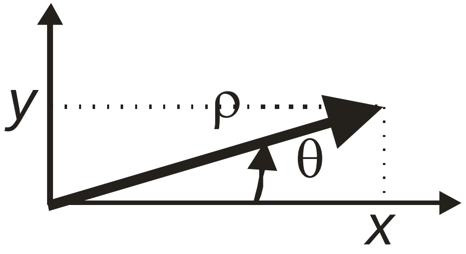
Produto misto de 3 vetores **a**,**b** e **c** no espaço

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\left[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\right]$$

Idéia de volume do paralelepípedo

Nulo se vetores coplanares

Representação polar

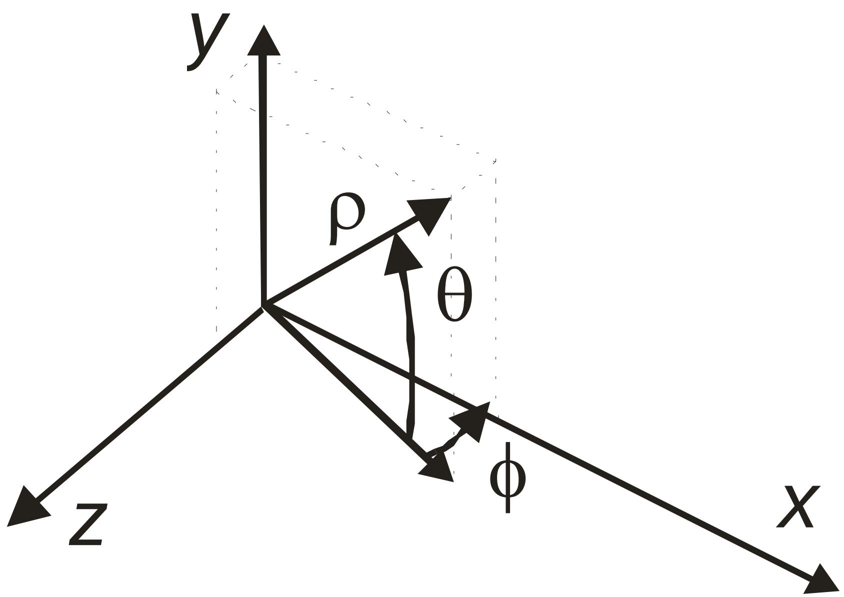


$$x = \rho \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\theta$$

Polar no espaço 3D

$$\left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right)$$

Coordenadas esféricas



$$x = \rho \cos\theta \cos\phi$$
$$y = \rho \sin\theta$$
$$z = \rho \cos\theta \sin\phi$$

Transformação Linear

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_1 = T(\mathbf{p}_0)$$

Se T é linear

$$x_1 = ax_0 + by_0$$

$$y_1 = cx_0 + dy_0$$

Escrevendo a transformação na forma de produto matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 + by_0 \\ cx_0 + dy_0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

