CT-234

Estruturas de Dados, Análise de Algoritmos e Complexidade Estrutural

Carlos Alberto Alonso Sanches

CT-234

7) Busca de padrões

Knuth-Morris-Pratt, Boyer-Moore, Karp-Rabin

Padrões e alfabetos

- Padrões (*patterns* ou *strings*) são sequências de caracteres.
  - Exemplos: documentos, programas, páginas *web*, sequências de DNA, imagens digitalizadas, etc.
- Um alfabeto Σ é um conjunto de possíveis caracteres para uma família de padrões.
  - Exemplos: ASCII, Unicode, {A, C, G, T}, {0, 1}.
- Dados os padrões T e P, de tamanhos n e m, o problema da busca de padrões (*pattern matching*), também chamado de *correspondência de cadeias*, consiste em encontrar subsequências de T iguais a P.
- Sem perda de generalidade, vamos supor $n > m$.

Prefixos e sufixos

- Consideraremos um padrão P de tamanho m como um vetor P[0..m-1] de caracteres.
- Os prefixos de P são as subsequências $P_i = P[0..i]$, onde $0 \leq i < m$.
- Os sufixos de P são as subsequências $S_i = P[i..m-1]$, onde $0 \leq i < m$.
- Seja ε o caractere vazio. Por definição, $P_{-1} = S_m = \varepsilon$.
- Se w é um padrão, então $\varepsilon w = w\varepsilon = w$.

Solução por "força bruta"

- Há dois problemas: encontrar todas as ocorrências de P em T ou apenas a primeira delas. Vamos abordar com detalhe apenas esse último problema.
  - No primeiro caso, bastaria armazenar a posição inicial de cada ocorrência e continuar a busca.
- O algoritmo de busca de padrões através da "força bruta" compara P com T para cada possível deslocamento:
  - até que a primeira ocorrência do padrão P seja encontrada em T;
  - ou até que todos os possíveis deslocamentos sejam testados.
- No pior caso, (praticamente) todos os caracteres de P serão comparados com todos os caracteres de T.
- Portanto, este algoritmo gasta tempo $O(n.m)$.

Algoritmo "força bruta"

```
BruteForceMatch() {
  for (i=0; i<=n-m; i++) {
     j = 0;
     while (j<m && T[i+j]==P[j])
         j++;
     if (j == m) return i; // P encontrado em T[i]
  }
  return -1;               // P não foi encontrado
}
```

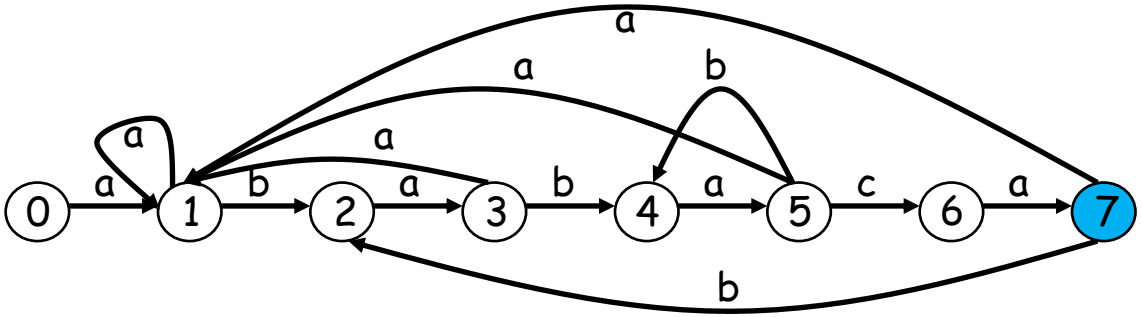
Tempo: $O((n-m).m) = O(n.m)$

Busca através de autômato

- Um método mais eficiente é montar uma máquina de estados, chamada *autômato finito*.
- Ideias:
  - A leitura de cada caractere de T provoca uma mudança no estado desse autômato.
  - Há um único estado final, que somente é atingido após a leitura de uma subsequência igual a P.
- O autômato pode ser representado por uma matriz AF de duas dimensões: considerando que esteja no estado s e que o próximo caractere é x, AF[s,x] será o próximo estado.
- A principal dificuldade não é o uso desse autômato, mas a sua construção.

