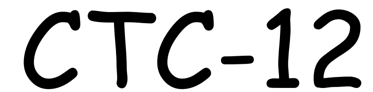
CTC-12

Projeto e Análise de Algoritmos

Carlos Alberto Alonso Sanches



8) Algoritmos em grafos

Tarjan e similares

Em profundidade (*depth-first search*)

- Tática: enquanto for possível, aprofundar-se no grafo; quando não for mais possível, recuar um nível.
- Exemplo (supomos armazenamento em ordem crescente):

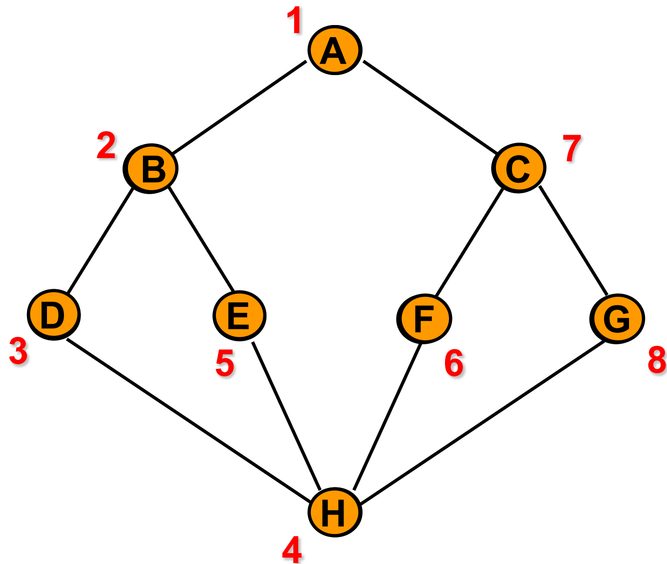
- A exploração em profundidade possibilita a resolução eficiente de diversos problemas, como veremos adiante.

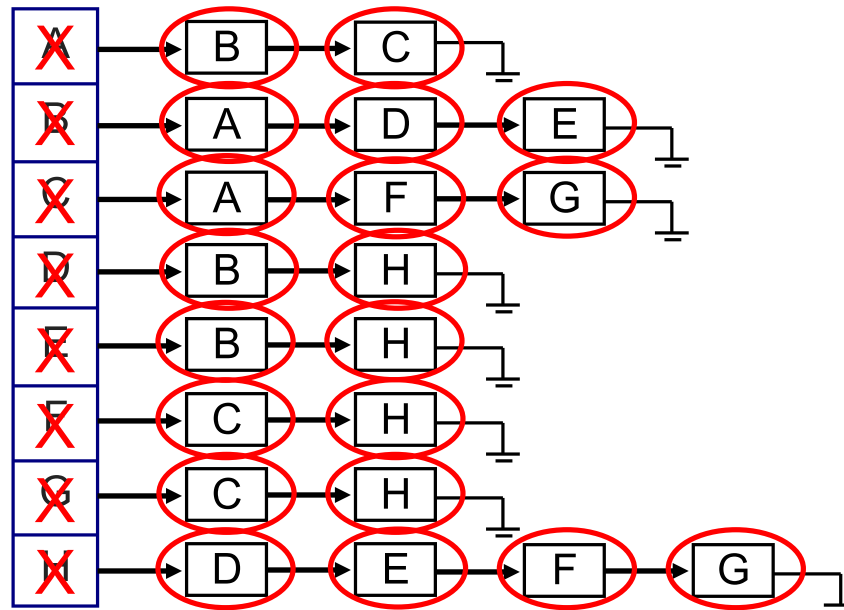
Versão recursiva

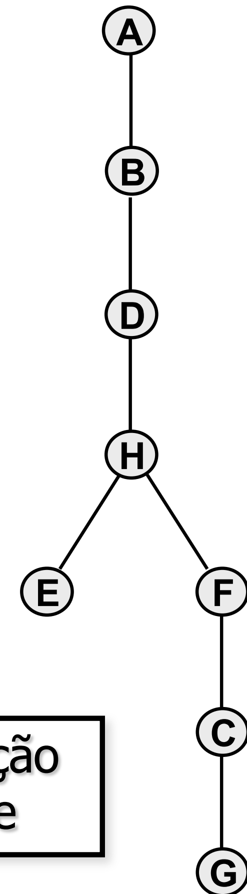
```
int cont = 0;
desmarcar todos os vértices;

DFS(s) {
    marcar s;
    expl[s] = ++cont;
    // explorando s
    for <s,v> ∈ E {
        if v está desmarcado
            DFS(v);
    }
}
```

- Analogamente à exploração em largura, a complexidade de tempo também é $\Theta(n+m)$.

Exemplo







não visitado

visitado

Árvore de exploração em profundidade

Versão iterativa

```
DFS(s) {
    desmarcar todos os vértices;
    stack P;
    int cont = 0;
    marcar s;
    push(P,s);
    while (!isEmpty(P)) {
        curr = top(P);
        pop(P);
        expl[curr] = ++cont;
        // explorando curr
        for <curr,v> ∈ E {
            if v está desmarcado {
                marcar v;
                push(P,v);
            }
        }
    }
}
```

Pequena diferença em relação à versão recursiva: inicialmente, marca e empilha os vértices vizinhos; depois, numera-os à medida que são desempilhados

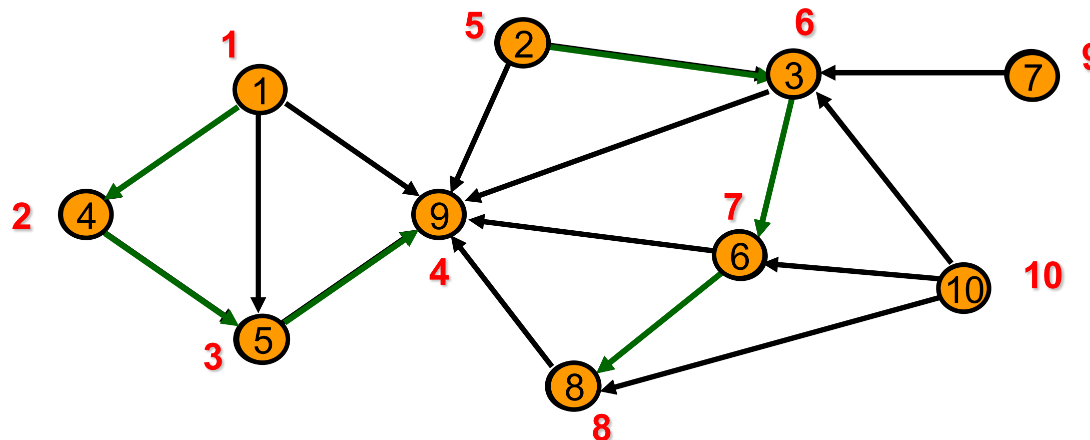
A ordem de empilhamento é diferente da versão recursiva: gerará outra árvore de exploração!

