CT-234

Estruturas de Dados, Análise de Algoritmos e Complexidade Estrutural

Carlos Alberto Alonso Sanches

CT-234

11) Algoritmos paralelos

Conceitos básicos, PRAM, Hipercubo

Motivações

- O desempenho dos *processadores sequenciais* (também chamados de *seriais*) está cada vez mais próximo do limite físico, imposto pela velocidade da luz, pela dissipação de calor e pelas dimensões dos componentes.
- Este desempenho é insuficiente em muitas áreas:
  - Química quântica e física relativista
  - Cosmologia e astrofísica
  - Dinâmica de fluidos e turbulência
  - Sequenciamento de genomas e síntese de proteínas
  - Climatologia global
  - Reconhecimento de voz em tempo real
  - Criptoanálise

Paralelismo

- Em um sistema paralelo, vários processadores cooperam simultaneamente na resolução de um mesmo problema.
- Esta alternativa vem se tornando cada vez mais viável graças ao declínio do custo e do tamanho dos componentes eletrônicos.
- Além do aumento de velocidade, o paralelismo também proporciona a habilidade de "estar em mais de um lugar ao mesmo tempo". Esta característica é conveniente, por exemplo, para problemas com múltiplos fluxos de dados, ou em situações em que uma computação já realizada não pode ser revertida.

Paralelismo *versus* Sistema Distribuído

Sistema Paralelo	*Sistema Distribuído*
Múltiplos processadores	Computadores autônomos
Tarefas simultâneas	Distribuição de tarefas
Acoplamento forte	Recursos fisicamente distantes
Procura-se a aceleração de uma única aplicação	Há várias aplicações e usuários
Arquiteturas homogêneas	Estruturas heterogêneas e dinâmicas
Possibilidade de uso de memória compartilhada	Nunca se utiliza memória compartilhada

Modelos de paralelismo

- É praticamente impossível falar de algoritmos paralelos sem antes estabelecer um modelo de computação.
- Ao contrário do caso sequencial, onde os computadores geralmente pertencem ao modelo de *Von Neumann*, em paralelismo há uma grande diversidade.
- Basicamente, são duas características que os diferenciam:
  - Presença ou não de sincronismo entre os processadores.
  - Modo de comunicação entre eles (rede de interconexão ou memória compartilhada).

Fluxos de instruções e de dados

- Todo computador (sequencial ou paralelo) executa um conjunto de instruções sobre dados de entrada:
  - Fluxo de instruções (programa)
  - Fluxo de dados (entrada)
- Quando o fluxo de instruções é o mesmo para todos os processadores, podemos dizer (embora isso não seja necessário) que eles trabalham *sincronamente*.
- Em 1966, Flynn estabeleceu uma classificação que se tornou tradicional, embora existam nomenclaturas alternativas.

Classificação de Flynn

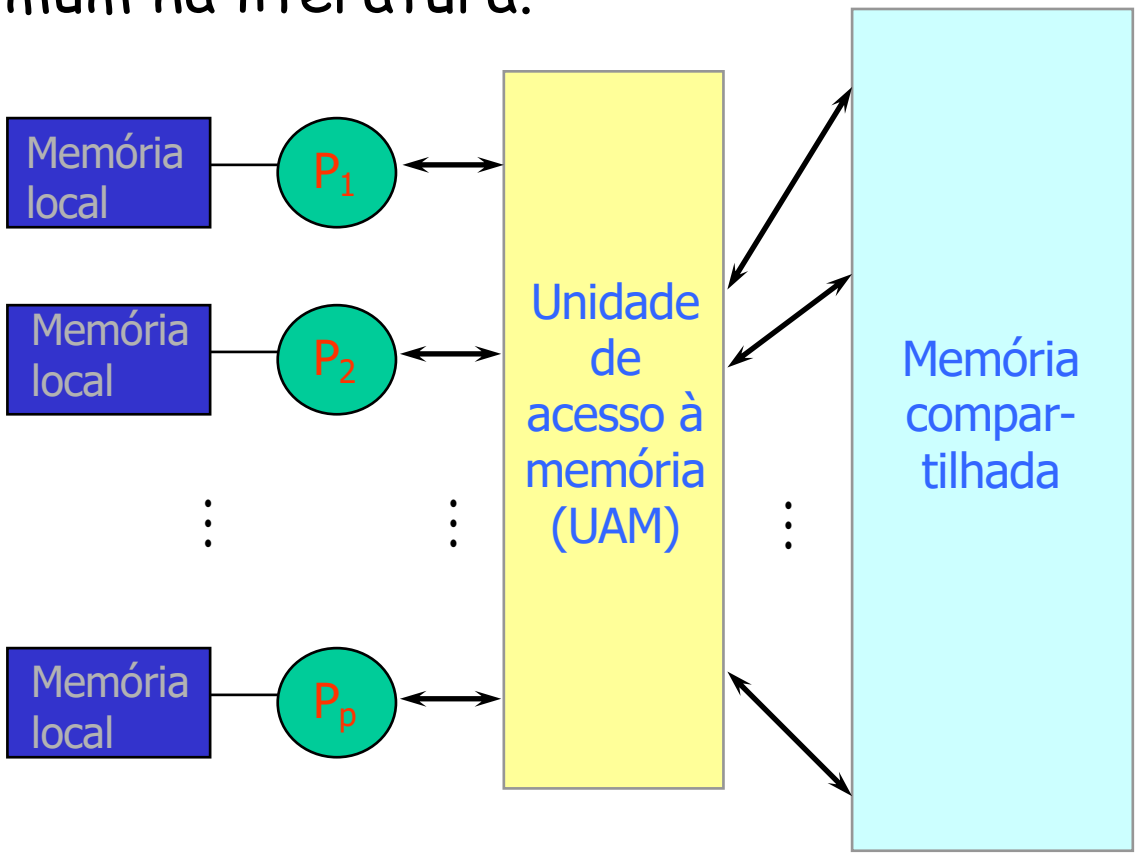
- SISD (*Single Instruction / Single Data*)
  - Modelo sequencial (conhecido como *Von Neumann*)
- SIMD (*Single Instruction / Multiple Data*)
  - Modelo paralelo síncrono
- MIMD (*Multiple Instruction / Multiple Data*)
  - Modelo paralelo assíncrono
- MISD (*Multiple Instruction / Single Data*)
  - Inexistente na prática

Análise de algoritmos paralelos

- Passos elementares no tempo de execução paralelo:
  - *Computacionais* : idem ao modelo sequencial.
  - *De roteamento* : transmissão de um dado de tamanho constante de um processador a outro.
- Custo ($C = p.T_p$): produto entre o número p de processadores e o tempo paralelo T_p de execução.
  - Estabelece um limite máximo para o número de passos elementares.
  - Portanto, mede o tempo máximo que um computador serial gastaria na simulação desse algoritmo paralelo.
  - Uma paralelização será ótima se seu custo for da mesma ordem do *upper-bound* T_s de tempo sequencial do mesmo problema: $C = p.T_p = \Theta(T_s)$.
  - Não faz sentido $T_p = o(T_s/p)$. Por quê?
- Escalabilidade: capacidade de um algoritmo paralelo resolver eficientemente uma mesma instância de um problema em máquinas com diferentes números de processadores.

