CTC-12

Projeto e Análise de Algoritmos

Carlos Alberto Alonso Sanches

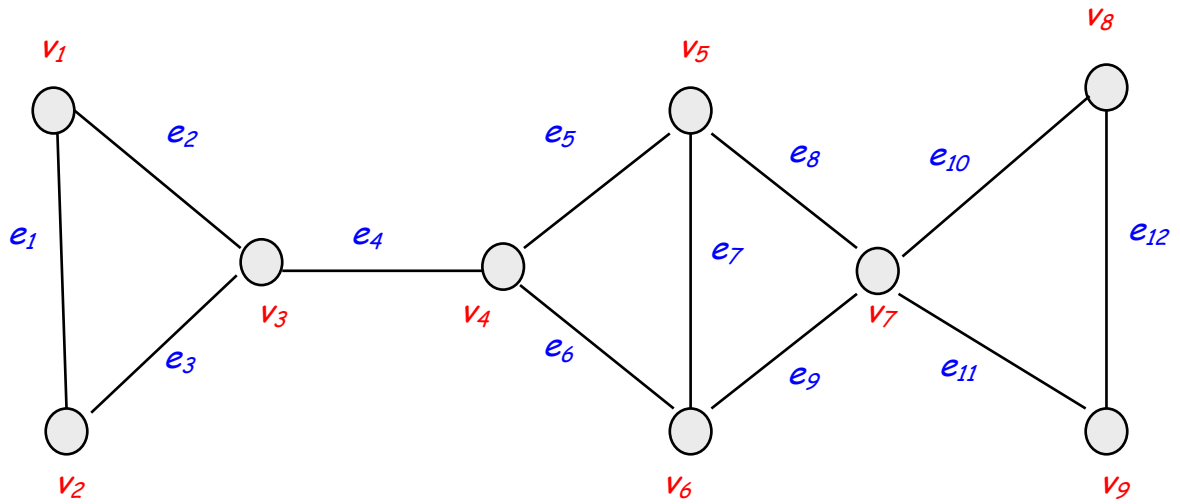
CTC-12

7) Algoritmos em grafos

Explorações sistemáticas, Dijkstra, fluxo máximo

Definição

- Um grafo G=(V,E) é formado pelos vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e pelas arestas $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
- Consideraremos sempre que $|V| = n$ e $|E| = m$.
- Um exemplo:



$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ $n = 9$

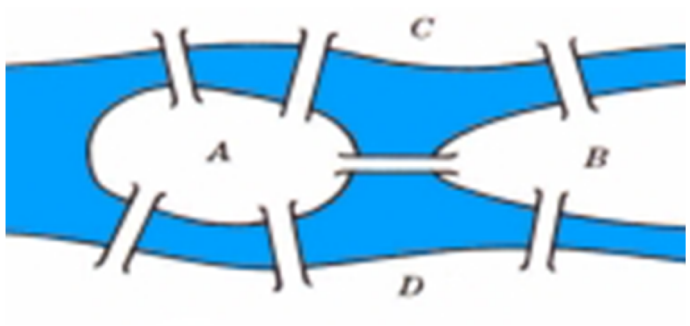
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$ $m = 12$

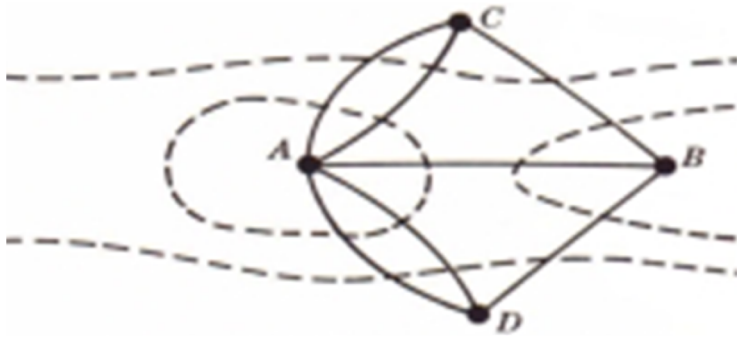
Arestas e vértices

- Uma aresta $e \in E$ é um par não-ordenado (u,v), onde $u,v \in V$.
- Neste caso, dizemos que os vértices u e v são adjacentes entre si, e que a aresta e é incidente em u e em v.
- Uma aresta $e = (u,v)$ é chamada de laço quando $u = v$.
- $d(u)$ é o grau do vértice u, isto é, o número de incidências em u.
- É fácil observar que $\Sigma_{u \in V} d(u) = 2m$

Origem histórica

- Na cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), havia sete pontes sobre o rio Pregel:





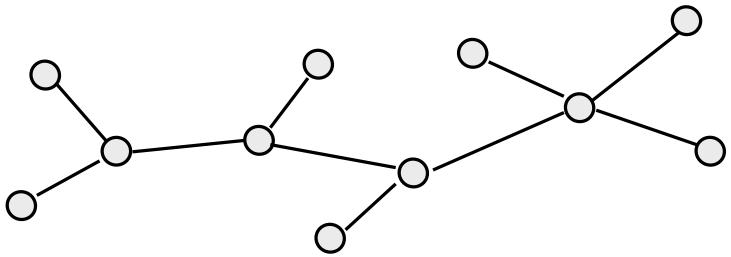
- Será possível fazer um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo local, e passando uma única vez em cada ponte?
- Euler (1736) afirmou que um grafo conexo tem esse passeio se e somente se cada um dos seus vértices tem grau par.
- Todo grafo com essa propriedade é chamado de *euleriano*.

Sequências de vértices

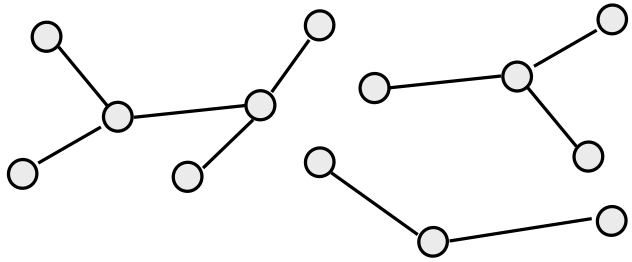
- Caminho é uma sequência alternada de vértices e arestas, onde cada aresta é incidente tanto ao vértice que a antecede como ao que a segue.
- Caminho simples é um caminho no qual cada vértice aparece uma única vez.
- Comprimento de um caminho é o seu número de arestas.
- Ciclo ou circuito é um caminho que começa e termina no mesmo vértice.

Grafos conexos, árvores e florestas

- Um grafo é conexo se existir um caminho entre qualquer par de vértices, e desconexo em caso contrário.
- Árvore é um grafo conexo sem ciclos.
- Exemplo:

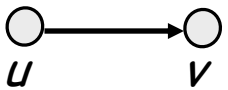


- Floresta é um grafo formado por diversas árvores.
- Exemplo:



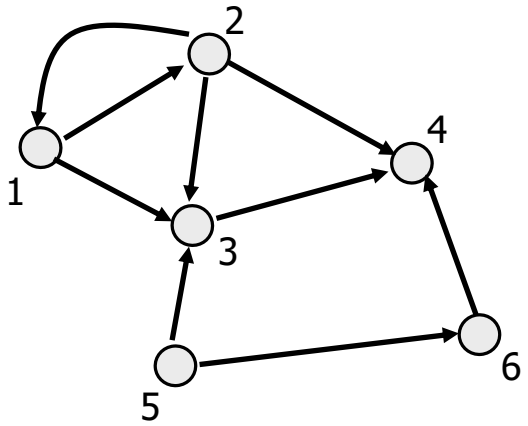
Digrafos ou grafos orientados

- Digrafos são grafos orientados, isto é, suas arestas possuem direção e são chamadas de arcos.
- Em um digrafo $G=(V,E)$, um arco $e \in E$ é um par ordenado (u,v), onde $u,v \in V$.