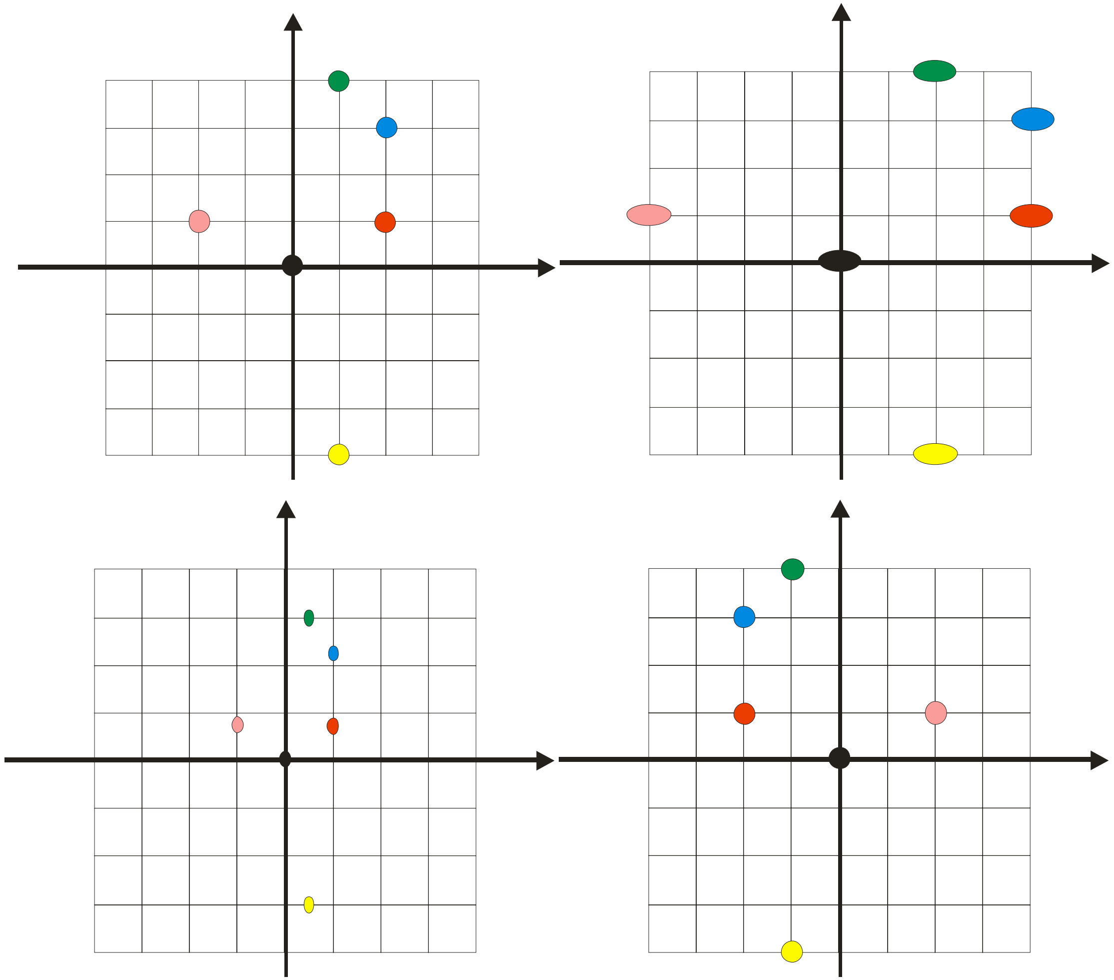
Exemplos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

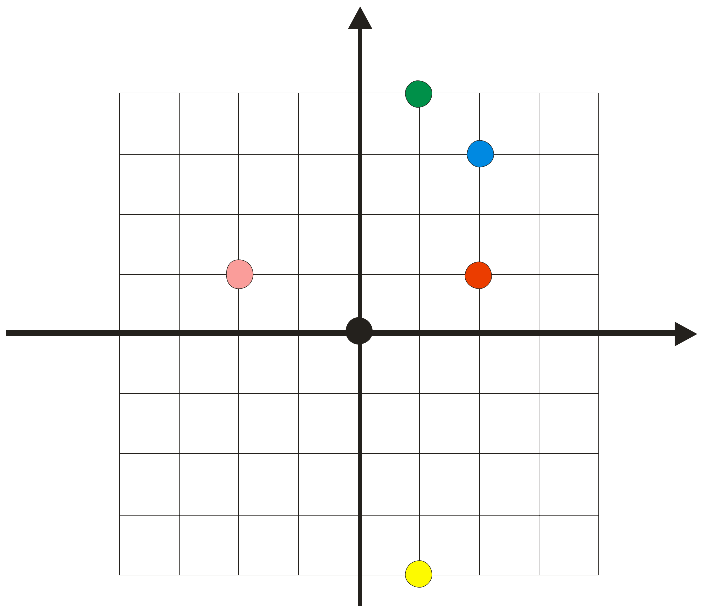
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_0 \\ dy_0 \end{bmatrix}$$