Modelo PRAM

- *Parallel Random Access Machine* (PRAM): modelo paralelo muito comum na literatura.



- É geralmente definida como SIMD (síncrona).

Passos de execução na PRAM

- Na PRAM, cada passo de um algoritmo consiste em três fases:
  - Leitura: *até p processadores* leem simultaneamente uma correspondente posição da memória compartilhada, e armazenam esse valor em um registro local.
  - Computação: *até p processadores* executam uma operação aritmética ou lógica em seus dados locais.
  - Escrita: *até p processadores* escrevem simultaneamente em uma correspondente posição da memória compartilhada.
- *"Até p processadores"* significa que eventualmente alguns deles permanecem inativos.

Acesso à memória compartilhada

- ER (*Exclusive Read*) e EW (*Exclusive Write*)
  - Não há acessos simultâneos a uma mesma posição da memória compartilhada.
- CR (*Concurrent Read*)
  - São permitidos acessos simultâneos à memória compartilhada para leitura.
- CW (*Concurrent Write*)
  - São permitidos acessos simultâneos à memória compartilhada para escrita. Neste caso, é preciso estabelecer uma política de tratamento para os eventuais conflitos.

Variantes das instruções CW

- *Priority* : somente escreve o processor de maior prioridade.
- *Common* : a escrita somente é permitida se os processadores desejarem escrever um mesmo valor.
- *Arbitrary* : o algoritmo estabelece qual processador irá escrever.
- *Random* : o processador que irá escrever é escolhido aleatoriamente.
- *Combining* : todos os valores destinados a uma mesma posição são combinados através de uma função determinada (*sum*, *and*, *or*, *max*, *min*, etc.).

Comandos na PRAM SIMD

- De modo geral, a descrição de algoritmos em uma PRAM SIMD é muito semelhante ao utilizado no modelo sequencial.
- Na verdade, **`forall where`** é o único comando novo:
  - Especifica um intervalo de processadores que executarão simultaneamente um bloco de comandos.
  - A cláusula **`where`**, que é opcional, indica uma restrição neste intervalo.
  - Embora pareça, este comando não é um laço...
- Durante a execução dos comandos internos ao **`forall`**, os eventuais processadores excluídos pela cláusula **`where`** permanecem inativos.
- Os algoritmos que apresentaremos a seguir, por serem elaborados em uma PRAM SIMD, utilizam este comando.

Posição do primeiro 1

- Dada uma sequência de n *bits* B[1..n], deseja-se encontrar a posição do primeiro valor 1.
- Sabemos que a solução sequencial desse problema gasta tempo $T_s = O(n)$.
- Na PRAM CRCW-or com n processadores (aplica o operador *or* em caso de conflito de escrita), seria possível resolver esse problema em tempo constante?
- Inicialmente, elaboraremos um algoritmo paralelo de tempo $T_p = \Theta(1)$ utilizando $p = n^2$ processadores.
  - Como $C = p.T_p = \omega(T_s)$, essa paralelização não é ótima...
- Em seguida, esse algoritmo será utilizado na elaboração de uma paralelização ótima.

Ideia

- Na PRAM CRCW-or com $p = n^2$ processadores $P_{i,j}$ $(1 \le i,j \le n)$, é possível encontrar a resposta em tempo $\Theta(1)$:
  - Se $B[i] = 1$, $B[j] = 1$ e $j > i$, então $P_{i,j}$ anula $B[j]$ (conflitos simples: somente são escritos valores nulos)
  - Se $B[i] = 1$, então $P_{1,i}$ escreve i em X
- Algoritmo ótimo para a PRAM CRCW-or com $p = n$ processadores:
  - O vetor B é considerado como $q = n^{1/2}$ blocos de q elementos cada.
  - Cada P_i $(1 \le i \le n)$ copia $B[i]$ em $C[\lceil i/q \rceil]$, onde C também é um vetor de tamanho q (pode haver conflitos de escrita). Tempo: $\Theta(1)$.
  - Através do algoritmo anterior, encontrar em C o primeiro *bit* 1: será o primeiro bloco de B no qual aparece um *bit* 1. Tempo: $\Theta(1)$.
  - Identificado esse bloco em B, aplicar nele o mesmo algoritmo anterior. Tempo: $\Theta(1)$.

Busca do valor máximo

- Dada um vetor A[1..n], deseja-se encontrar seu valor máximo.
- A solução sequencial para esse problema é $\Theta(n)$.
- Na mesma PRAM CRCW-or com n processadores, também seria possível resolver esse problema em tempo constante?
- Inicialmente, elaboraremos um algoritmo de tempo $\Theta(1)$ utilizando $p = n^2$ processadores.
- Em seguida, esse algoritmo servirá de inspiração para uma paralelização quase ótima...

Ideia

- Na PRAM CRCW-or com $p = n^2$ ($P_{i,j}$, $1 \le i,j \le n$), é possível encontrar a resposta em tempo $\Theta(1)$:
  - Se ($A[i] > A[j]$) ou ($A[i] = A[j]$ e $i < j$), então $P_{i,j}$ anula $A[j]$ (conflitos simples: somente são escritos valores nulos).
  - Se $A[i] \neq 0$, então $P_{1,i}$ escreve $A[i]$ em X
- Algoritmo para a PRAM CRCW-or com $p = n.n^{1/2}$:
  - Dividir o vetor A em $n^{1/2}$ blocos de $n^{1/2}$ elementos cada.
  - Através do algoritmo anterior, encontrar em paralelo os valores máximos de cada bloco (utilizam-se n processadores por bloco), armazenando os resultados em um vetor M de tamanho $n^{1/2}$. Isso gasta tempo $\Theta(1)$.
  - Com o mesmo algoritmo anterior, encontrar em M o valor máximo, também em tempo $\Theta(1)$ (bastam n processadores).