Exemplo

$\Sigma = \{a, b, c\}$ P = "abababaca"



Estado	a	b	c
0	1	0	0
1	1	2	0
2	3	0	0
3	1	4	0
4	5	0	0
5	1	4	6
6	7	0	0
7	1	2	0

As transições não representadas são retornos para o estado 0

T = "abababacaba"

Busca de P em T:

i	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T[i]	-	a	b	a	b	a	b	a	c	a	b	a
Estado	0	1	2	3	4	5	4	5	6	7	2	3

Algoritmo

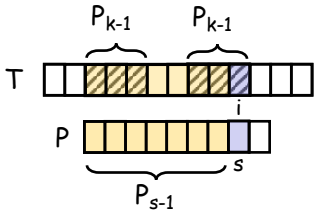
Busca de P em T através de um autômato:

```
AFMatch() {
    s = 0;                  // 0 é o estado inicial
    for (i=0; i<n; i++) {
        s = AF[s,T[i]];
        if (s == m)         // último estado foi atingido
           return i-m;      // posição de P em T
    }
    return -1;              // P não foi encontrado
}
```

Tempo: $O(n)$

Construção do autômato

- O que caracteriza o estado s, $0 \leq s \leq m$, é que o prefixo P_{s-1} acabou de ser reconhecido. Portanto, quando o estado final m é atingido, P foi reconhecido completamente.
- Transições quando não ocorre casamento:
  - Se o autômato está no estado s (ou seja, P_{s-1} foi reconhecido) e, após ler o caractere T[i], deve voltar para o maior prefixo ainda válido, será preciso encontrar o maior estado $0 \leq k \leq s$ tal que P_{k-1} seja sufixo de $P_{s-1}T[i]$. Isso pode ser feito através de uma busca exaustiva em P.



  - Como $P_{-1} = \varepsilon$ sempre é sufixo de $P_{s-1}T[i]$, haverá volta para o estado inicial quando k = 0 for a única solução.
- Por outro lado, transições para estados maiores correspondem aos casos em que P_s é sufixo de $P_{s-1}T[i]$, ou seja, se houver solução para k = s+1.

Algoritmo

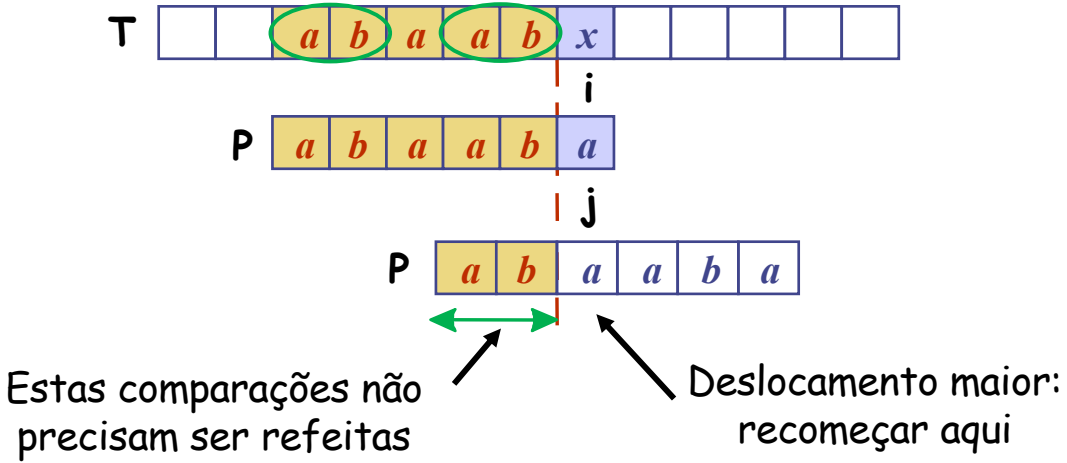
```
AFConstruct() {
   for (s=0; s<=m; s++)
      for x ∈ Σ {
          k = min{s+2, m+1}; // primeiro estado a ser testado
          repeat
             k--;            // testes em ordem decrescente
          until (P_{k-1} seja sufixo de P_{s-1}x);   // tempo Θ(m)
          AF[s,x] = k;
      }
}
```

Tempo: $O(m^3.|\Sigma|)$

Pode ser melhorado para $\Theta(m.|\Sigma|)$

Knuth-Morris-Pratt (1970-1976)

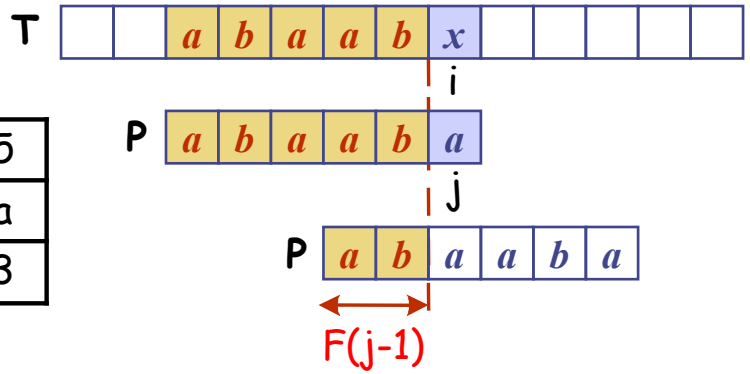
- Ideia: considerando o algoritmo "força bruta", quando ocorre uma diferença entre T[i] e P[j], não seria possível fazer um *deslocamento maior* de P para a direita, *evitando comparações redundantes*?
- Exemplo:



Função de falha

- Pré-processamento em P: determina se seus prefixos aparecem como subsequências dele mesmo.
- A função de falha F(k) será definida como o tamanho do maior prefixo de P[0..k] que é sufixo de P[1..k].
- Informalmente, *é o tamanho do maior "começo" de P_k que também aparece no seu "fim", sem considerar ele mesmo.*
- Exemplo:

k	0	1	2	3	4	5
P[k]	a	b	a	a	b	a
F(k)	0	0	1	1	2	3



- Se P[j] ≠ T[i], então j receberá o valor F(j-1).

Algoritmo KMP

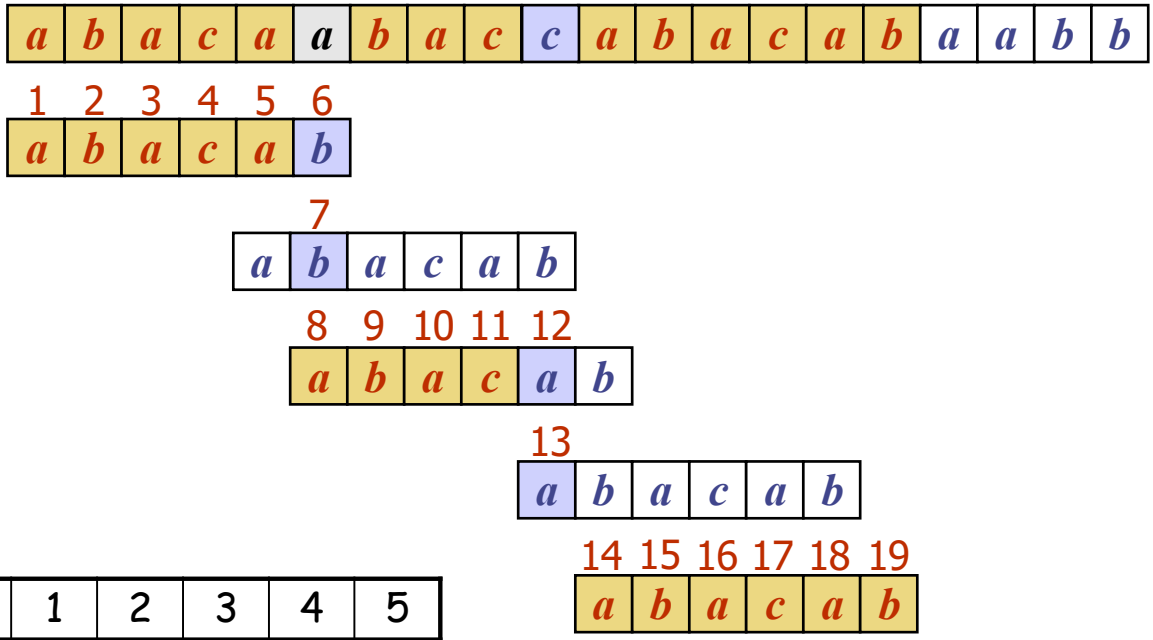
```
KMPMatch() {
    FailureFunction();      // Veremos que gasta tempo Θ(m)
    i = 0;
    j = 0;
    while (i < n)
        if (T[i] == P[j])
            if (j == m-1)
                return i-j;
            else
                { i++; j++; }
        else
            if (j != 0)
                j = F[j-1];
            else
                i++;
    return -1;
}
```