- v é sucessor de u
- u é predecessor de v

- Cada vértice v tem um grau de saída $d^+(v)$ e um grau de entrada $d^-(v)$, que correspondem respectivamente ao total de arcos que saem ou chegam em v.
- Exemplo:



$d^+(4) = 0$

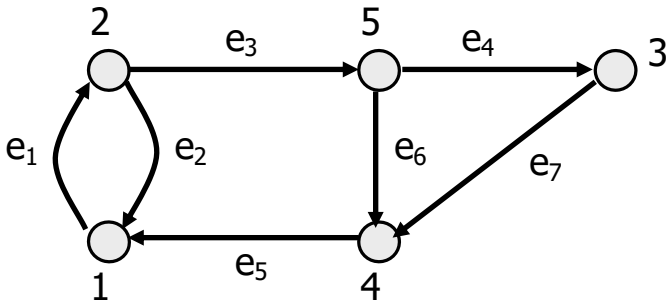
$d^-(4) = 3$

$d^+(6) = 1$

$d^-(1) = 1$

Sequências de arcos

- Caminho é uma sequência de arcos $e_1, e_2, \ldots, e_q$ tal que a extremidade inicial de e_i coincide com a final de e_{i-1}, $1 < i \leq q$.
- Ciclo ou circuito é um caminho que começa e termina no mesmo vértice.
- Exemplo:



e_3, e_4, e_7, e_5: caminho entre os vértices 2 e 1

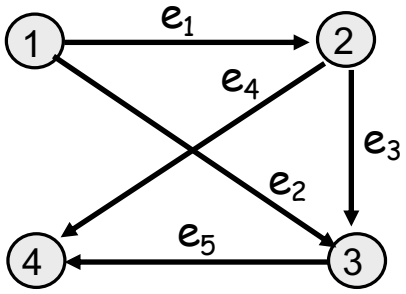
e_3, e_6, e_5, e_1: ciclo ou circuito

Representações de grafos

- Há algumas estruturas de dados apropriadas para representar grafos.
- Principais representações:
  - Matriz de incidências
  - Matriz de adjacências
  - Lista de adjacências
    - Com ponteiros
    - Com vetores
  - Lista de arcos

Matriz de incidências

- Matriz de incidências é formada por n linhas (uma para cada vértice) e m colunas (uma para cada aresta ou arco).
- A posição a_{ij} dessa matriz indica se a aresta ou o arco e_j incide sobre o vértice v_i.
- Exemplo:



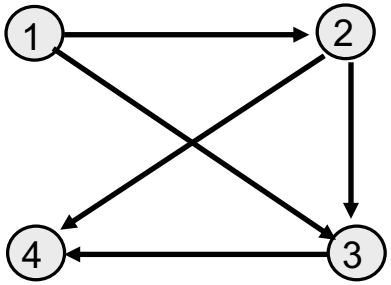
$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Grafo não dirigido: haveria somente valores 1 na matriz

Tamanho da estrutura: $\Theta(n.m)$

Matriz de adjacências

- Matriz de adjacências é formada por n linhas e n colunas.
- A posição a_{ij} dessa matriz indica se o vértice v_j é sucessor ou não do vértice v_i.
- Exemplo:



$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

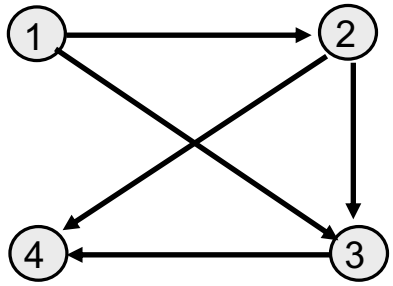
Grafo não dirigido: a matriz seria simétrica

Tamanho da estrutura: $\Theta(n^2)$

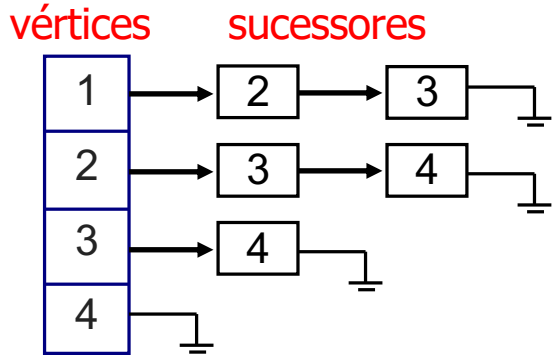
Útil quando grafo é denso: $m \sim n^2$

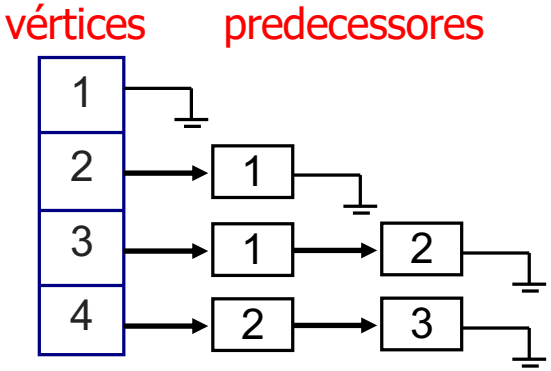
Lista de adjacências

- Lista de adjacências é formada por um vetor de *n* ponteiros, onde cada vértice aponta para seus sucessores ou predecessores.
- Exemplo:



Grafo não dirigido: haveria o dobro de nós



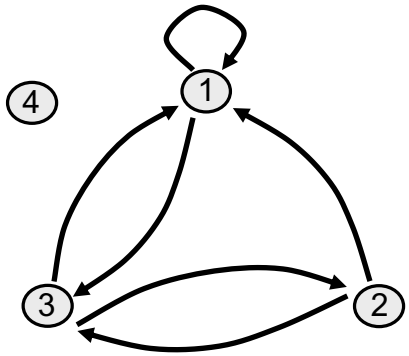


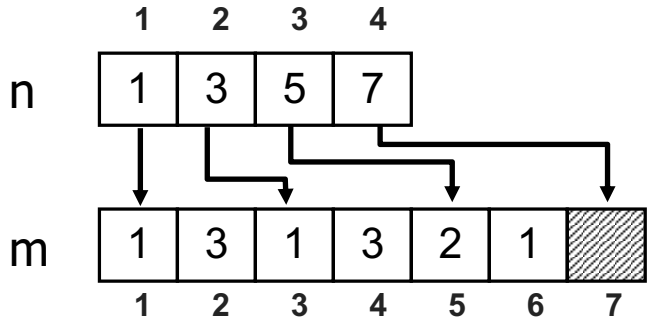
Tamanho da estrutura: $\Theta(n+m)$

Útil quando grafo é esparso: $m << n^2$

Representações alternativas

- Lista de adjacências através de vetores

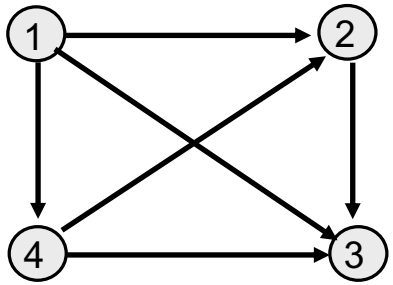




Grafo não dirigido:
o segundo vetor teria
o dobro do tamanho

Tamanho da estrutura: Θ(n+m)