E se $p = n.n^{1/4}$?

- Divide-se A em blocos de tamanho $n^{1/4}$:
  - Haverá $n/n^{1/4} = n^{3/4}$ blocos. É possível calcular em tempo $\Theta(1)$ um vetor M de tamanho $n^{3/4}$ com as subsoluções (são necessários $n^{(1/4).2}.n^{3/4} = n.n^{1/4} = p$ processadores).
- Também divide-se M em blocos de tamanho $n^{1/4}$:
  - Haverá $n^{3/4}/n^{1/4} = n^{1/2}$ blocos. É possível obter em tempo $\Theta(1)$ um novo vetor M' de tamanho $n^{1/2}$ com as subsoluções (bastam $n^{(1/4).2}.n^{1/2} = n$ processadores).
- Por fim, a melhor solução de M' pode ser obtida também em tempo $\Theta(1)$.

Generalização

- Dispõem-se de $p = n^{1+x}$ processadores, $0<x<1$. Divide-se o vetor *A* em n^{1-x} blocos de tamanho n^x. Para se calcular em tempo $\Theta(1)$ o vetor *M* de tamanho n^{1-x} com as subsoluções, são necessários $n^{2x}n^{1-x} = n^{1+x} = p$ processadores.
- Divide-se *M* em n^{1-x-y} blocos de tamanho n^y. Para se calcular em tempo $\Theta(1)$ o vetor *M'* de tamanho n^{1-x-y} com as subsoluções, são necessários $n^{2y}n^{1-x-y} = n^{1-x+y}$ processadores. Como $p = n^{1+x}$, basta escolher $y = 2x$, e portanto *M'* terá tamanho n^{1-3x}.
- Se a solução de *M'* não puder ser calculada em tempo $\Theta(1)$, ou seja, se $1+x < 2(1-3x)$, o processo continuará...
- É possível demonstrar que, quando p tende $\Theta(n)$, o tempo para se encontrar a resposta tende a $\Theta(\log n)$.

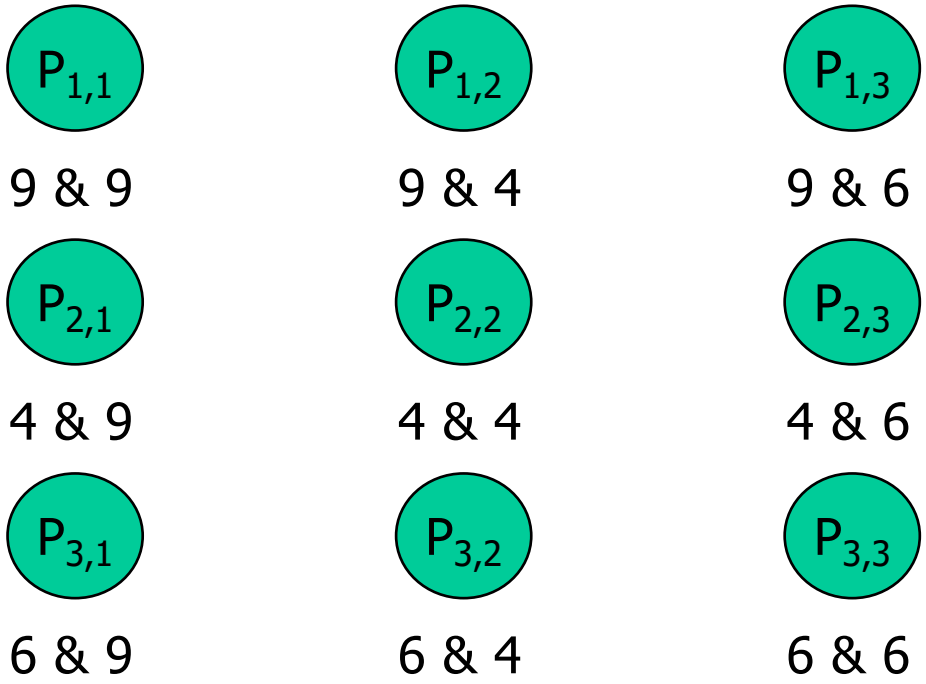
Ordenação na PRAM CRCW-sum

- Para ordenar um vetor $A[1..n]$ presente na memória compartilhada, utilizaremos uma PRAM CRCW-sum com $p = n^2$ processadores $P_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n$. Quando houver conflito de escrita, será armazenada a soma dos valores.
- Ideia: calcular o vetor $C[1..n]$, onde $C[i]$ é a quantidade de elementos menores que $A[i]$.
- Se dois elementos de A tiverem o mesmo valor, será considerado menor o de menor índice.
- Desse modo, $A[i]$ ocupará a $(C[i]+1)$-ésima posição na ordenação.

Exemplo

A = | 9 | 4 | 6 |

Escrita concorrente ⟶ Soma



C = | 2 | 0 | 1 |

A = | 4 | 6 | 9 |

Algoritmo

```
EnumerationSort() {
     forall P_{i,j}
        if (A[i]>A[j] || (A[i]==A[j] && i>j))
            C[i] = 1;
        else
            C[i] = 0;
     forall P_{i,1}
        A[C[i]+1] = A[i];
}
```

- Tempo: $\Theta(1)$
- Custo: $\Theta(n^2)$
- Não é ótimo, pois o melhor algoritmo sequencial é $O(n.\log n)$.
- Há algoritmos ótimos para ordenação na PRAM EREW (Cole).

Problema da mochila

- A resolução sequencial do *Knapsack Problem 0/1* através de *Programação Dinâmica* gasta tempo $\Theta(n.c)$.
- B[k,w]: solução ótima considerando apenas os k primeiros itens e uma mochila de capacidade w.

```
Knapsack01() {
   for (i=0; i<=c; i++)
      B[0,i] = 0;              // nenhum item é considerado
   for (k=1; k<=n; k++)        // incremento nos itens
      for (i=0; i<=c; i++)     // incremento na capacidade
        if (w[k] > i) B[k,i] = B[k-1,i];
        else B[k,i] = max {B[k-1,i], B[k-1,i-w[k]] + p[k]};
   return B[n,c]
}
```

Resolução na PRAM EREW (com p = c+1)

- Ideia: cada processador P_i ($0 \le i \le c$) calculará as soluções B[k,i], $0 \le k < n$, incrementando passo a passo o número de objetos considerados.

```
ParallelKnapsack01() {
    forall Pi
       B[0,i] = 0;
    for (k=1; k<=n; k++)
       forall Pi // Pi calcula soluções para capacidade i
         if (w[k] > i) B[k,i] = B[k-1,i];
         else B[k,i] = max {B[k-1,i], B[k-1,i-w[k]] + p[k]};
}
```

Tempo: $\Theta(n)$

- Durante o cálculo da linha k de B, os processadores utilizam um mesmo deslocamento w_k na linha k-1, ocasionando no máximo duas leituras numa mesma posição da memória. Estes eventuais conflitos podem ser resolvidos em tempo constante na PRAM EREW.