j é incrementado n vezes no máximo

Como é um decremento, será executado até n vezes

Tempo do laço `while`: $O(n)$

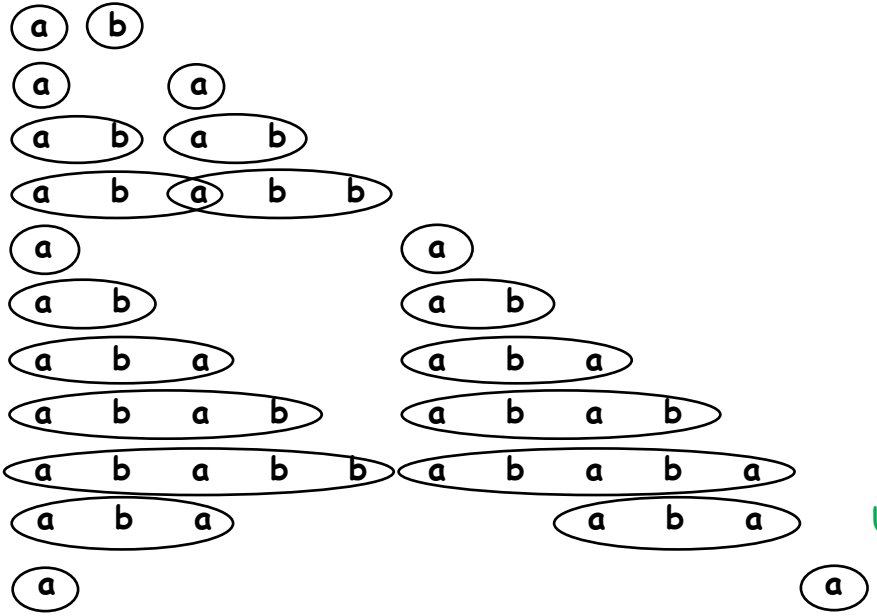
Exemplo



j	0	1	2	3	4	5
P[j]	a	b	a	c	a	b
F(j)	0	0	1	0	1	2

Exemplo: cálculo da função de falha

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P[j]	a	b	a	b	b	a	b	a	b	a	a
F[j]	0	0	1	2	0	1	2	3	4	3	1



Uso "recursivo" de F

Cálculo da função de falha

Subsequências de P são procuradas dentro dele mesmo:

```
FailureFunction() {
    F[0] = 0;
    j = 0;      // índice que percorre os prefixos
    i = 1;      // índice que percorre os sufixos
    while (i < m)
        if (P[i] == P[j])  // já combinaram j+1 caracteres
            F[i++] = ++j;
        else if (j == 0)
                 F[i++] = 0;
             else
                 j = F[j-1]; // uso "recursivo" de F
}
```

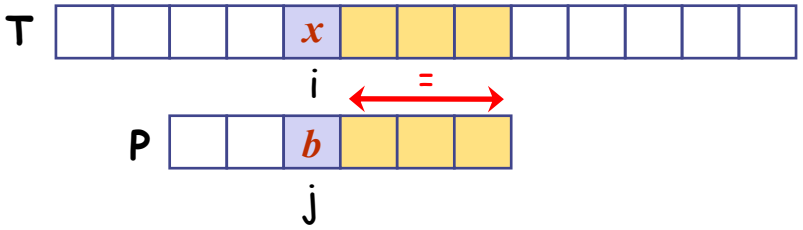
j é incrementado m-1 vezes no máximo

Como é um decremento, será executado até m-1 vezes

Tempo: $\Theta(m)$

Boyer-Moore (1976)

- Ideias do algoritmo de Boyer-Moore:
  - Baseia-se na alta probabilidade de encontrar diferenças quando os padrões são pequenos e os alfabetos grandes.
  - Por isso, P é comparado com T de trás para frente.
  - Quando se encontra uma diferença em T[i], o padrão P dará um salto à frente, considerando-se as comparações já realizadas.

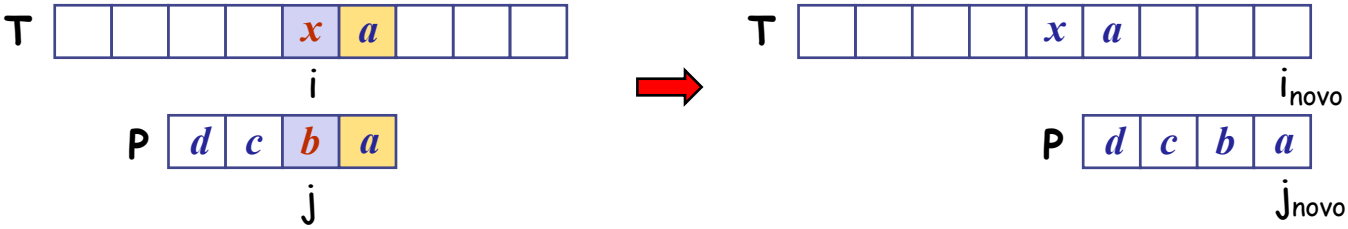


T[i] ≠ P[j]

  - Será preciso averiguar 3 casos diferentes.