Exploração em profundidade (digrafos)

```
int cont;

TravessiaDFS(s) {
   desmarcar todos os vértices;
   cont = 0;
   DFS(s);
   for v ∈ V {
      if v está desmarcado
         DFS(v);
   }
}
```

Código adicional

```
DFS(v) {
  marcar v;
  expl[v] = ++cont;
  // explorando v
  for <v,u> ∈ E {
     if u está desmarcado
       DFS(u);
  }
}
```

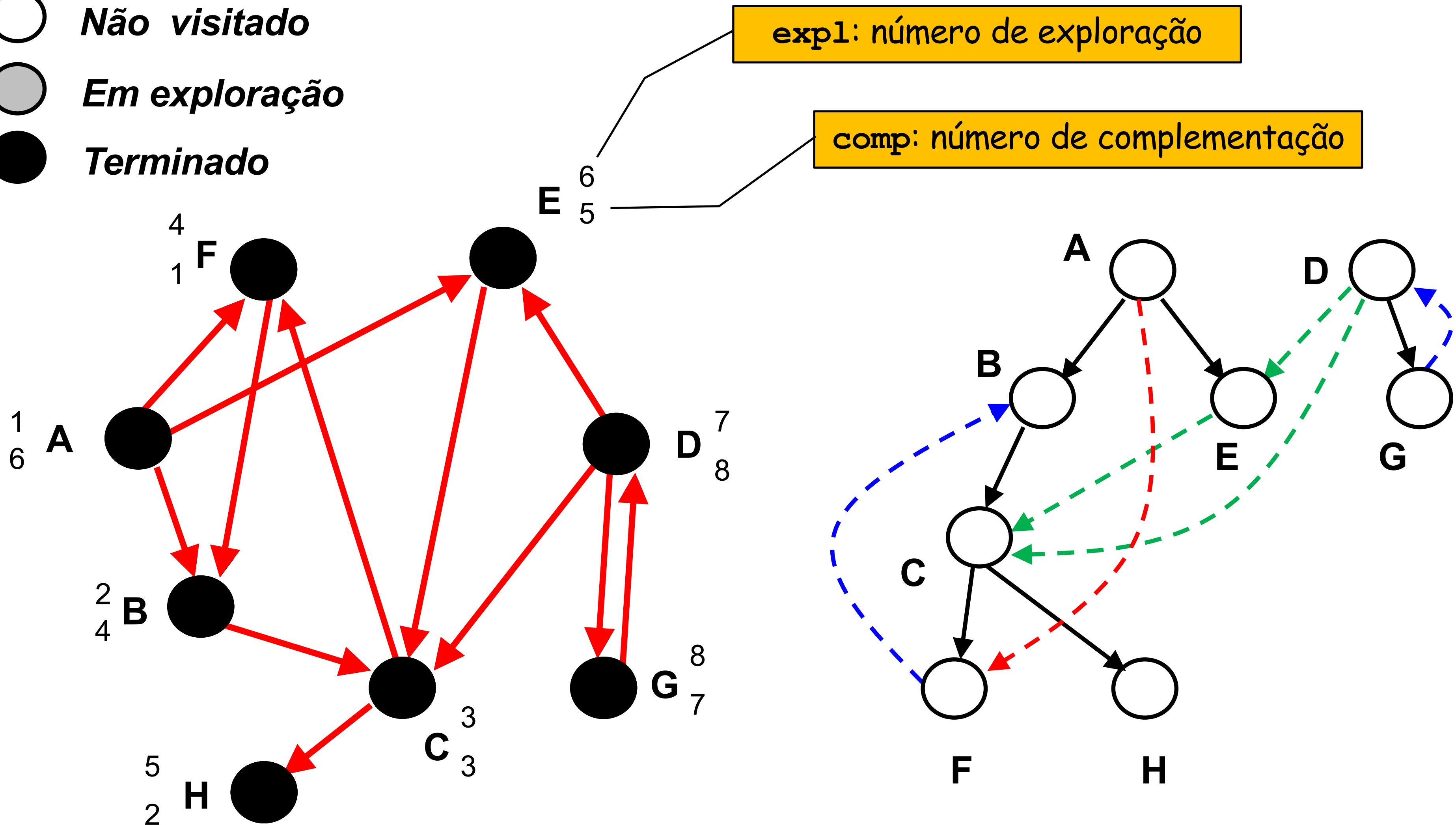


Tempo: $\Theta(n+m)$

Solução análoga para grafos desconexos

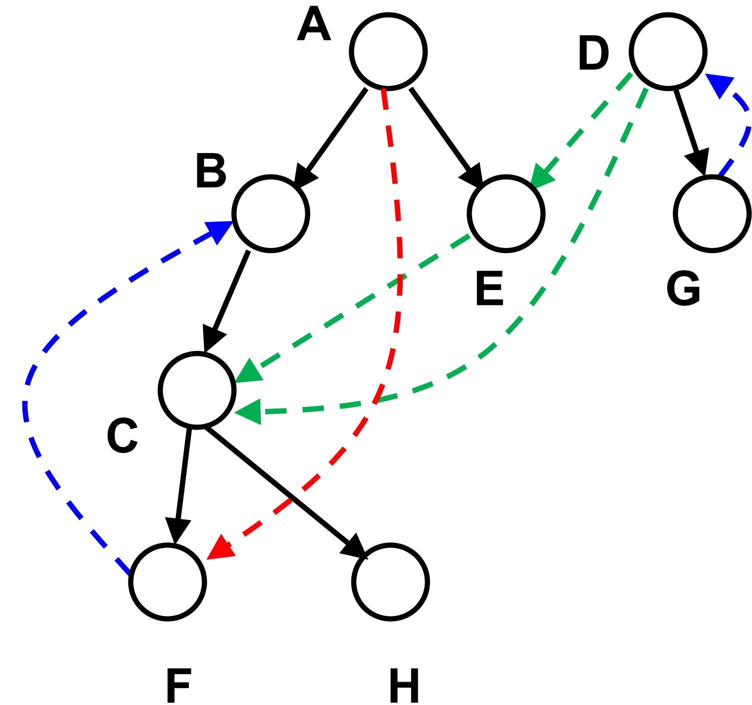
- Durante a *exploração em profundidade* de um digrafo, numerar seus vértices de acordo com o início e o término dessa exploração.
- As diferentes situações permitem estabelecer uma classificação dos arcos.