Resolução escalável

- E se não houver tantos processadores disponíveis?
- Lin e Storer (1991) mostraram que é possível tornar escalável essa resolução.
- Considerando $p<c$, basta que cada processador cuide de $q=\lceil (c+1)/p \rceil$ capacidades da mochila. Em concreto, P_i $(0 \leq i<p)$ calculará as soluções ótimas das mochilas com capacidades que variam entre $i.q$ e $(i+1).q-1$.
- Desse modo, a resolução gastará tempo $\Theta(n.c/p)$, ou seja, é uma paralelização ótima.

Algoritmo escalável

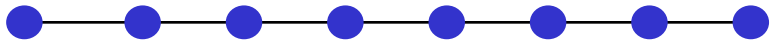
```
ParallelScalableKnapsack01() {
  q = ⌈(c+1)/p⌉;
  forall Pi  // Pi calcula sequencialmente q capacidades
     for (j=0; j<q; j++)
        B[0,iq+j] = 0;
  for (k=1; k<=n; k++)
    forall Pi // Pi calcula sequencialmente q capacidades
      for (j=0; j<q, j++) {
        t = iq+j;
        if ((w[k]-j)/q > i) B[k,t] = B[k-1,t];
        else B[k,i] = max {B[k-1,t], B[k-1,t-w[k]] + p[k]};
      }
}
```

Tempo: $\Theta(n.c/p)$

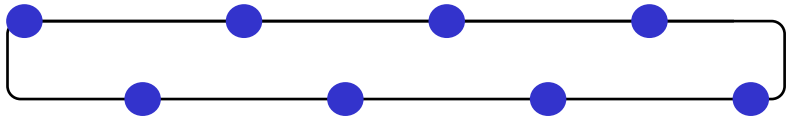
Redes de interconexão

- Este modelo também é chamado de *message-passing*.
- Critérios que costumam ser considerados:
  - Grau: número de vizinhos de cada processador
  - Diâmetro: maior distância entre dois processadores
  - Comprimento das conexões: o ideal é que não varie em função do número de processadores
- Topologias mais conhecidas:
  - Arranjo linear, anel, grade (*mesh*), toróide, árvore, hipercubo, borboleta (*butterfly*), embaralhador perfeito (*shuffle exchange*), De Bruijn, estrela, etc.

Arranjos lineares e anéis



Diâmetro: p-1

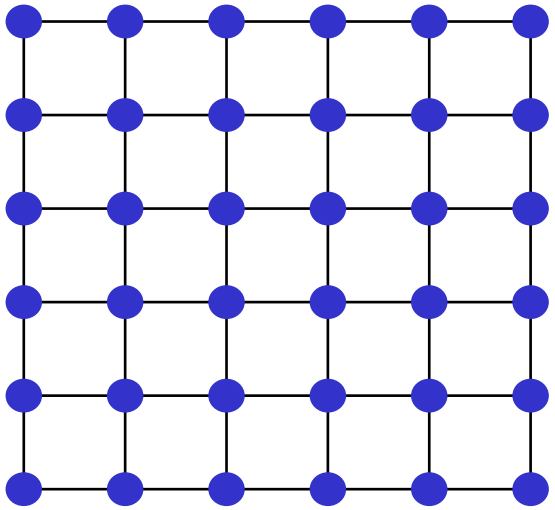


Diâmetro: p/2

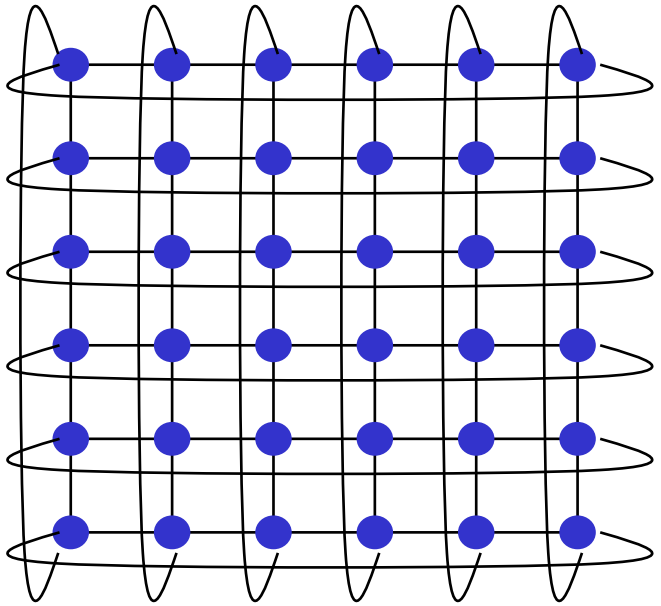
Adequados para algoritmos que trabalham
com vetores de uma dimensão

Grades (*meshes*) e toróides

Exemplos para duas dimensões:



Diâmetro: $2.p^{1/2}$

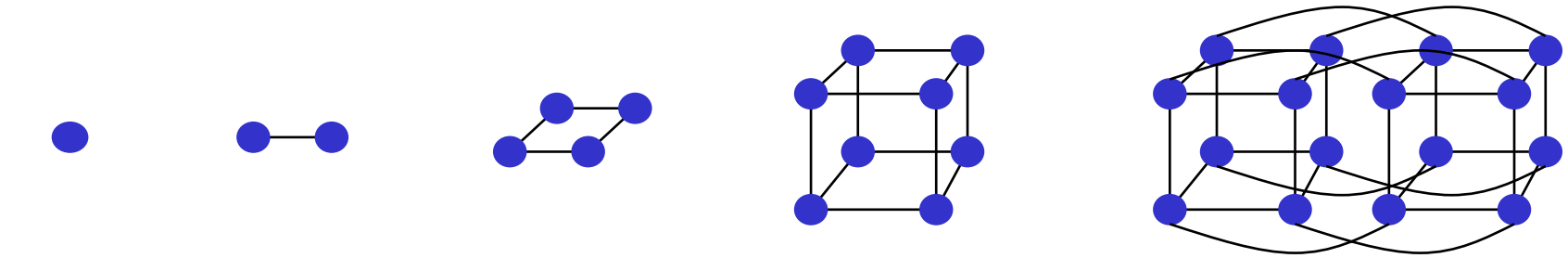


Diâmetro: $p^{1/2}$

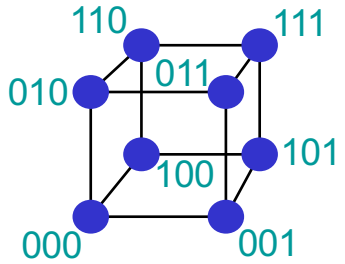
Adequados para algoritmos que trabalham com matrizes