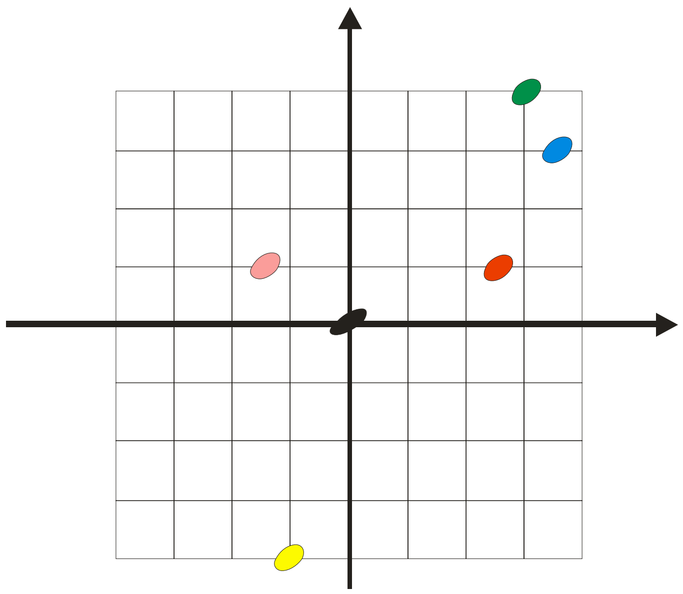
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

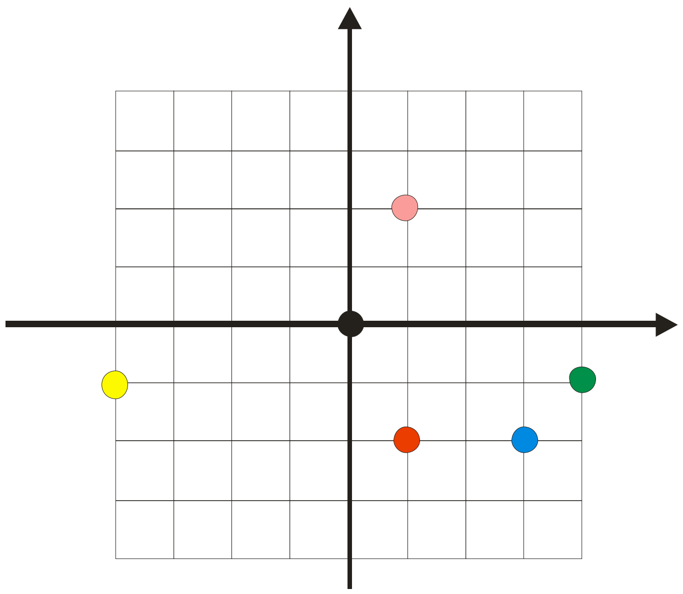


$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + by_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ -x_0 \end{bmatrix}$$

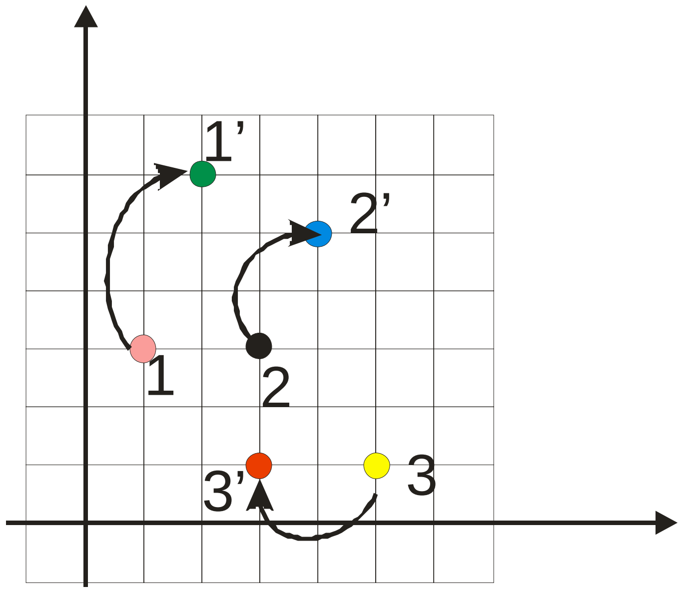






Exemplo

Qual transformação linear mapeia os pontos 1, 2 e 3 nos pontos 1', 2' e 3'?