Exemplo



Classificação dos arcos

- Classificação do arco <v,u>:
  - Árvore (T): u ainda não havia sido explorado, e será filho de v em T (`expl[u]=0`)
  - Retorno (B): u é antecessor de v em T, pois começou antes de v e ainda está em exploração (`expl[u]<expl[v]` e `comp[u]=0`)
  - Cruzamento (C): u está em outra árvore ou sub-árvore, pois começou antes de v e já foi explorado (`expl[u]<expl[v]` e `comp[u]>0`)
  - Avanço (F): u é descendente de v em T, pois começou depois de v e já foi explorado (`expl[u]>expl[v]` e `comp[u]>0`)



Algoritmo de Tarjan

```
Tarjan(G) {
   int ce = 0;
   int cc = 0;
   for v ∈ V {
         expl[v] = 0;
         comp[v] = 0;
   }
   for v ∈ V
         if (expl[v] == 0)
             DFST(v);
}
```

```
DFST(v) {
      expl[v] = ++ce;
      for <v,u> ∈ E
          if (expl[u] == 0) {
                   tipo[<v,u>] = T;
                   DFST(u);
          }
          else if (expl[u] > expl[v])
                      tipo[<v,u>] = F;
                 else if (comp[u] > 0)
                             tipo[<v,u>] = C;
                        else tipo[<v,u>] = B;
      comp[v] = ++cc;
}
```

Complexidade de tempo: $\Theta(n+m)$

Exercício

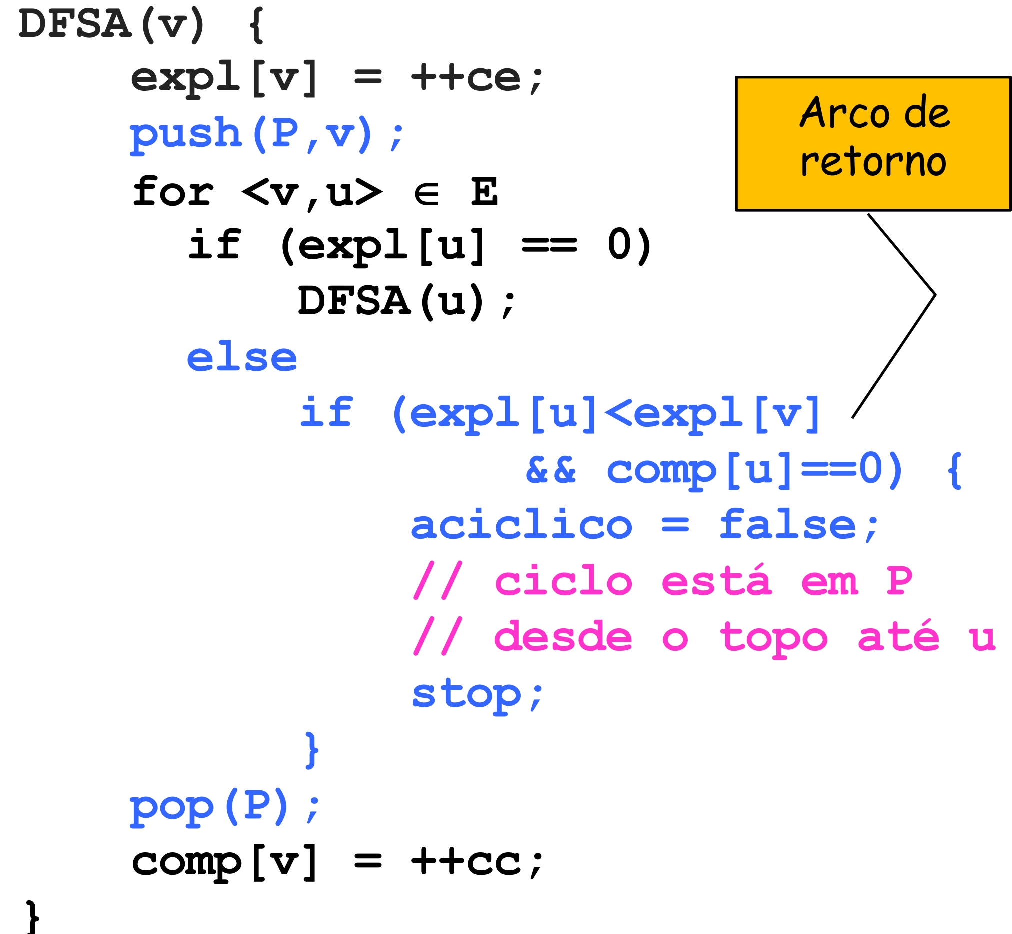
- Considere um *grafo não orientado, sem laços e sem arestas repetidas*. Se aplicarmos nele o algoritmo de Tarjan, somente haverá arestas de árvore e de retorno.
- Por que neste caso não existem arestas de avanço e de cruzamento?

Teste de aciclicidade

- Em certas aplicações, uma tarefa importante é o reconhecimento de um *digrafo acíclico* (conhecido como DAG).
  - Alguns exemplos: ordenação topológica ("temporização entre os vértices), fluxo máximo, dependência de dados, otimização de rotas, otimização de circuitos digitais, etc.
- A exploração em profundidade pode nos dar a solução desse problema em tempo O(n+m).
- Concretamente, basta uma variação do algoritmo de Tarjan: se um arco de retorno for encontrado durante a exploração, então o digrafo será cíclico.