Hipercubos

- Definição recursiva:
  - H(0) é um único vértice, *sem endereço*.
  - H(d), d > 0, tem p = 2^d vértices e é formado por dois H(d-1): unem-se os vértices com mesmo endereço, acrescentando-se no início do seu endereço os *bits* 0 ou 1, conforme o H(d-1).



H(0) H(1) H(2) H(3) H(4)



Diâmetro: d

Hipercubo

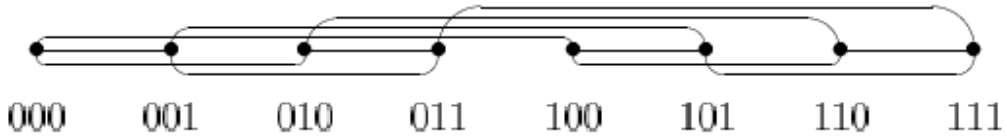
- O *hipercubo* é uma das mais conhecidas redes de interconexão, estudado tanto do ponto de vista prático como teórico.
- Alguns protótipos construídos: *Cosmic Cube* ($p=2^6$), *Connection Machine* ($p=2^{16}$), *iPSC/2* ($p=2^7$).
- Além de vantajosas propriedades topológicas, sua definição recursiva facilita a elaboração de algoritmos, principalmente através do paradigma da *Divisão-e-Conquista*.
- Apresentaremos alguns algoritmos SIMD para o hipercubo.

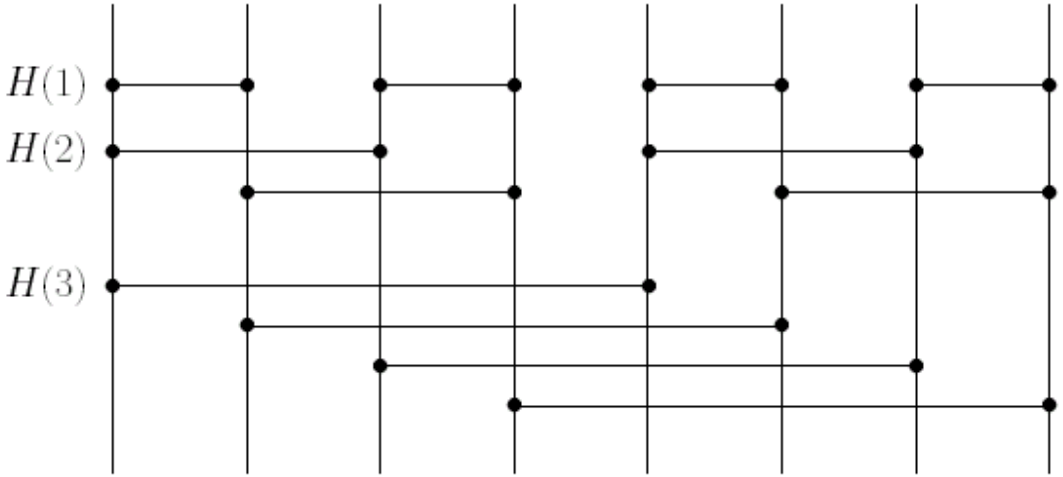
Notação para algoritmos no hipercubo

- R(i): registrador R no vértice i do hipercubo, $0 \leq i < p$.
- i_b: b-ésimo *bit* (a partir da esquerda) da representação binária de i, $0 \leq b < d$.
- $i^{(b)}$: número i com o *bit* i_b trocado.
- Comandos de atribuição:
  - = Atribuição realizada entre registradores presentes em um mesmo processador (não exige comunicação)
  - $\leftarrow$ Atribuição que requer uma comunicação entre vértices vizinhos
  - $\leftrightarrow$ Troca de informação com uma comunicação entre vértices vizinhos
- Habilitação de vértices:
  - $R(i) \leftarrow R(i^{(b)}) + 1$, $(i_4 = 1)$: executado apenas nos processadores com $i_4 = 1$

Visualização linear

Exemplo: H(3), ou seja, p = 8





- Vértices aparecem em ordem crescente: de 0 até p-1 = 2^d-1.
- É fácil observar como o H(d) é formado por dois H(d-1), mais ligações entre os vértices análogos desses sub-hipercubos.