Caso 1

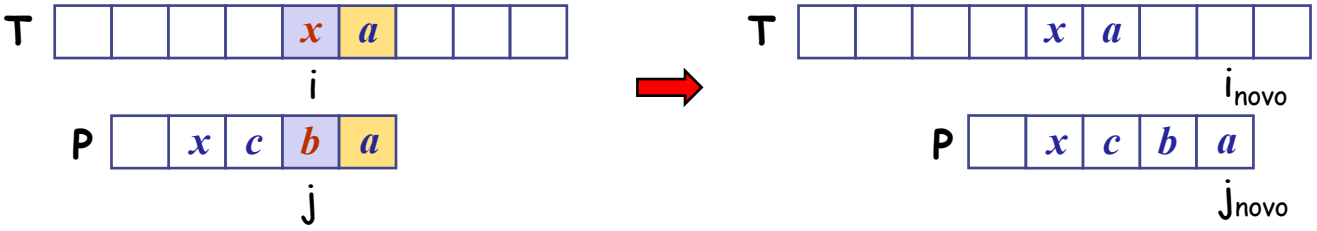
- P não contém x



- Deslocar P para a direita, alinhando P[0] com T[i+1]

Caso 2

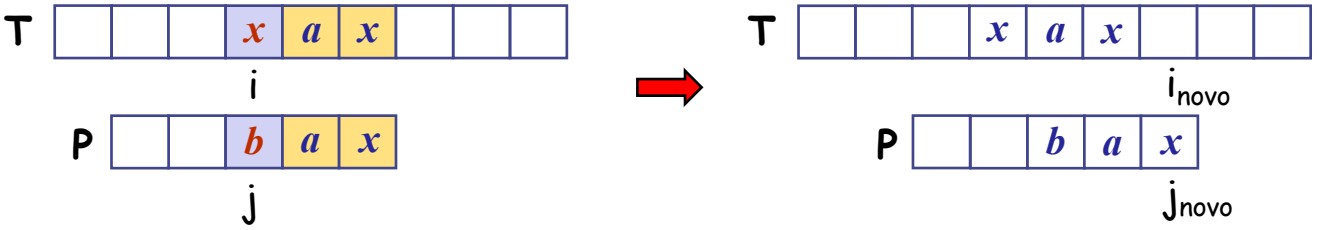
- A última ocorrência de x em P está algum índice menor do que j.



- Deslocar P para a direita, até que a última ocorrência de x fique alinhada com T[i].

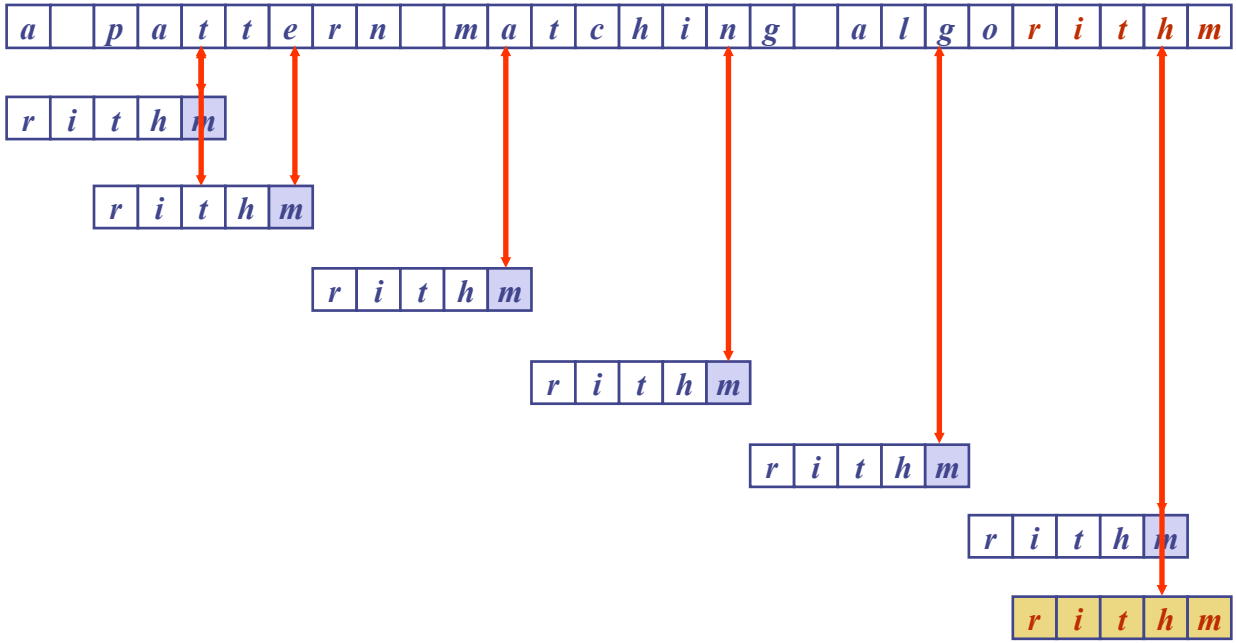
Caso 3

- A última ocorrência de x em P está em algum índice maior do que j.