Algoritmo

```
Aciclicidade(G) {
   stack P;
   bool aciclico = true;
   int ce = 0;
   int cc = 0;
   for v ∈ V {
        expl[v] = 0;
        comp[v] = 0;
   }
   for v ∈ V
     if (expl[v] == 0)
         DFSA(v);
   if (aciclico)
       digrafo é acíclico
   else
       digrafo é cíclico
}
```



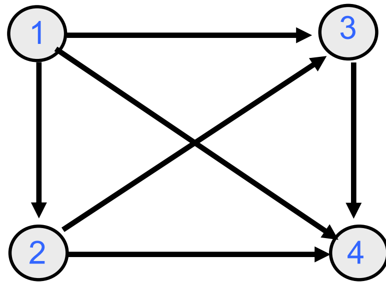

```
DFSA(v) {
    expl[v] = ++ce;
    push(P,v);
    for <v,u> ∈ E
      if (expl[u] == 0)
          DFSA(u);
      else
          if (expl[u]<expl[v]
                  && comp[u]==0) {
              aciclico = false;
              // ciclo está em P
              // desde o topo até u
              stop;
          }
    pop(P);
    comp[v] = ++cc;
}
```

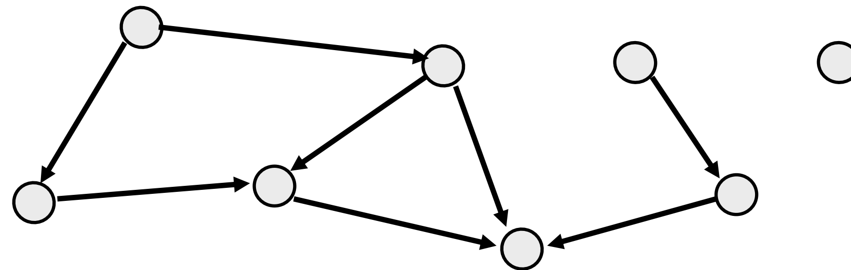
Ordenação topológica

- Uma <u>ordenação topológica</u> de um digrafo $G=(V,E)$ corresponde a uma bijeção $f: V \rightarrow \{1,2, \ldots, n\}$ tal que, para todo arco $(u,v) \in E$, $f(u) < f(v)$.
- Em outras palavras, deseja-se numerar os vértices de tal modo que, se houver em G um caminho de u até v, então o número de u será menor que o de v.
- É possível provar que um digrafo G admite uma ordenação topológica se e somente se for acíclico.
- Se os vértices forem alinhados de acordo com uma ordenação topológica, todos os arcos terão uma mesma direção.
- Alguns exemplos de aplicação: cálculos de fórmulas em planilhas, gerenciamento de tarefas em um projeto (diagramas PERT/CPM), ordem de compilação dos arquivos fontes, resolução de conflitos em bancos de dados, sequência de entregas em redes de transportes, etc.

Exercício

- Encontre uma ordenação topológica para os digrafos abaixo.
  - Dica: utilize os graus de entrada dos vértices.





Uma única ordenação

Mais de uma ordenação

Através dos graus de entrada

- Calcular o grau de entrada de todos os vértices.
- Começar com o conjunto de vértices que têm grau de entrada nulo.
- Para cada um desses vértices, dar um numeração baixa, eliminá-los do conjunto e descontá-los nos graus de entrada dos seus sucessores. Se algum desses sucessores passar a ter grau de entrada nulo, incluí-lo no conjunto.
- A execução termina quando esse conjunto se torna vazio.

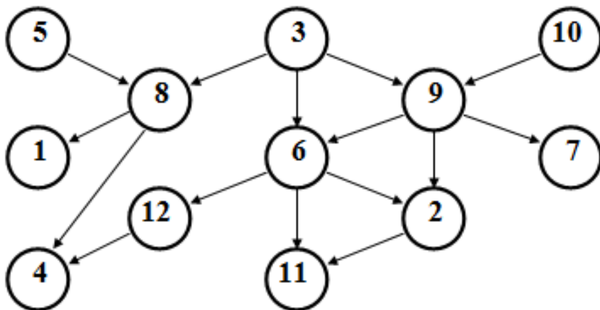
Algoritmo

```
TopSort() {
   counter = 0;
   for v ∈ V
       calcular indegree(v);
   queue q;
   for v ∈ V
       if (indegree(v) == 0) q.enqueue(v);
   while (!q.isEmpty()) {
       v = q.dequeue();
       f[v] = ++counter;
       for <v,w> ∈ E
           if(--indegree(w) == 0) q.enqueue(w);
   }
   if (counter != n) print("Grafo é cíclico");
}
```

- Ao invés de fila, poderia ser utilizada uma pilha?

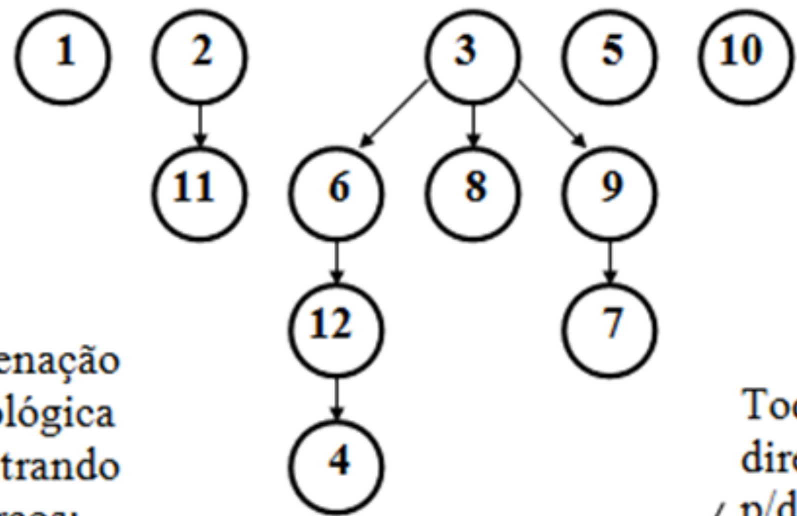
Através da exploração em profundidade

- Considere o DAG abaixo:



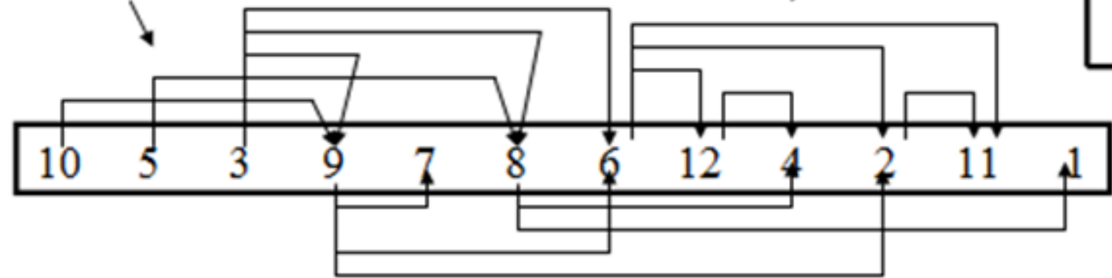
Sequência de término de exploração

10
5
3
9
7
8
6
12
4
2
11
1



Ordenação topológica mostrando os arcos:

Todas as direções p/direita



  - Vamos fazer sua exploração em profundidade dando prioridade aos vértices de menor valor.