- Lista de arcos



S(.)	1	1	1	2	4	4
T(.)	2	3	4	3	2	3

Grafo não dirigido:
mesma estrutura

Tamanho da estrutura: Θ(m)

Representação mais adequada

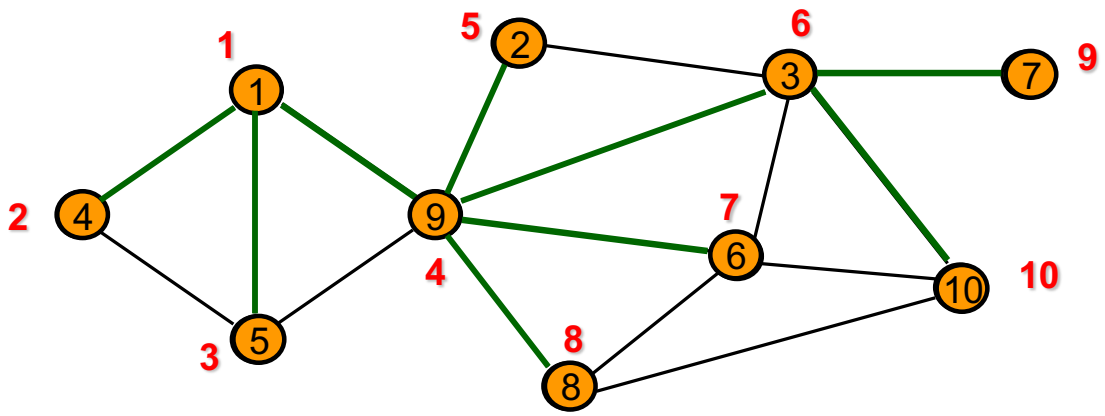
- Alguns critérios para se escolher a melhor representação:
  - Espaço de armazenamento (depende do tamanho do grafo)
  - Teste de pertinência de uma aresta (matriz)
  - Verificação do grau de um vértice (lista)
  - Inserção ou remoção de uma aresta (matriz)
  - Percurso no grafo (lista)
- Geralmente, a lista de adjacências costuma ser mais vantajosa.

Exploração sistemática de um grafo

- Explorar um grafo é percorrê-lo completamente, visitando todos os vértices e as arestas.
- A ordem dessas visitas depende:
  - do vértice onde a exploração começa;
  - da ordem de armazenamento dos vértices e das arestas na estrutura de dados;
  - do tipo de exploração: em largura ou em profundidade.

Em largura (*breadth-first search*)

- Tática: enquanto for possível, examinar todos os vértices à mesma distância do vértice corrente; quando não for mais possível, aprofundar.
- Exemplo (supomos armazenamento em ordem crescente):



- Uma aplicação: a exploração em largura permite encontrar, por exemplo, as distâncias e os menores caminhos entre os vértices.

Exploração em largura

```
BFS(s) {
    desmarcar todos os vértices;
    int cont = 0;
    queue q;
    marcar s;
    expl[s] = ++cont;
    enqueue(q,s);
    while (!isEmpty(q)) {
          curr = dequeue(q);
          // explorando curr
          for <curr,v> ∈ E {
              if v está desmarcado {
                 marcar v;
                 expl[v] = ++cont;
                 enqueue(q,v);
              }
          }
    }
}
```

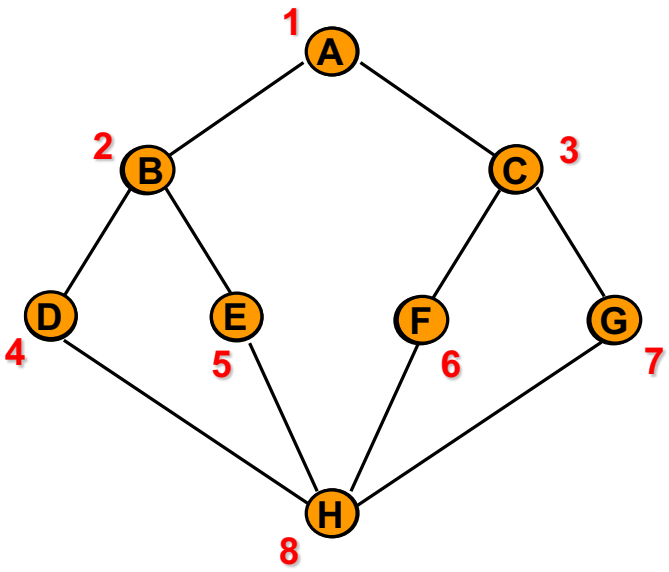
Código aplicável a grafos não orientados e conexos

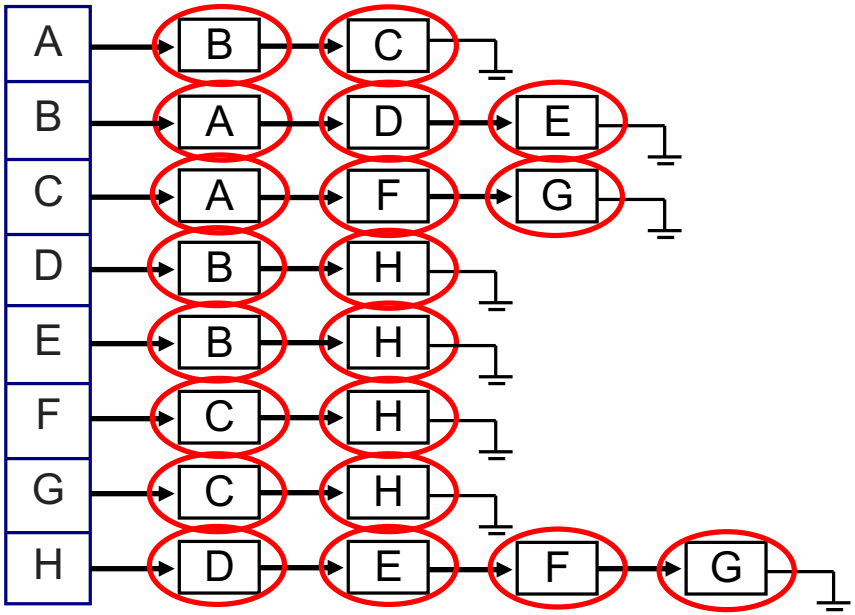
Cada vértice recebe um número de exploração (equivalente a marcá-lo)

Exploração em largura

- Durante a execução deste algoritmo, cada vértice pode ficar em três estados:
  - desmarcado (portanto, fora da fila): ainda não foi atingido;
  - marcado e na fila: atingido, mas não completamente explorado;
  - marcado e fora da fila: já explorado.
- Cada vértice entra na fila uma única vez, e cada aresta é visitada duas vezes. Portanto, sua complexidade de tempo é $\Theta(n+m)$.