Inversão de posições

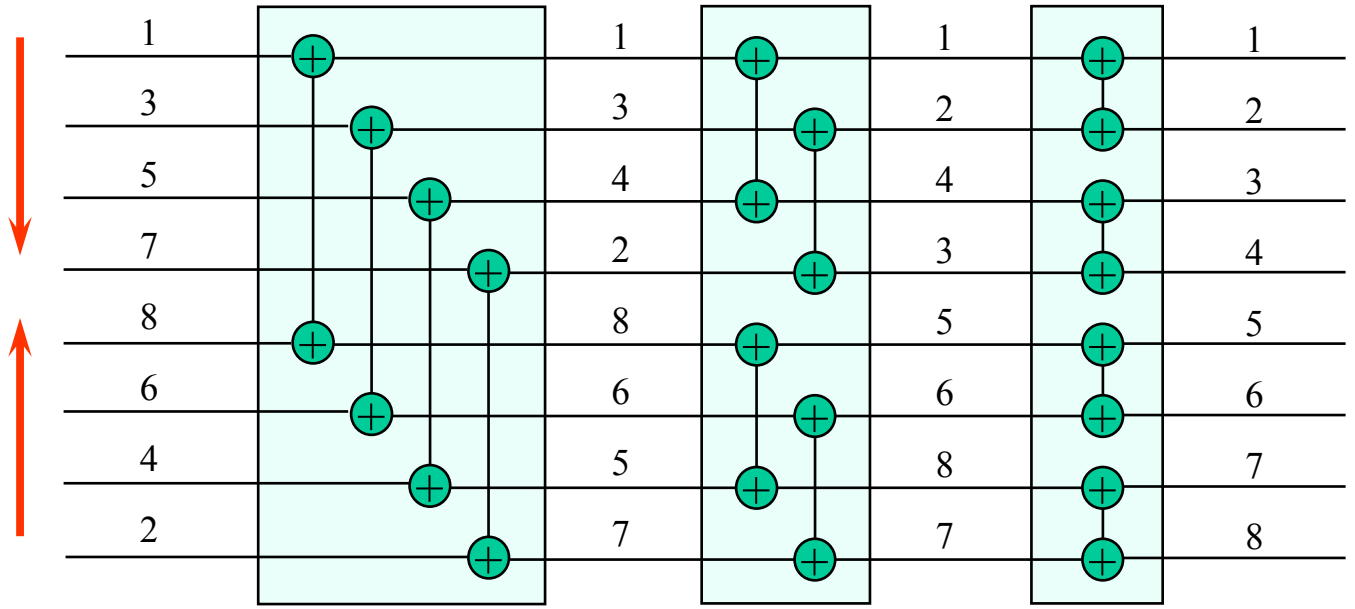
- Cada processador P_i armazena um valor em R(i), $0 \leq i < p$.
- Deseja-se inverter suas posições, ou seja, trocar R(i) com R(p-i-1), $0 \leq i < p$.
- Ideia: observar que os endereços desses pares de processadores têm todos os *bits* trocados entre si.

```
HypercubeInversion(b1,b2) {
    for (b=b1; b<=b2; b++)
        R(i^(b)) ↔ R(i);
}
```

Chamada: `HypercubeInversion(0,d-1)`

Tempo: $\Theta(d) = \Theta(\log p)$

Intercalação bitônica (*Batcher*)



n números ordenados em log n estágios

Intercalação (*merge*)

- Há duas sequências ordenadas em R(i), 0≤i<p, que devem ser intercaladas.
- Ideia: inverter a segunda sequência e aplicar a intercalação bitônica.

```
HypercubeMerge(b1,b2) {
    HypercubeInversion(b1+1,b2), (i_b1 = 1);
    for (b=b2; b>=b1; b--) {
        S(i) ← R(i^(b));
        R(i) = min {S(i), R(i)}, (i_b = 0);
        R(i) = max {S(i), R(i)}, (i_b = 1);
    }
}
```

Chamada: `HypercubeMerge(0,d-1)`

Tempo: $\Theta(d) = \Theta(\log p)$

Ordenação

- A partir do algoritmo de intercalação, fica simples elaborar o *MergeSort* paralelo no H(d):

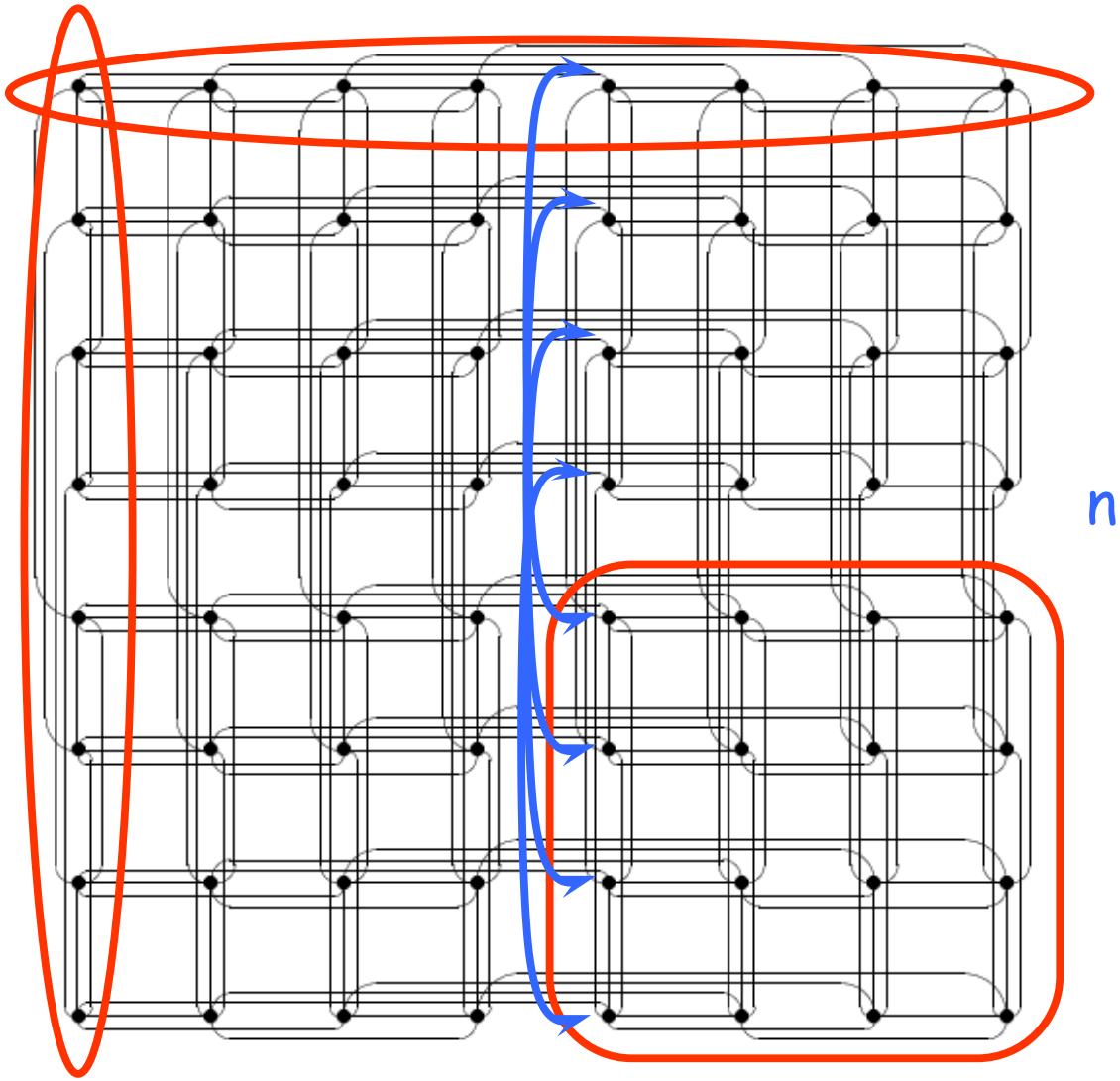
  a) Ordenações recursivas em paralelo em cada H(d-1)

  b) Intercalação paralela

- Tempo total: $T(d) = T(d-1) + \Theta(d)$
- $T(d) = \Theta(d^2)$
- Quantidade de valores a serem ordenados: $n = p = 2^d$.
- Logo, $T(n) = \Theta(\log^2 n)$.