Algoritmo

```
OrdemTopol(G) {
   // supõe digrafo acíclico
   int ce = 0;
   int cc = 0;
   for v ∈ V {
      expl[v] = 0;
      comp[v] = 0;
   }
   for v ∈ V
      if (expl[v] == 0)
         DFSOT(v);
   for v ∈ V
      f[v] = n-comp[v]+1;
}
```

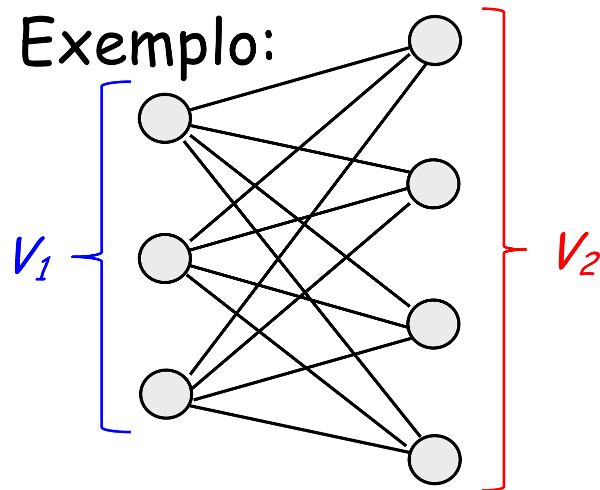
```
DFSOT(v) {
   expl[v] = ++ce;
   for <v,u> ∈ E
      if (expl[u] == 0)
         DFSOT(u);
   comp[v] = ++cc;
}
```

Usando uma pilha, seria possível imprimir os vértices já na ordem topológica. Como?

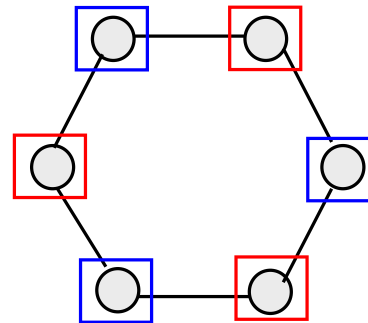
Complexidade de tempo: $\Theta(n+m)$

Grafos bipartidos ou bicoloridos

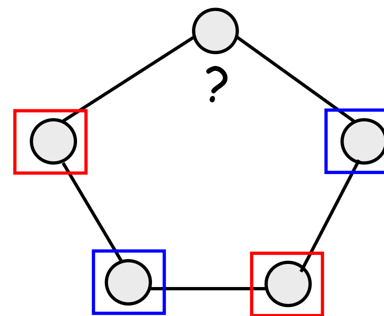
- Um grafo G é <u>bipartido</u> (ou <u>bicolorido</u>) quando seus vértices podem ser particionados em dois subconjuntos V_1 e V_2 tais que qualquer aresta de G possui uma extremidade em V_1 e outra em V_2.
- Exemplo:



$K_{a,b}$: grafo bipartido completo onde $|V_1| = a$ e $|V_2| = b$



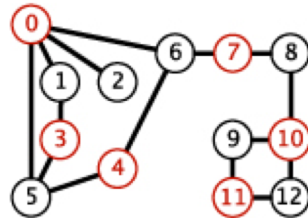
É bipartido?
SIM



É bipartido?
NÃO

Bipartição (ou bicoloração) de vértices

- Um grafo G é bipartido (ou bicolorido) quando existe uma bipartição de seus vértices em subconjuntos disjuntos V_1 e V_2 tais que qualquer aresta de G possui uma extremidade em V_1 e outra em V_2.
- Exemplo:



$V_1 = \{0, 3, 4, 7, 10, 11\}$

$V_2 = \{1, 2, 5, 6, 8, 9, 12\}$

- É possível demonstrar que um grafo admite bipartição se e somente se não tiver ciclos de tamanho ímpar.
- Alguns exemplos de aplicação: otimização do tráfego em redes de comunicação, agendamento de horários ou recursos, detecção de comunidades em redes sociais, otimização em cadeias de suprimentos (melhores parceiros), etc.
- Uma simples variação no algoritmo de exploração em profundidade permite encontrar uma bipartição de um grafo, se existir.
- O algoritmo a seguir produz uma bipartição (atribui "1" ou "2" ao número de exploração de cada vértice) ou informa que o grafo não pode ser bipartido.

Algoritmo

Ambos pseudocódigos retornam 0 se não existir bipartição

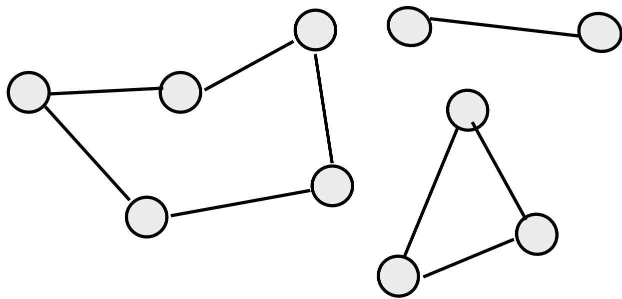
```
TarjanBP(G) {
    for v ∈ V
        expl[v] = 0;
    for v ∈ V
        if (expl[v] == 0)
            if (DFSBP(v,2) == 0)
                return 0;
    return 1;
}
```

```
DFSBP(v,color) {
    c = (color % 2) + 1;
    expl[v] = c; // troca cor
    for <v,u> ∈ E
        if (expl[u] == 0) {
            if (DFSBP(u,c) == 0)
                return 0; }
        else if (expl[u] == c)
                return 0;
    return 1;
}
```

Complexidade de tempo: $\Theta(n+m)$

Componentes conexas

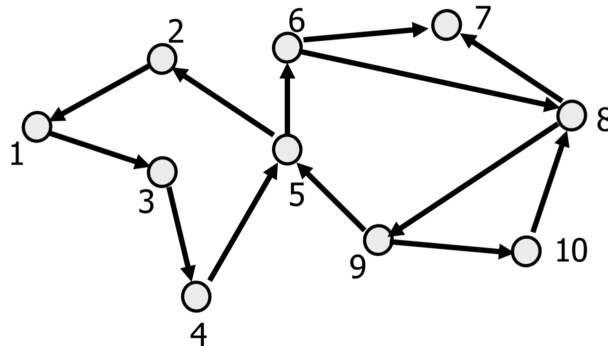
- Em um grafo, dizemos que dois vértices *v* e *u* estão conectados entre si se houver um caminho entre eles.
- Componentes conexas são subconjuntos maximais de vértices conectados entre si.
- Um grafo conexo possui uma única componente conexa, ou seja, todos seus vértices estão conectados entre si.
- Exemplo:



Grafo com 3 componentes conexas

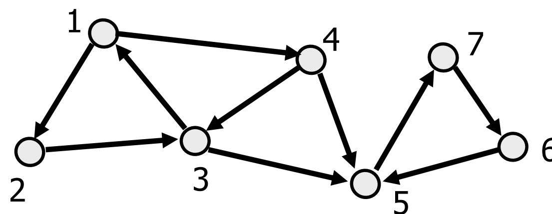
Componentes fortemente conexas

- Em um digrafo, dois vértices v_i e v_j estão conectados entre si se existem caminhos de v_i a v_j e de v_j a v_i. Desse modo, surge analogamente o conceito de <u>componente fortemente conexa</u> (CFC).
- Exemplos:



{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10}

{7}



{1, 2, 3, 4}

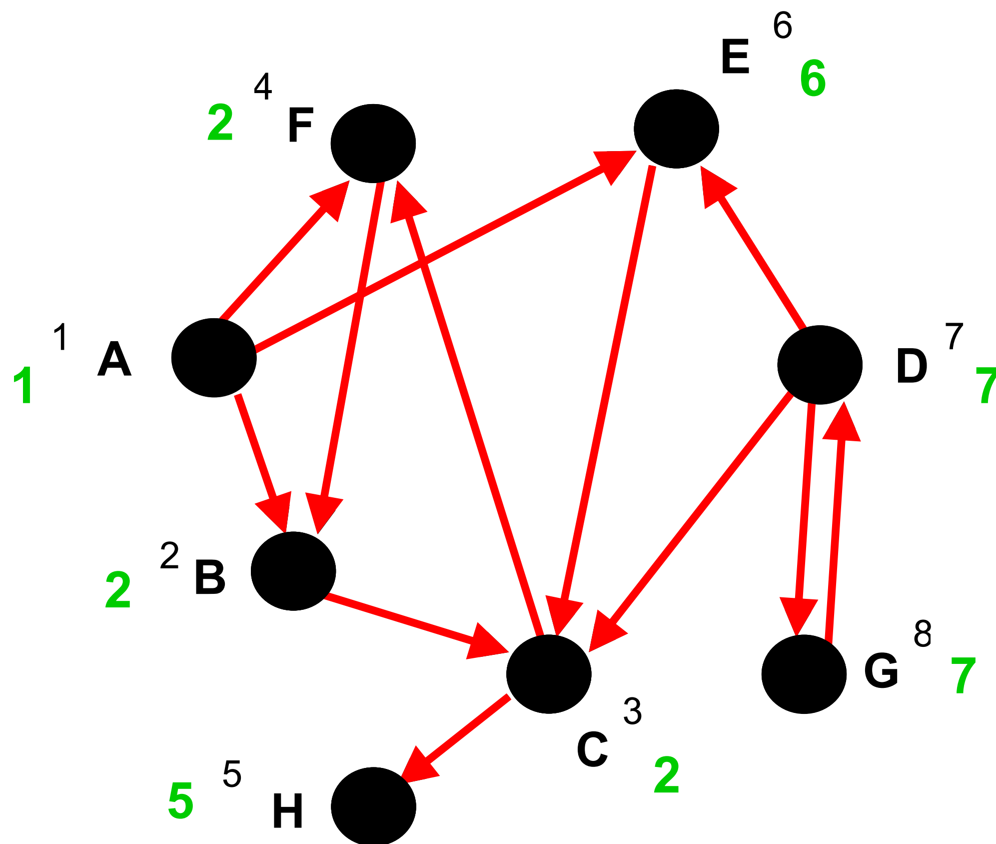
{5, 6, 7}

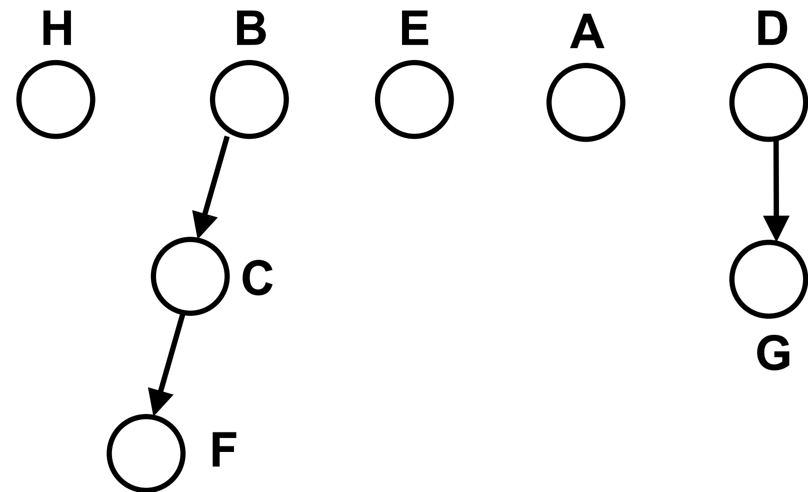
- É possível criar um digrafo acíclico (DAG) considerando cada CFC como um vértice e mantendo os arcos incidentes em CFCs distintas.
- Alguns exemplos de aplicação: possibilitar uma ordenação topológica, paralelização de laços, resolução de conflitos de concorrência, etc.

Componentes fortemente conexas (SCC)

- É possível encontrar as componentes fortemente conexas de um digrafo através de uma variante do algoritmo de Tarjan.
- Ideia:
  - Considere a árvore T de exploração em profundidade e a numeração expl[v] para cada $v \in V$.
  - Os vértices que estão em exploração são empilhados (permanecerão nessa pilha até que seja encontrada a sua componente conexa).
  - Cada vértice v guardará CFC[v], que é o menor número de exploração entre os vértices na pilha que atingir durante sua exploração. Desse modo, ficará automaticamente associado a uma componente conexa.
  - Quando a exploração do vértice v terminar, se expl[v] = CFC[v] então todos os vértices na pilha (desde o topo até v) pertencem a uma mesma componente, e podem ser desempilhados.

Exemplo





- Importante: nem todos os vértices de uma mesma componente terminam com o mesmo valor de CFC.
- Exemplo: acrescente um arco <C,A> nesse mesmo digrafo, e visite <C,F> antes.