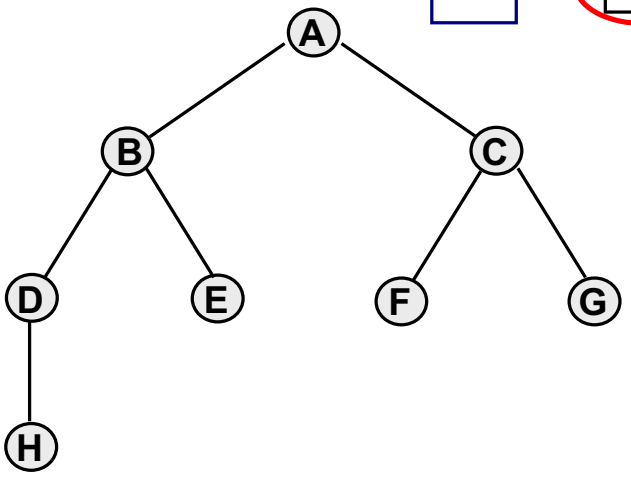
Exemplo





não visitado

visitado



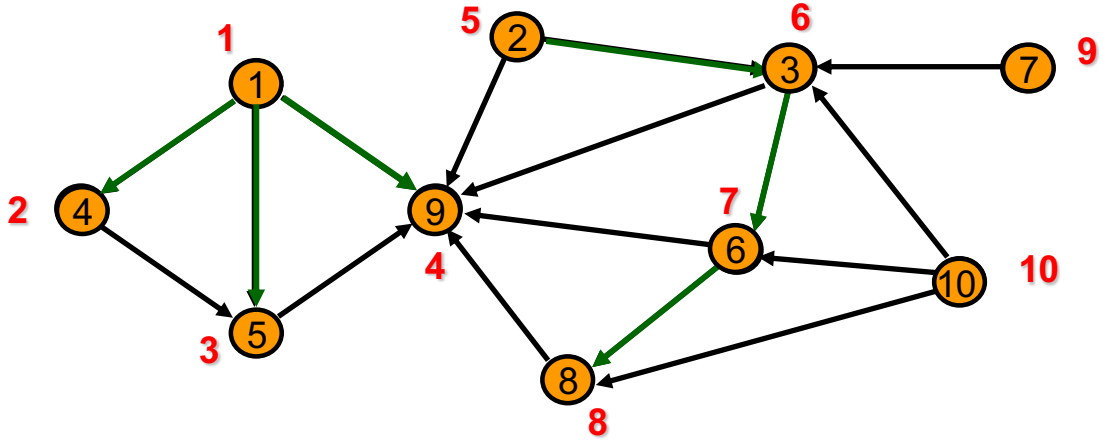
Árvore de exploração em largura

Exploração em largura (digrafos)

```
int cont;
queue q;

TravessiaBFS(s) {
    desmarcar todos os vértices;
    cont = 0;
    BFS(s);
    for v ∈ V {
        if v está desmarcado
            BFS(v);
    }
}
```

Código adicional



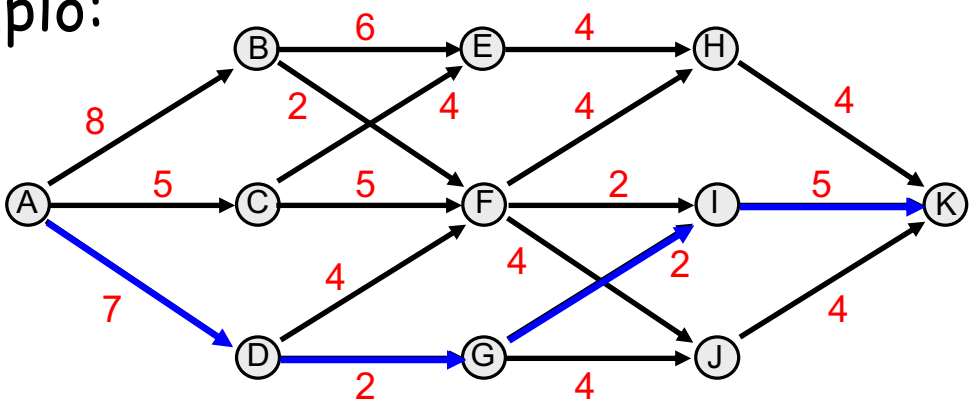

```
BFS(v) {
    marcar v;
    expl[v] = ++cont;
    enqueue(q,v);
    while (!isEmpty(q)) {
        curr = dequeue(q);
        // explorando curr
        for <curr,u> ∈ E {
            if u está desmarcado {
                marcar u;
                expl[u] = ++cont;
                enqueue(q,u);
            }
        }
    }
}
```

Tempo: $\Theta(n+m)$

Solução análoga para grafos desconexos

Caminhos mais curtos

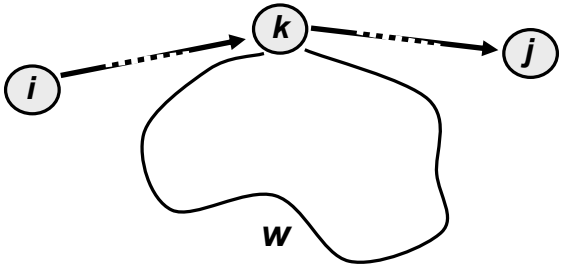
- Um digrafo (ou grafo) $G=(V,E)$, onde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, é chamado de ponderado se cada arco (ou aresta) $(v_i, v_j) \in E$ tem custo c_{ij}.
- Distância entre dois vértices é a somatória dos custos dos arcos (ou arestas) de um caminho que os une.
- Um problema clássico é encontrar o caminho mais curto ou a distância mínima entre dois vértices.
- Exemplo:



Distância mínima entre A e K:
7+2+2+5 = 16

Uma condição de existência

- Considere o caminho abaixo entre *i* e *j*, e o ciclo *w*:



- Se o comprimento de *w* for negativo, qual seria a distância mínima entre *i* e *j*?
- Uma condição de existência para o caminho mais curto é que seja elementar, isto é, sem ciclos em seu interior.

Arcos (ou arestas) de mesmo peso

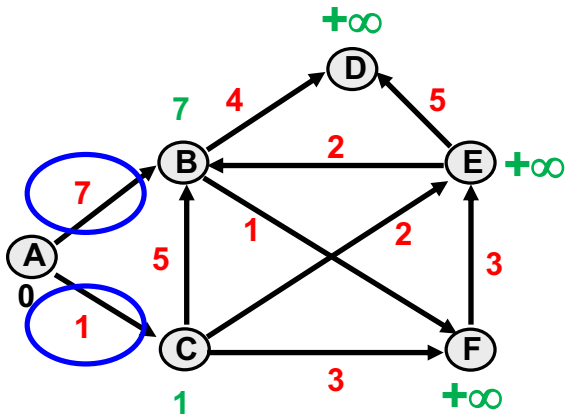
- Quando todas os arcos (ou arestas) têm pesos iguais, basta uma simples alteração na *exploração em largura*.
- Afinal, os vértices vão sendo enfileirados seguindo a ordem de proximidade: portanto, basta incrementar a distância do vértice antecessor.
- O algoritmo de Dijkstra generaliza essa ideia.