Escrevemos a transformação da forma

$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e, sendo os pontos $p_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ e $p'_i = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix}$ tais que

$$p'_i = Tp_i$$

Formamos o sistema de equações (6 equações 4 incógnitas)

$$x'_1 = ax_1 + by_1$$

$$y'_1 = cx_1 + dy_1$$

$$x'_2 = ax_2 + by_2$$

$$y'_2 = cx_2 + dy_2$$

$$x'_3 = ax_3 + by_3$$

$$y'_3 = cx_3 + dy_3$$

Solução

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ x'_2 \\ y'_2 \\ x'_3 \\ y'_3 \end{bmatrix}$$

Sistema super-determinado.

Separável

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ y'_1 \\ y_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}$$

Buscar solução exata

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \quad e\ conferir \quad ax_3 + by_3 = x'_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} \quad e\ conferir \quad cx_3 + dy_3 = y'_3$$

Busca solução aproximada

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

Obter $\hat{a}, \hat{b}$ estimados para que $\hat{x}_1', \hat{x}_2', \hat{x}_3'$ estimados de forma a minimizar o erro

$$E = \left(x_1' - \hat{x}_1'\right)^2 + \left(x_2' - \hat{x}_2'\right)^2 + \left(x_3' - \hat{x}_3'\right)^2$$

Onde

$$\hat{x}_i' = \hat{a}x_i + \hat{b}y_i$$

Assim

$$E = \left(x_1' - \hat{a}x_1 - \hat{b}y_1\right)^2 + \left(x_2' - \hat{a}x_2 - \hat{b}y_2\right)^2 + \left(x_3' - \hat{a}x_3 - \hat{b}y_3\right)^2$$

$$E = \left(x_1' - \hat{a}x_1 - \hat{b}y_1\right)^2 + \left(x_2' - \hat{a}x_2 - \hat{b}y_2\right)^2 + \left(x_3' - \hat{a}x_3 - \hat{b}y_3\right)^2$$

Se o gradiente de E for nulo, então encontramos um ponto de mínimo.

$$\vec{\nabla} E = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial \hat{a}} & \dfrac{\partial E}{\partial \hat{b}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}$$ (pela regra da cadeia)

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{a}} = -2\left(x_1' - \hat{a}x_1 - \hat{b}y_1\right)x_1 - 2\left(x_2' - \hat{a}x_2 - \hat{b}y_2\right)x_2 - 2\left(x_3' - \hat{a}x_3 - \hat{b}y_3\right)x_3$$

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{b}} = -2\left(x_1' - \hat{a}x_1 - \hat{b}y_1\right)y_1 - 2\left(x_2' - \hat{a}x_2 - \hat{b}y_2\right)y_2 - 2\left(x_3' - \hat{a}x_3 - \hat{b}y_3\right)y_3$$

Sistema resultante resolve o problema de minimização de E.