Algoritmo

```
TarjanCFC(G) {
   stack P;
   int ce = 0;
   for v ∈ V
      expl[v] = 0;
   for v ∈ V
      if (expl[v] == 0)
          DFSCFC(v);
}
```

```
DFSCFC(v) {
    expl[v] = ++ce;
    push(P,v);
    CFC[v] = expl[v];
    for <v,u> ∈ E
       if (expl[u] == 0) {
          DFSCFC(u);
          CFC[v] = min{CFC[v],CFC[u]};
       }
       else if (u ∈ P)
               CFC[v] = min{CFC[v],expl[u]};
    if (CFC[v] == expl[v])
     do {
          x = top(P);
          pop(P);
     } while (x != v);
}
```

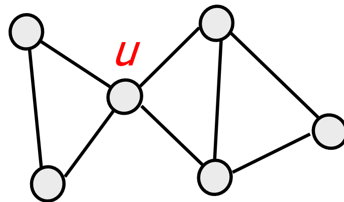
Arco de árvore

Teste em tempo constante com vetor de *flags*

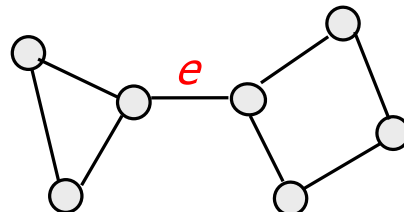
Complexidade de tempo: $\Theta(n+m)$

Vértices e arestas de corte

- Em um grafo G, $u \in V$ é chamado de <u>vértice de corte</u> (ou <u>ponto de articulação</u>) se a sua remoção desconecta G.
- Exemplo:



- Se uma componente conexa de um grafo não possui vértices de corte, ela é chamada de <u>componente biconexa</u>.
- Analogamente, uma aresta e, cuja remoção ocasiona a desconexão do grafo, recebe o nome de <u>ponte</u> (ou <u>aresta de corte</u>).
- Exemplo:



- A aplicação mais evidente deste algoritmo é detectar vulnerabilidades em redes de transmissão.

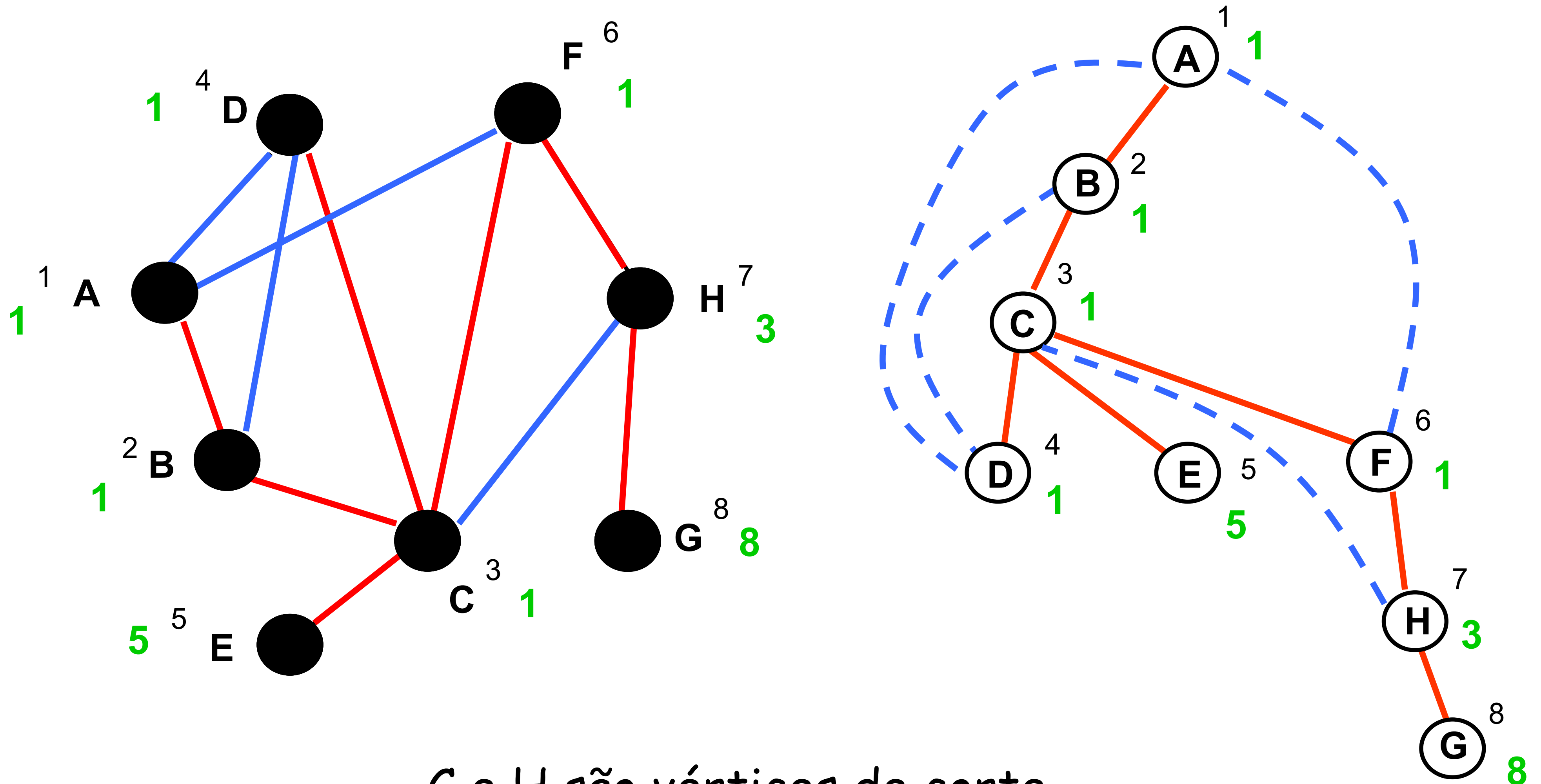
Vértices de corte

- Uma variante do algoritmo de Tarjan pode encontrar os vértices de corte (ou pontos de articulação) de um grafo G=(V,E) *conexo não-orientado, sem laços ou arestas repetidas.*

Desse modo, se fizéssemos uma exploração em profundidade a partir de cada vértice do grafo, poderíamos identificar todos os vértices de corte (no entanto, há outra solução mais eficiente)

- Ideia:
  - Considere a árvore T de exploração em profundidade e a numeração expl[v] para cada $v \in V$.
  - **Raiz:** será vértice de corte se tiver pelo menos dois filhos em T.
  - **Demais vértices**:
    - v será vértice de corte se tiver algum filho sem retorno para nenhum dos ancestrais de v.
    - É calculado m[v] = mín{ expl[v], expl[x] }, onde x é um vértice que v (ou um de seus descendentes) atinge em T através de uma *única aresta de retorno.*
    - Portanto, v será vértice de corte se tiver algum filho u tal que m[u] ≥ expl[v].