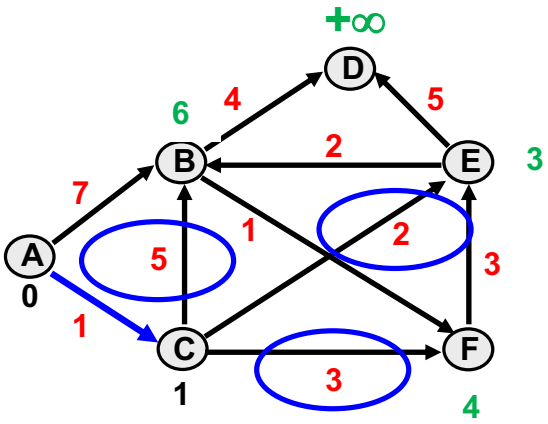
```
BFSMinCam(r) {
    queue q;
    int ce = 0;
    for v ∈ V - {r} {
        d[v] = +∞;
        expl[v] = 0;
    }
    expl[r] = ++ce;
    d[r] = 0;
    enqueue(q,r);
    while (!isEmpty(q)) {
        u = dequeue(q);
        for <u,v> ∈ E {
            if (expl[v] == 0) {
                expl[v] = ++ce;
                d[v] = d[u] + 1;
                enqueue(q,v);
            }
        }
    }
}
```

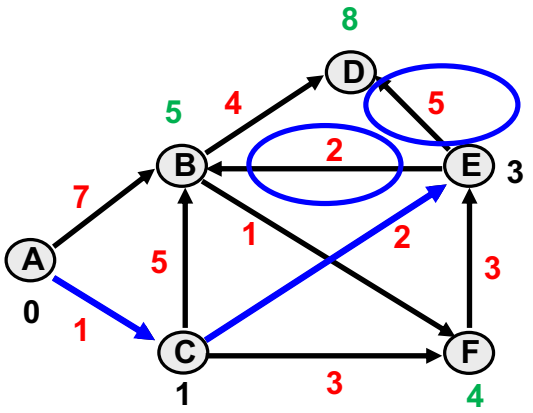
Exemplo do algoritmo de Dijkstra

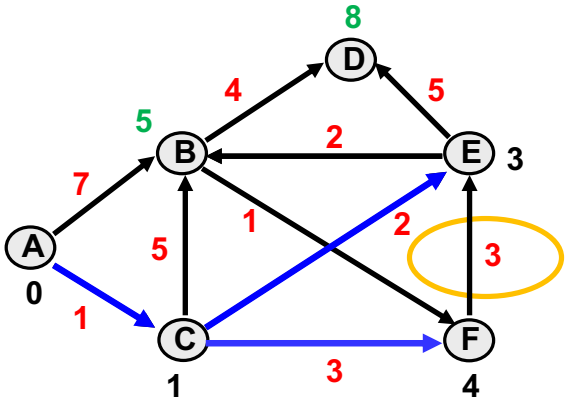
Pesos dos arcos, distâncias provisórias, distâncias definitivas

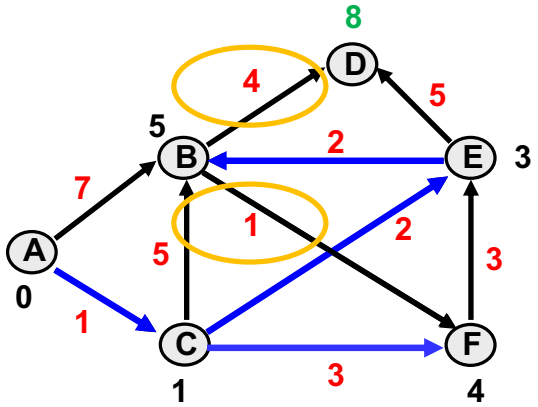
Os arcos indicados são os últimos que atualizaram a distância

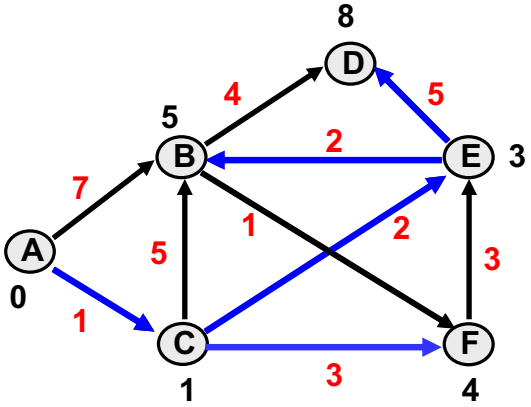












Algoritmo de Dijkstra (1959)

```
Dijkstra(u) {
    d[u] = 0;          // vértice inicial u: distância nula
    for v ∈ V − {u}
        d[v] = +∞; // demais vértices: distância +∞
    S ← V;             // S: vértices com distância provisória
    while S ≠ ∅ {
        selecionar j tal que d[j] == min_{i∈S}{d[i]};
        S ← S − {j};  // j passa a ter distância definitiva
        for <j,w> ∈ E, onde w ∈ S
            if (d[w] > d[j] + c_jw) {
                d[w] = d[j] + c_jw;
                pred[w] = j;
            }
}
```

Predecessor: permite reconstruir o caminho mínimo entre u e w

Assemelha-se a uma exploração em largura

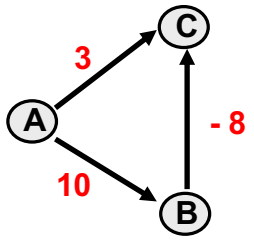
Encontra todos os caminhos mínimos a partir do vértice u

Complexidade de tempo

- *Grosso modo*, o algoritmo de Dijkstra gasta tempo de pior caso $\Theta(n^2+m) = \Theta(n^2)$.
- No entanto é possível melhorar essa complexidade de tempo se o conjunto S for implementado com um *heap* de mínimo.
- Nesse caso, passaria a ser $\Theta((n+m).\log n)$:
  - O *heap* possuirá inicialmente n elementos.
  - No total, são realizadas n extrações de mínimo e até m modificações de valor (será preciso manter um vetor auxiliar que armazena a posição corrente que cada vértice ocupa no *heap*).

Arcos (ou arestas) com custos negativos

- No digrafo abaixo, qual a distância mínima entre os vértices *A* e *C*?



- O algoritmo de Dijkstra daria como resposta 3, mas o valor correto é 2... Por que isso acontece?
- No processo de construção do caminho mínimo, o algoritmo de Dijkstra *supõe que o custo acumulado sempre cresce*. Isso não ocorre se admitirmos arcos (ou arestas) com custos negativos...
- Em um algoritmo mais geral, cada vez que se altera a distância até um vértice, também deve ser recalculada a distância até todos os seus adjacentes.

Algoritmo de Dijkstra modificado

```
Dijkstra2(u) {
    for v ∈ V − {u}
        d[v] = +∞;
    d[u] = 0;
    S ← {u};
    while S ≠ ∅ {
        selecionar j ∈ S;
        S ← S − {j};
        for <j,w> ∈ E
            if (d[w] > d[j] + c_jw) {
                d[w] = d[j] + c_jw;
                pred[w] = j;
                S ← S ∪ {w};    // w volta para S
            }
}
```

- Com uma estrutura adequada para S, a complexidade de tempo desse algoritmo pode ser o(n.m).