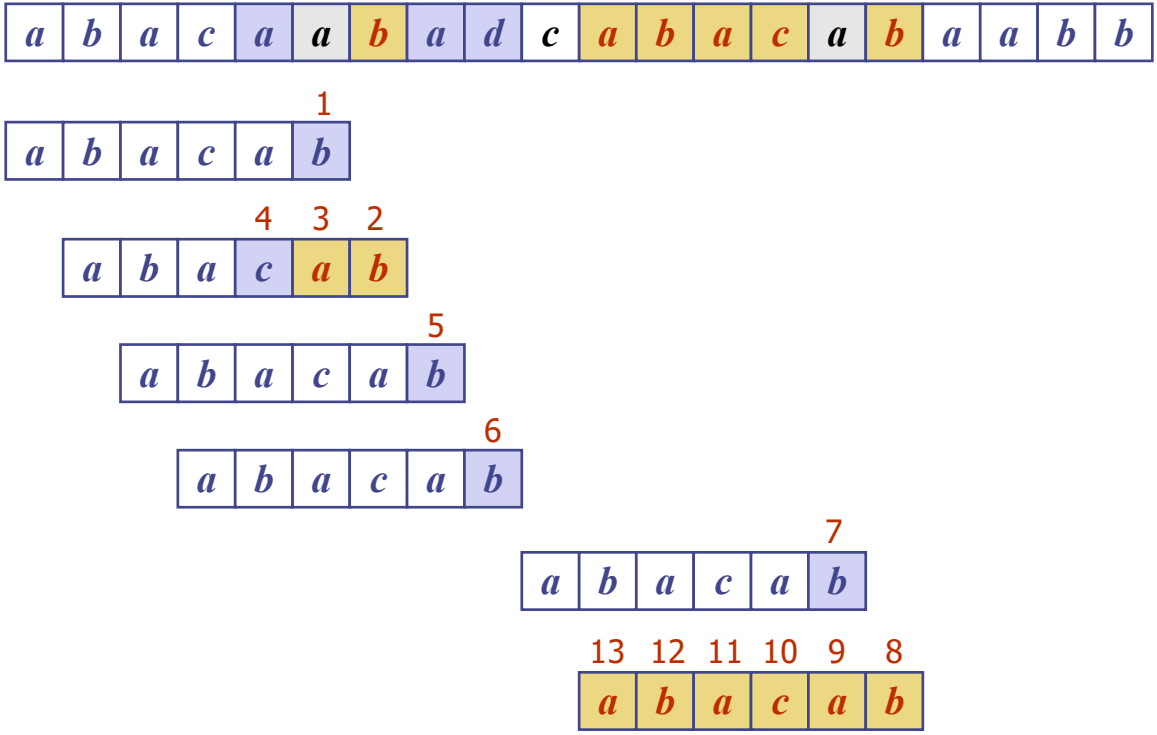


- Deslocar P apenas uma posição para a direita.

Exemplo


a p a t t e r n m a t c h i n g a l g o r i t h m
r i t h m
r i t h m
r i t h m
r i t h m
r i t h m
r i t h m
r i t h m

Outro exemplo



Função de última ocorrência

- Através de um pré-processamento, o algoritmo de Boyer-Moore calcula uma função $L: \Sigma \rightarrow \mathbf{I}$, onde L(x) é definida como:
  - o maior índice i tal que P[i] = x;
  - -1, caso este índice não exista.
- Exemplo: Σ = {a, b, c, d}