Exemplo



C e H são vértices de corte

Algoritmo

```
TarjanVC(r) {
   // válido se for conexo e
   // não tiver laços ou
   // arestas repetidas
   int ce = 0;
   for v ∈ V {
      expl[v] = 0;
      pai[v] = null;
      nfilhos[v] = 0;
      VC[v] = false;
   }
   DFSVC(r);
   for v ∈ V-{r} {
      p = pai[v];
      VC[p] = VC[p] || (m[v]>=expl[p]);
   }
   VC[r] = (nfilhos[r] > 1);
   for v ∈ V
      if (VC[v]) v é vértice de corte;
}
```

```
DFSVC(v) {
   expl[v] = ++ce;
   m[v] = expl[v];
   for <v,u> ∈ E
     if (expl[u] == 0) {
       pai[u] = v;
       nfilhos[v]++;
       DFSVC(u);
       m[v] = min{m[v],m[u]};
     }
     else // arestas de retorno
      if(u != pai[v])
       m[v] = min{m[v],expl[u]};
}
```

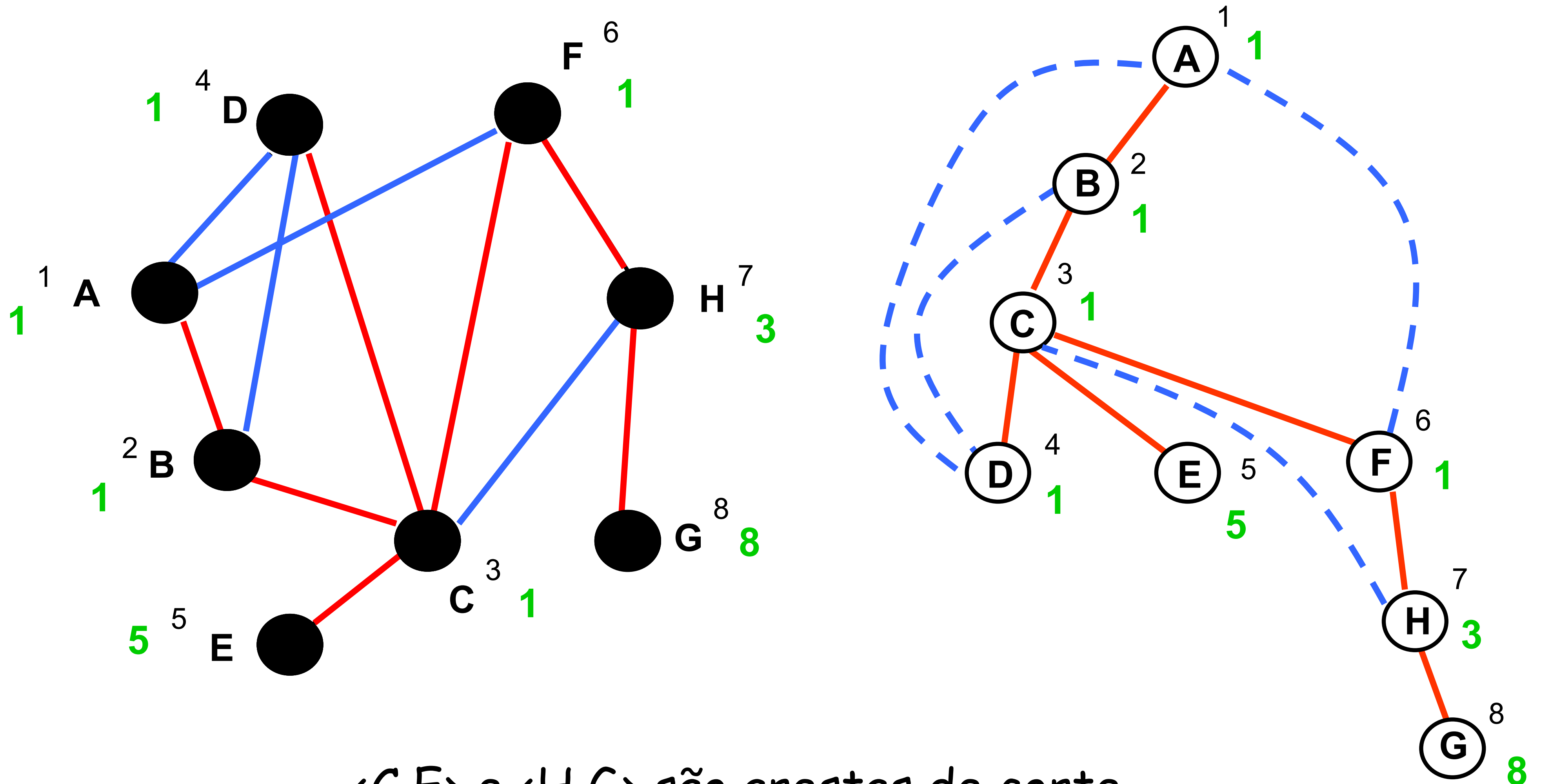
Trata as arestas de retorno, tanto na ida como na volta

Complexidade de tempo: $\Theta(n+m)$

Arestas de corte

- A identificação das arestas de corte (ou pontes) é realizada de maneira semelhante:
  - Encontrar uma árvore de exploração T, calculando as mesmas numerações expl e m para os vértices.
  - É fácil constatar que nenhuma aresta de retorno dessa exploração pode ser de corte.
  - Uma aresta $\langle v,u \rangle \in T$ será de corte se $m[u] = expl[u]$.

No exemplo anterior



<C,E> e <H,G> são arestas de corte

Algoritmo

```
TarjanAC(r) {
  // válido se for conexo e
  // não tiver laços ou
  // arestas repetidas
  int ce = 0;
  for v ∈ V {
     expl[v] = 0;
     pai[v] = null;
  }
  DFSAC(r);
}
```

```
DFSAC(v) {
   expl[v] = ++ce;
   m[v] = expl[v];
   for <v,u> ∈ E
     if (expl[u] == 0) {
        pai[u] = v;
        DFSAC(u);
        m[v] = min{m[v],m[u]};
        if (m[u] == expl[u])
             <v,u> é aresta de corte;
     }
     else // arestas de retorno
      if(u != pai[v])
        m[v] = min{m[v],expl[u]};
}
```

Complexidade de tempo: $\Theta(n+m)$