Fluxo máximo

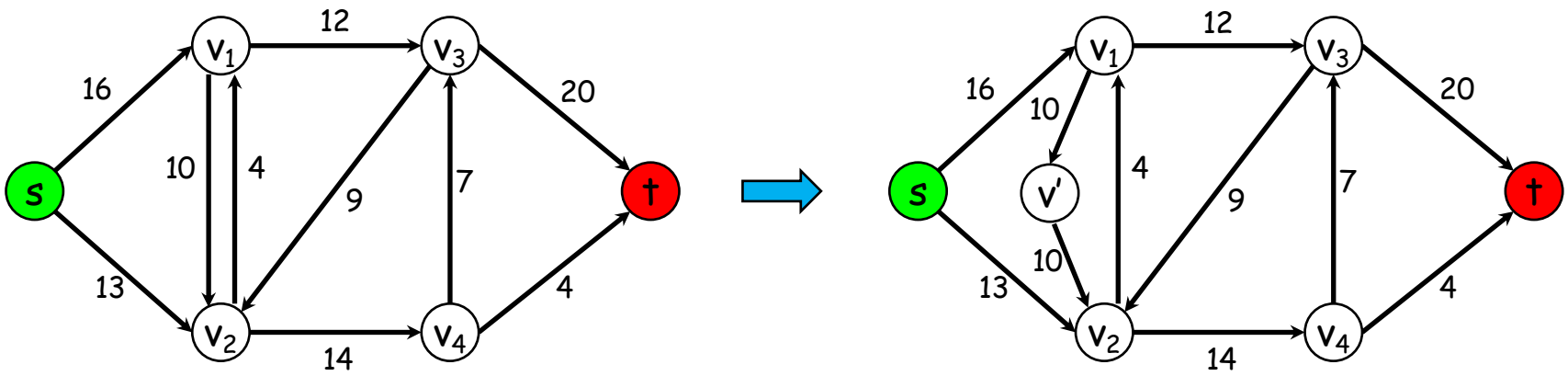
- Podemos interpretar um digrafo como uma rede de fluxo de algum material, com uma fonte, um sorvedouro e vértices intermediários. Cada arco corresponde a um duto com uma capacidade máxima de transmissão.
- Exemplos de aplicação: fabricação e entrega de algum produto, escoamento de líquidos, peças em linhas de montagem, redes de intercomunicação, etc.
- Considerando conservação de fluxo (ou seja, as taxas de entrada e de saída em cada vértice devem ser iguais), deseja-se encontrar a maior taxa de transmissão desde a fonte até o sorvedouro.

Digrafo da rede de fluxo

- Uma rede de fluxo é um digrafo $G(V,E)$ onde:
  1) Cada arco $(u,v) \in E$ tem capacidade $c(u,v) \geq 0$
  2) $(u,v) \notin E \Rightarrow c(u,v) = 0$
  3) Não há laços: $(v,v) \notin E$
  4) Não há arcos antiparalelos: $(u,v) \in E \Rightarrow (v,u) \notin E$
  5) Há somente um vértice fonte s e um vértice sorvedouro t
  6) Todo vértice encontra-se em algum caminho entre s e t
  7) Com exceção de s, todo vértice possui pelo menos um arco de entrada (portanto, $m \geq n-1$)
- Caso seja necessário, as restrições (4) e (5) podem ser contornadas através de redes equivalentes, como veremos a seguir.

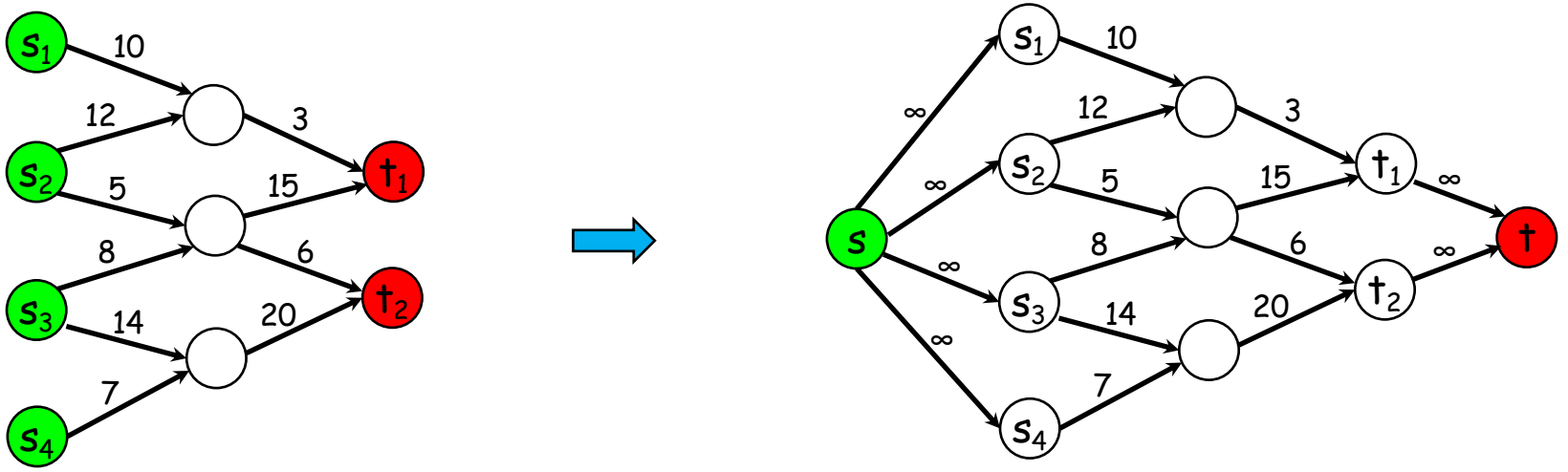
Redes com arcos antiparalelos

- Uma rede com arcos antiparalelos pode ser transformada em uma rede equivalente sem esses arcos.
- Exemplo:



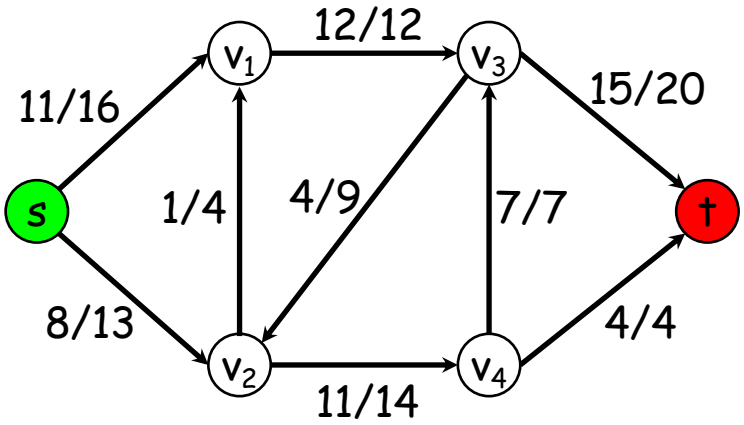
Redes com várias fontes ou sorvedouros

- Uma rede com várias fontes ou sorvedouros também pode ser transformada em uma rede equivalente com uma única superfonte e um único supersorvedouro.
- Exemplo:



Fluxos no digrafo

- Um fluxo em $G(V,E)$ é uma função $f: V \times V \rightarrow R$ tal que:
  - $0 \leq f(u,v) \leq c(u,v)$ para $u,v \in V$: fluxos não ultrapassam as capacidades
  - $(u,v) \notin E \Rightarrow f(u,v) = 0$: se não houver arco, fluxo será nulo
  - $u \in V-\{s,t\} \Rightarrow \Sigma_{v \in V} f(u,v) = \Sigma_{v \in V} f(v,u)$: conservação de fluxo
  - $\Sigma_{v \in V} f(v,s) = 0$: não há fluxo de entrada
  - $|f| = \Sigma_{v \in V} f(s,v)$: fluxo da rede
- Exemplo de rede com fluxo $|f| = 19$:

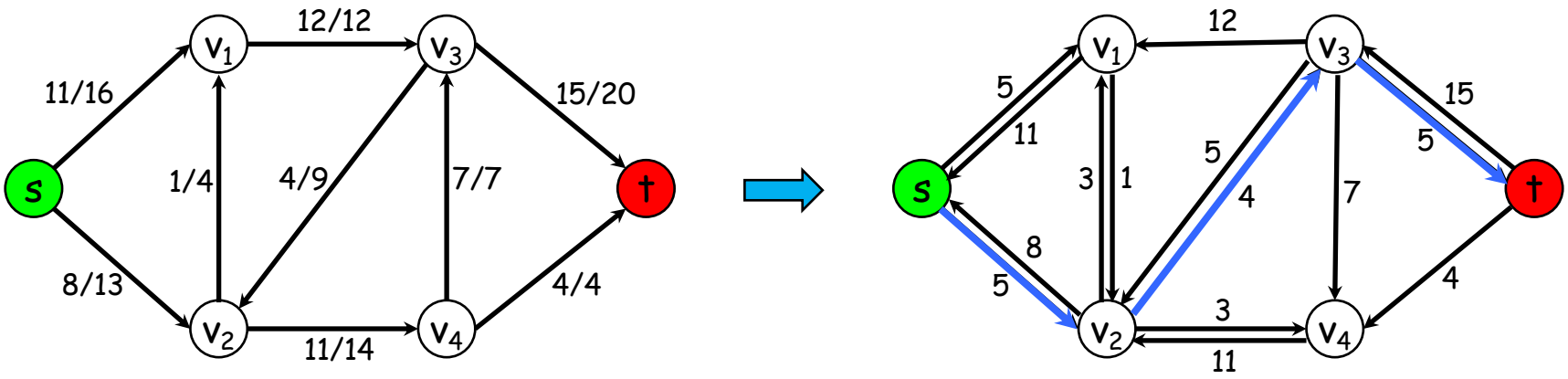


Notação no arco (u,v):

$f(u,v)/c(u,v)$

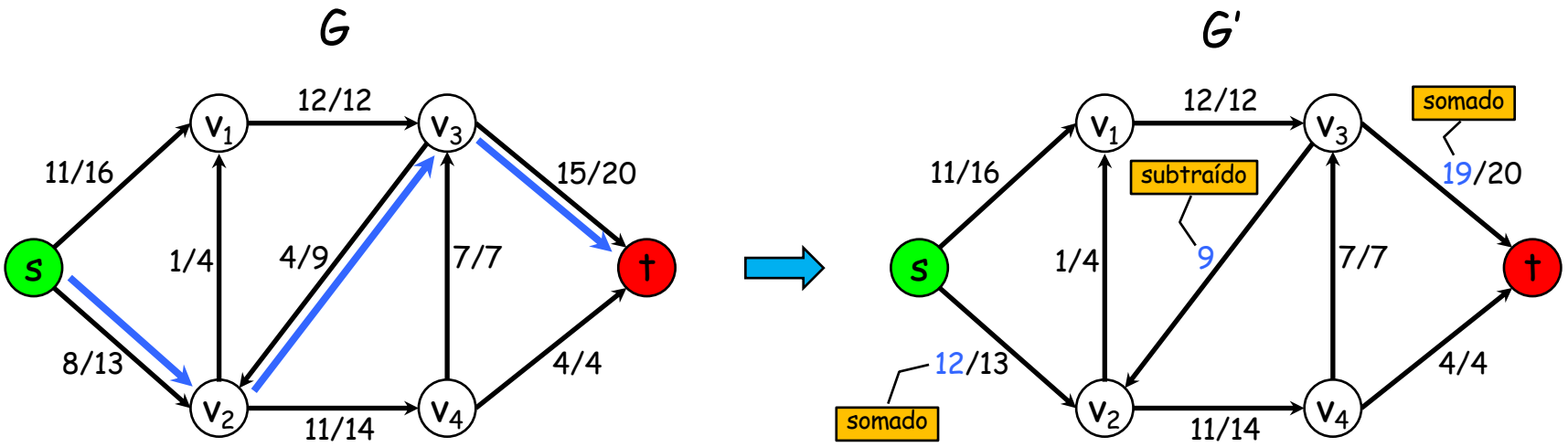
Redes residuais

- Dada uma rede G(V,E) com um fluxo f, sua *rede residual* é composta de arcos com capacidades que indicam como esse fluxo pode ser alterado:
  - Se $(u,v) \in E$, $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$: é a capacidade residual
  - Se $(u,v) \notin E$, $c_f(u,v) = f(v,u)$: fluxo pode mudar de direção
  - Nos demais casos, $c_f(u,v) = 0$
- $G_f(V,E_f)$ é a rede residual de G, onde $E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$. É uma rede de fluxo com eventuais arcos antiparalelos, ou seja, $|E_f| \leq 2m$.
- Exemplo: G G_f



Caminhos aumentadores

- Dada uma rede G(V,E) com um fluxo f, um *caminho aumentador* p é um caminho simples de s a t em G_f.
- Dado um caminho aumentador p em G_f e a sua capacidade residual $c_f(p) = \text{mín}\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in p\}$, é possível obter um aumento de $c_f(p)$ no fluxo f.
- Considere o exemplo anterior, onde $c_f(p) = 4$:



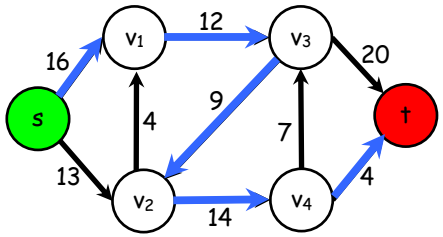
- O fluxo de G' tem valor $|f| + c_f(p) = 19 + 4 = 23$.

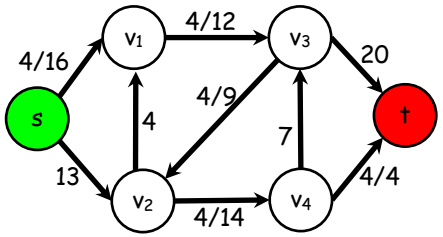
Algoritmo de Ford-Fulkerson (1962)

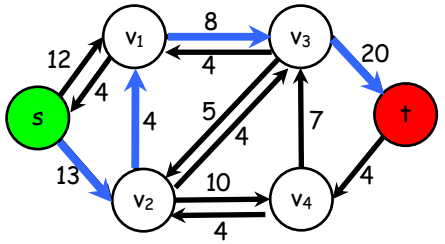
```
Ford-Fulkerson(G,s,t) {
    f(u,v) = 0, onde u,v ∈ V;
    while (existir caminho aumentador p de s a t em G_f){
        c_f(p) = mín {c_f(u,v) | <u,v> ∈ p};
        for <u,v> ∈ p
                if <u,v> ∈ E
                        f(u,v) = f(u,v) + c_f(p);
                else
                        f(v,u) = f(v,u) - c_f(p);
    }
}
```

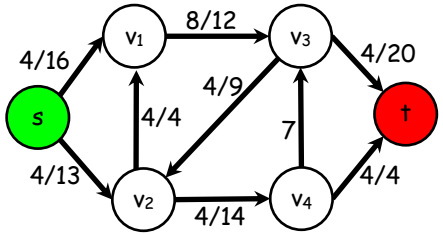
- Se as capacidades dos arcos tiverem valores irracionais, esse algoritmo pode não terminar...
- Supondo capacidades racionais, uma mudança de escala pode transformá-las em valores inteiros. Se f* for um fluxo máximo nessa rede transformada, então o laço **`while`** será executado no máximo |f*| vezes.
- Como o número de arcos de G_f é no máximo 2m, um caminho aumentador pode ser encontrado em tempo $O(n+m)=O(m)$ através de uma exploração em largura. Este é também o tempo da atualização posterior da rede de fluxo. Portanto, o tempo total é $O(m.|f^*|)$.