P

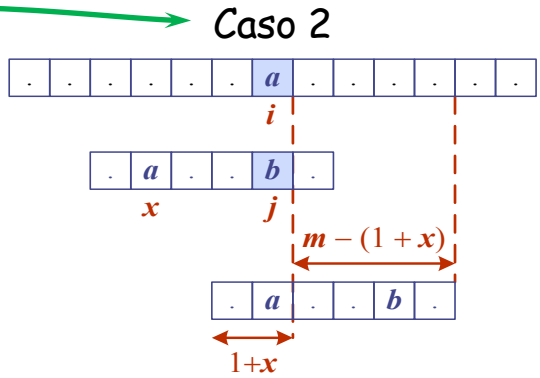
a	b	a	c	a	b
0	1	2	3	4	5

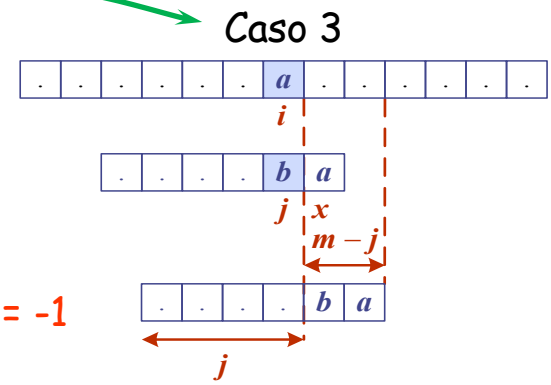
x	a	b	c	d
L(x)	4	5	3	-1

Algoritmo BM

```
BoyerMooreMatch() {
    for (k=0; k<|Σ|; k++)
         L[k] = -1;
    for (k=0; k<m; k++)
         L[P[k]] = k;
    i = m-1;
    j = m-1;
    repeat
      if (T[i] == P[j])
         if (j == 0) return i;
         else { i--; j--; }
      else {
         x = L[T[i]];
         i += m - min{j, 1+x};
         j = m-1;
      }
    until (i > n-1);
    return -1;
}
```

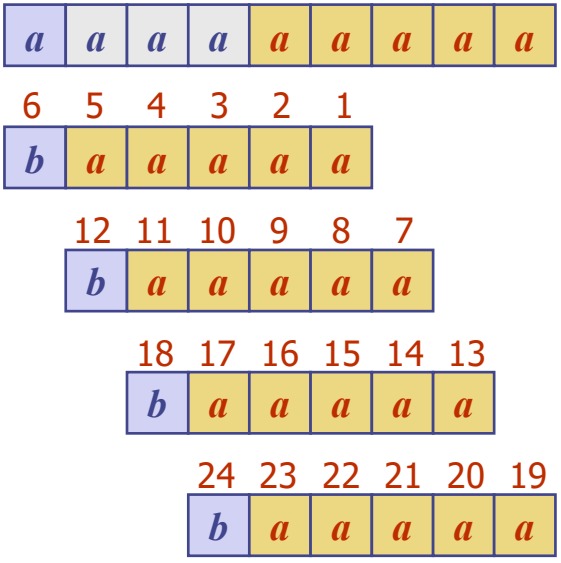
Caso 1: `i += m;` pois $x = -1$





Análise de tempo

Exemplo de pior caso:



- Tempo: $\Theta(n.m + |\Sigma|)$
- Os piores casos costumam ocorrer quando o alfabeto é pequeno (DNA, imagens digitais, etc.), mas são pouco comuns em documentos.
- No entanto, quando o alfabeto é grande, o melhor caso é $\Omega(n/m)$...

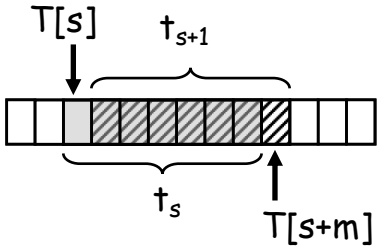
Karp-Rabin (1980)

- Se $\Sigma = \{0, 1\}$ e $m \leq 8$, a busca de P em T poderia ser realizada através de comparações entre *bytes*, que é muito rápida.
- Se $\Sigma = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, P seria um número de m dígitos. Poderíamos então aplicar essa mesma ideia, deslocando uma janela de m dígitos e comparando números inteiros?
- Se P eventualmente não couber em uma variável inteira, poderíamos calcular alguma função de dispersão (*hashing*) para cada subsequência de T com tamanho m e compará-la com o correspondente valor desta função para P:
  - Se forem iguais, um algoritmo de "força bruta" verificaria se o padrão foi mesmo encontrado.
  - Se forem diferentes, o algoritmo continuará a busca, calculando a mesma função para a próxima sequência de m dígitos em T.

Valor em P

- $\Sigma = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
- p: valor do número representado pelos m dígitos de P
- Através da Fórmula de Horner, p pode ser calculado em tempo $\Theta(m)$:
  - p = (...(P[0].10 + P[1]).10 + ... + P[m-3]).10 + P[m-2]).10 + P[m-1]
  - Basta um comando `for` com multiplicações e adições.
- Exemplo:
  - P = "1569", m = 4
  - p = ((1.10 + 5)10 + 6)10 + 9
  - 3 multiplicações e 3 adições

Valores em T



- t_s: valor do número representado pela subsequência T[s..s+m-1], $0 \le s < n-m$.
- Exemplo:
  - T = "64152", m = 4, s = 0, t_s = 6415, T[s+m] = 2
  - t_{s+1}= 10(6415 – 1000.6) + 2 = 4152
- t_{s+1} pode ser calculado a partir de t_s em tempo $\Theta(1)$:
  - $t_{s+1} = 10(t_s - 10^{m-1}T[s]) + T[s+m]$
  - A subtração de $10^{m-1}T[s]$ remove o dígito de mais alta ordem
  - T[s+m] será o novo dígito de mais baixa ordem