Visualização matricial do hipercubo

Exemplo:
H(6)
p = 64



Sub-hipercubos

Conexões entre elementos correspondentes nos sub-hipercubos

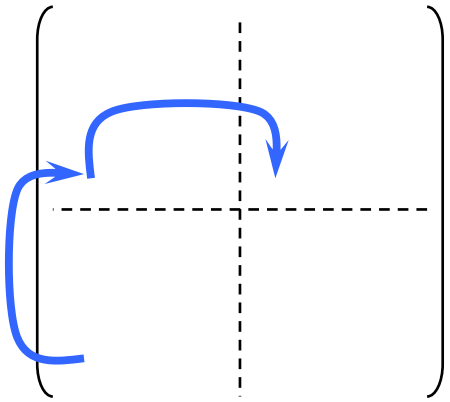
Análogo para visualizações matriciais de dimensões maiores

Transposição de matriz

Matriz quadrada $n \times n$

Hipercubo de dimensão d, onde $2^d = n^2$

Inicialmente armazenada segundo a visualização matricial



T(n): tempo para realizar a transposição

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

Multiplicação de matrizes quadradas

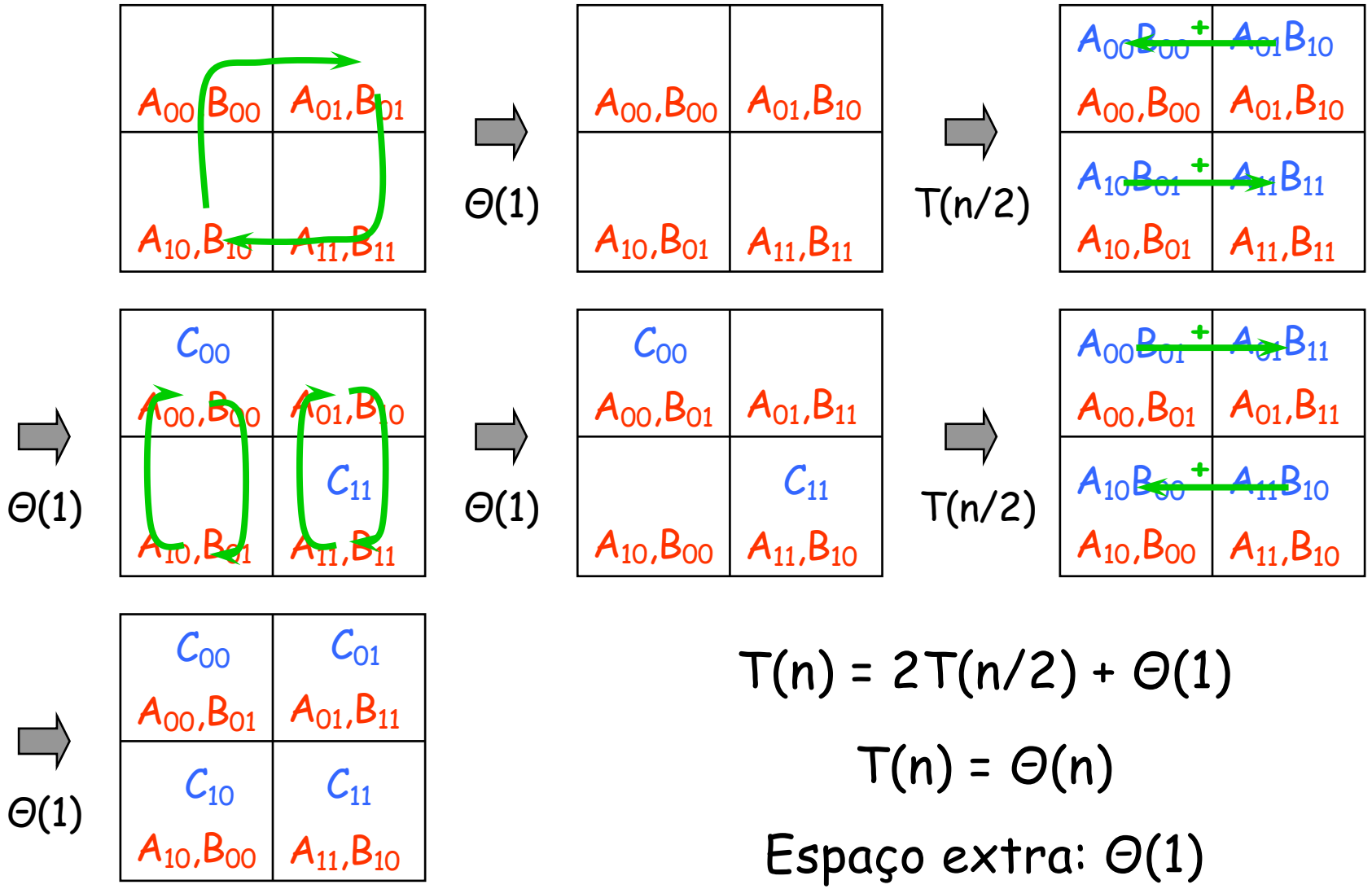
$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{pmatrix}$$

$$C_{00} = A_{00}B_{00} + A_{01}B_{10} \qquad C_{01} = A_{00}B_{01} + A_{01}B_{11}$$

$$C_{10} = A_{10}B_{00} + A_{11}B_{10} \qquad C_{11} = A_{10}B_{01} + A_{11}B_{11}$$