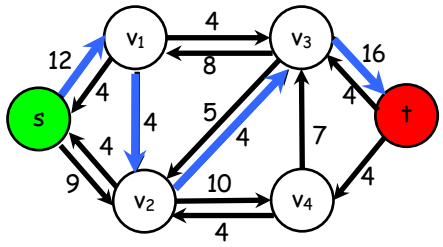
Exemplo

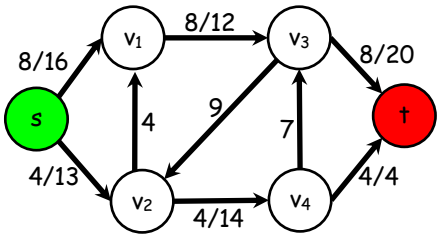


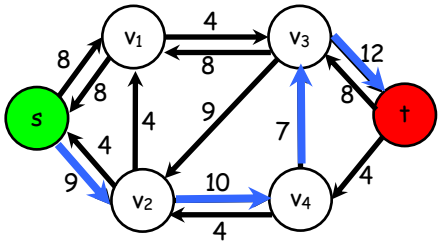


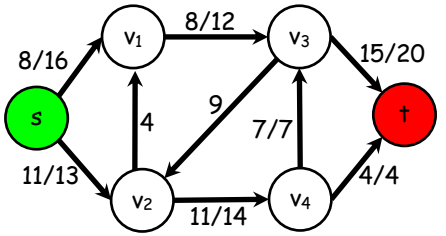


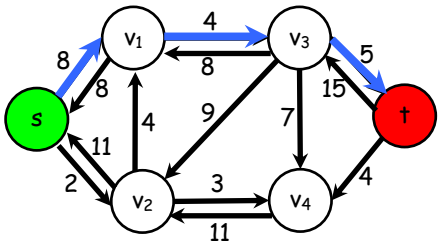


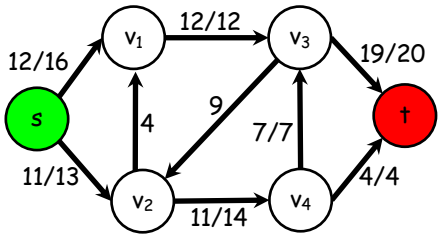


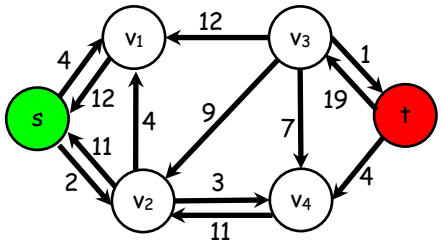










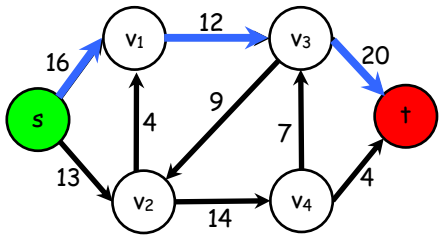


Não há nenhum caminho aumentador: |f*| = 23

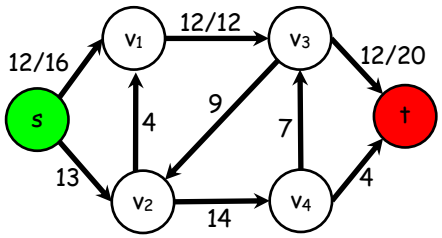
Algoritmo de Edmonds-Karp (1972)

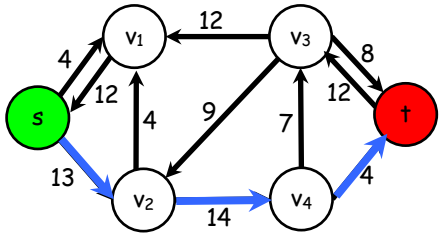
- É igual ao algoritmo de Ford-Fulkerson, mas sempre escolhe o caminho aumentador com um número mínimo de arcos.
- Análise da complexidade de tempo:
  - Uma exploração em largura define as distâncias de s a cada vértice e encontra o menor caminho até t em tempo O(m). No digrafo residual, arco "para frente" é aquele que sai de um vértice com distância i e chega a outro vértice com distância i+1; arco "para trás" é o contrário; e arco "para o lado" une vértices de mesma distância.
  - Em cada iteração do **`while`**, pelo menos um arco "para frente" será removido, e alguns arcos "para trás'" ou "para o lado" serão acrescentados. Deste modo, a distância de s a cada vértice nunca diminui.
  - Seja d(t) a distância de s a t. No pior caso, serão removidos m-d(t) arcos "para frente", um por iteração do **`while`**, sem alterar o valor d(t). Depois disso, ou t ficará desconectado de s, ou d(t) aumentará. Se t ficar desconectado, o algoritmo termina.
  - Como o valor d(t) pode aumentar no máximo n-1 vezes, o tempo total será $O(nm^2)$.
- Há ainda outros algoritmos mais eficientes, que não serão apresentados: Dinic, Goldberg-Tarjan, King-Rao-Tarjan, Goldberg-Rao, etc.

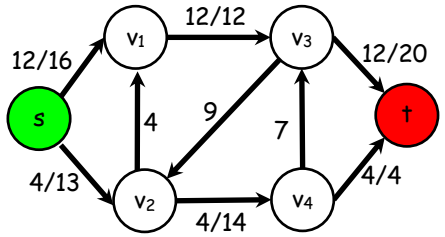
Mesmo exemplo anterior

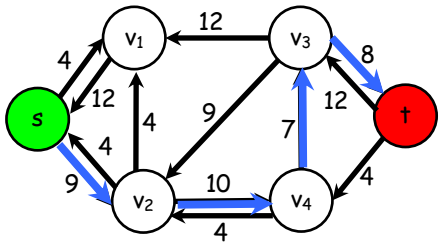


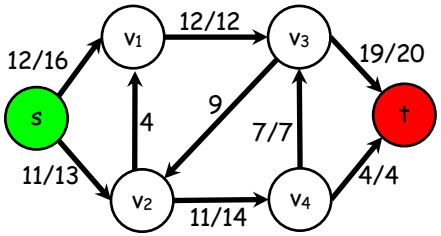
Poderia ter sido escolhido o caminho s-v_2-v_4-t

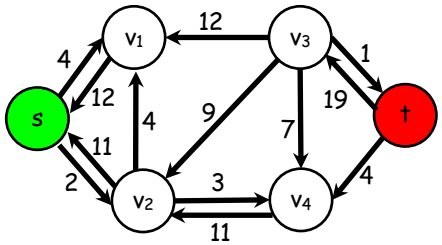












Não há nenhum caminho aumentador: |f*| = 23