Sistema de Equações Normais (para o problema acima)

$$\begin{bmatrix} x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & y_1^{\ 2} + y_2^{\ 2} + y_3^{\ 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' x_1 + x_2' x_2 + x_3' x_3 \\ x_1' y_1 + x_2' y_2 + x_3' y_3 \end{bmatrix}$$

Forma Geral do Método de Mínimos Quadrados

Para um sistema super-determinado

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

A solução de mínimos quadrados é a solução do sistema de equações normais

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

Pode ser resolvido calculando-se a matriz pseudo-inversa de A

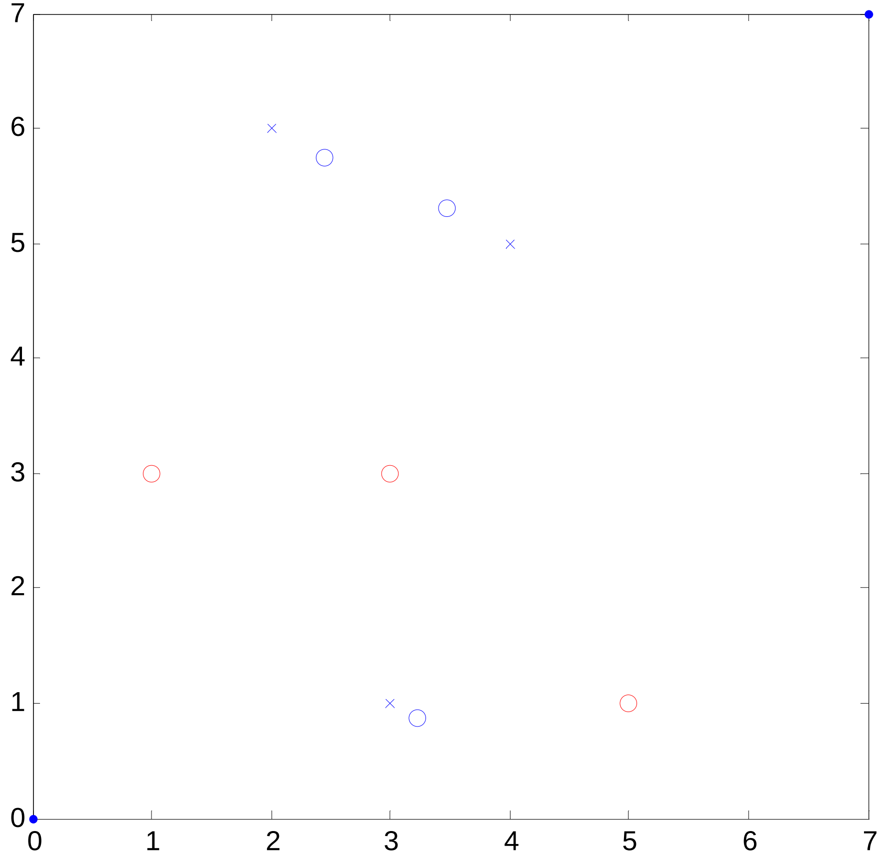
$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$$

Solução no Matlab

```
>> p1=[1 3]'; p2=[3 3]'; p3=[5 1]';
>> q1=[2 6]'; q2=[4 5]'; q3=[3 1]';
>> p=[p1,p2,p3];
>> q=[q1,q2,q3];
>> plot(p(1,1:3),p(2,1:3),'ro',q(1,1:3),q(2,1:3),'bx',0,0,'.');
>> ab=pinv(p')*q(1,:)'
ab =
    0.5160
    0.6436
>> cd=pinv(p')*q(2,:)'
cd =
   -0.2234
    1.9894
```

```
>> T=[ab';cd']
T =
    0.5160    0.6436
   -0.2234    1.9894
>> p
p =
     1     3     5
     3     3     1
>> q
q =
     2     4     3
     6     5     1
>> f=T*p
f =
    2.4468    3.4787    3.2234
    5.7447    5.2979    0.8723
```

```
>> hold
>> plot(f(1,1:3),f(2,1:3),'bo')
```



Para pensar:

- Qual foi a medida de distância que minimizamos neste exemplo considerando a posição dos pontos obtidos e dos pontos almejados?
- Sugerir outra função a minimizar e sua utilidade.