$$C_{ij} = A_{i0}B_{0j} + A_{i1}B_{1j}$$

Multiplicação no hipercubo com $p = n^2$

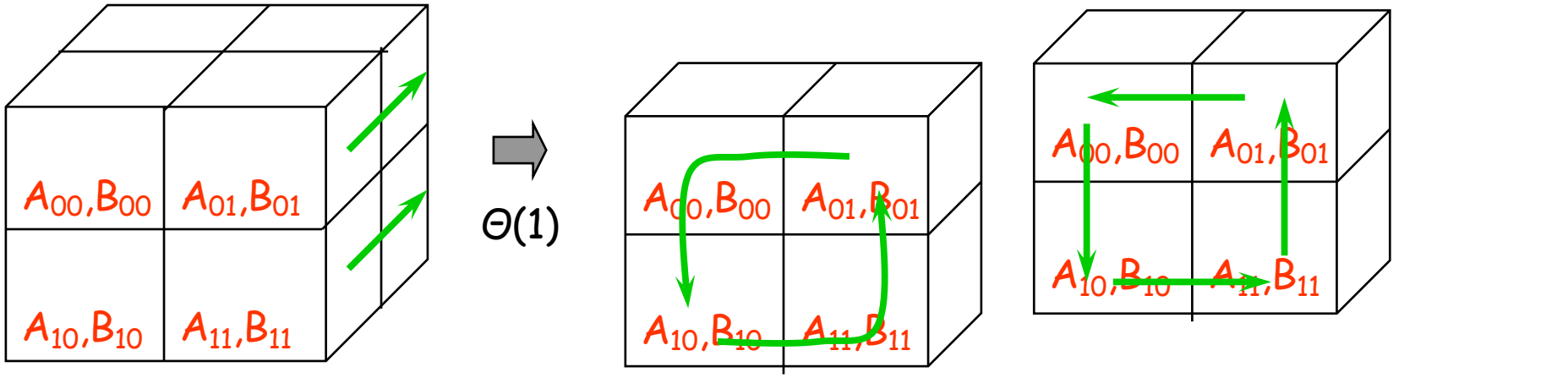


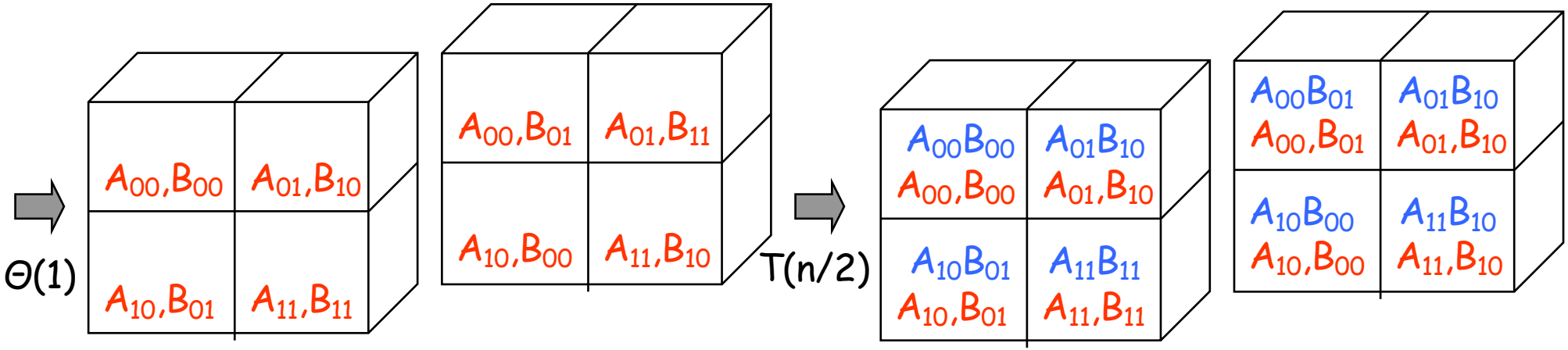
$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n)$$

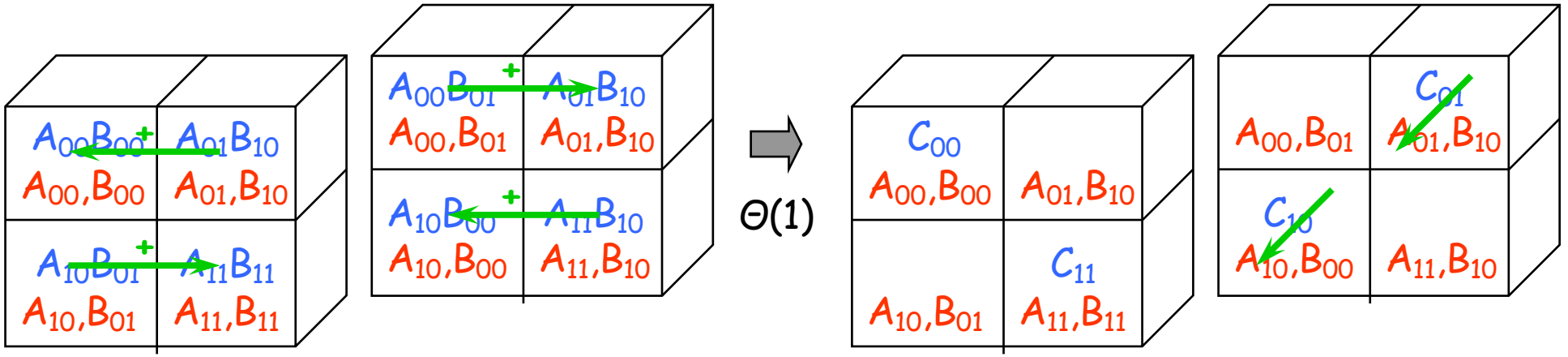
Espaço extra: $\Theta(1)$

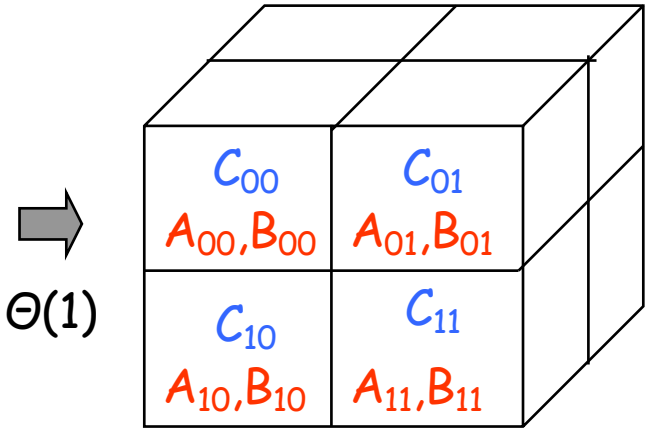
Multiplicação no hipercubo com $p = n^3$





Multiplicação no hipercubo com $p = n^3$





$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

Espaço extra: $\Theta(1)$

Estes resultados podem ser generalizados para $1 \leq p \leq n^3$