Complexidade dos cálculos

- p e t_0 podem ser calculados em tempo $\Theta(m)$.
- t_{s+1} pode ser calculado a partir de t_s em tempo $\Theta(1)$.
- $t_1, \ldots, t_{n-m}$ podem ser calculados tempo $\Theta(n-m)$.
- Portanto, todas as ocorrências de P em T podem ser encontradas em tempo $\Theta(n)$.
- No entanto, para que as comparações entre p e cada t_s sejam feitas em tempo constante, esses números devem estar limitados ao valor máximo de um inteiro suportado pelo sistema (depende da quantidade de *bytes* utilizados).
- Como vimos, esse eventual problema pode ser resolvido com o uso de uma função de dispersão (*hashing*).

Uma solução

- *Função de dispersão* : todos os valores $(p, t_0, t_1, ..., t_{n-m})$ serão calculados em módulo q, onde q é um número primo.
- Definindo $d = |\Sigma|$, q costuma ser escolhido de tal modo que o valor $d.q$ possa ser armazenado em um número inteiro.
- Os cálculos passam a ser:
  - $t_{s+1} = (d(t_s - T[s].h) + T[s+m]) \bmod q$, onde $h = d^{m-1} \bmod q$.
- Evidentemente, $t_s \equiv p \bmod q$ não significa necessariamente que $P = T[s..s+m]$.
- Heurística:
  - Se $t_s \equiv p \bmod q$, verificar por "força bruta" se $P = T[s..s+m]$.
  - Caso contrário, continuar a busca.

Exemplo

- $t_{s+1} = (d(t_s - T[s].h) + T[s+m]) \bmod q$, onde $h = d^{m-1} \bmod q$.
- Sejam: d=10, T="31526", n=5, P="26", m=2, q=11.
- $p = 26 \bmod 11 = 4$
- $h = 10^1 \bmod 11 = 10$
- $t_0 = 31 \bmod 11 = 9$
- $t_1 = (10(9 - 3.10) + 5) \bmod 11 = -205 \bmod 11 = 4$
  - Conferindo: $t_1 = 15 \bmod 11 = 4$
  - $t_1 \equiv p \bmod 11$, mas T[1..2] = "15" e P = "26": P não foi encontrado...
- $t_2 = (10(4 - 1.10) + 2) \bmod 11 = -58 \bmod 11 = 8$
  - Conferindo: $t_2 = 52 \bmod 11 = 8$
- $t_3 = (10(8 - 5.10) + 6) \bmod 11 = -414 \bmod 11 = 4$
  - $t_3 \equiv p \bmod 11$, e P realmente é encontrado em T

Algoritmo KR

```
KarpRabinMatch() {
      d = |Σ|;
      q = um primo maior que m;
      h = d^(m-1) mod q;
      p = 0;
      t_0 = 0;
      for (i=0; i<m; i++) {     // cálculo de p e de t_0
          p = (d.p + P[i]) mod q;
          t_0 = (d.t_0 + T[i]) mod q;
      }
      for (s=0; s<=n-m; s++) { // cálculo de t_1, ..., t_n-m
          if (p == t_s)    // fazer comparação "força bruta"
               if (P[1..m] == T[s..s+m]) return s;
          if (s < n-m) t_s+1 = (d.(t_s-T[s].h)+T[s+m]) mod q;
      }
      return -1;
}
```

Comentários

- Os cálculos de p e t_0 gastam tempo $\Theta(m)$.
- Os cálculos de t_1, ..., t_{n-m}, mais a eventual comparação por "força bruta", gastam tempo $O((n-m).m)$.
- Portanto, o tempo total do algoritmo de Rabin-Karp pode chegar a $O(n.m)$.
- Na prática, este algoritmo tem bom desempenho.
- Importante: ele é válido para qualquer alfabeto! Basta interpretar cada caractere como um dígito...

Comparações

Algoritmos	*Pré-processamento*	*Tempo de busca*
"Força bruta"	-	$O(n.m)$, $\Omega(n)$
Autômato finito	$\Theta(m.\|\Sigma\|)$	$\Theta(n)$
KMP	$\Theta(m)$	$\Theta(n)$
Boyer-Moore	$\Theta(m + \|\Sigma\|)$	$O(n.m)$, $\Omega(n/m)$
Karp-Rabin	-	$O(n.m)$, $\Omega(n)$

- A tabela acima apresenta as complexidades de tempo na ***busca de todas as ocorrências do padrão***.
- Teoricamente, KMP é o melhor.
- Na prática, Boyer-Moore é o mais usado. Além disso, possui algumas variações na literatura.