Transformação linear da origem

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall a, b, c, d$$

Transformação linear de vetores

$$\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$$

$$\mathbf{T}\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{T}\mathbf{q}_\mathbf{1} - \mathbf{T}\mathbf{q}_\mathbf{0}$$

Transformação de um conjunto de pontos

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, p_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}, P = \left[p_1 \middle| p_2 \middle| p_3 \right] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

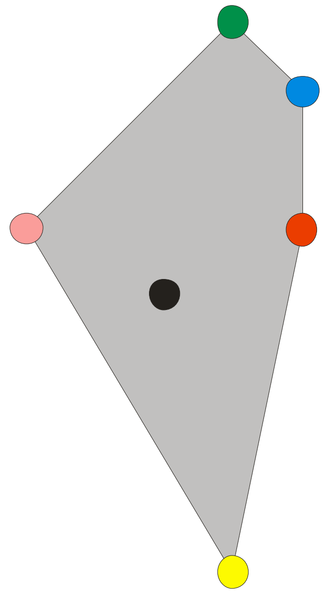
$$P' = T \cdot P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{bmatrix}_{2\times 3} = \left[p_1' \middle| p_2' \middle| p_3' \right]$$

Combinação Baricêntrica (Convexa)

$$\mathbf{p} = \alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{p}_n$$ (combinação linear)

Sujeita ao seguinte conjunto de restrições

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad e \quad \forall i, 1 \le i \le n, \alpha_i \ge 0$$

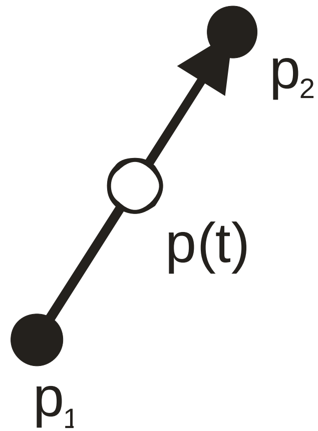


Equação Baricêntrica da Reta

(segmento de reta)

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\,\mathbf{p}_2$$

$$0 \le t \le 1$$



Transformação linear de um ponto da reta

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, p_1' = Tp_1, p_2' = Tp_2$$

$$p = (1-t)\,p_1 + tp_2$$

$$Tp = (1-t)Tp_1 + tTp_2$$

$$p' = (1-t)\,p_1' + tp_2'$$

Transformação Linear de Retas Paralelas

$$p_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A inclinação da reta que passa por p1 e p2 é dada por $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$p'_1 = \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix}, p'_2 = \begin{bmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{bmatrix}$, a inclinação da reta transformada é

$$m' = \frac{cx_2 + dy_2 - cx_1 - dy_1}{ax_2 + by_2 - ax_1 - by_1} = \frac{c(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)} \overset{\div (x_2 - x_1)}{=} \frac{c + dm}{a + bm}$$

m’ depende apenas de m e de T

Transformação Linear de Retas Concorrentes

$$y = m_1 x + k_1 \qquad M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 & 1 \\ -m_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$y = m_2 x + k_2$$

$$M^{-1} = \frac{1}{m_2 - m_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m_2 - m_1}\begin{bmatrix} k_1 - k_2 \\ k_1 m_2 - k_2 m_1 \end{bmatrix}$$

Transformando as retas, temos

$$m' = \frac{c + dm}{a + bm} \quad e \quad k' = k\,\frac{ad - bc}{a + bm}$$

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \cdot M^{-1}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = M'^{-1}\begin{bmatrix} k_1' \\ k_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{m_2 - m_1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m_2 & -m_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{m'_2 - m'_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m'_2 & -m'_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \end{bmatrix}$$

Expandindo m’ e k’ verifica-se a igualdade.

Colinearidade e equação da reta

A colinearidade de 3 pontos no plano pode ser verificada pela equação

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_x & 1 \\ b_x & 1 \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_y & 1 \\ b_y & 1 \end{vmatrix} c_x = 0$$

Essa equação pode ser vista como uma equação da reta em função das coordenadas de **c**.

Tarefa para aula que vem

Ler sobre transformações lineares e SVD em

http://www.uwlax.edu/faculty/will/svd