# CT-234


# Estruturas de Dados, Análise de Algoritmos e Complexidade Estrutural

**Carlos Alberto Alonso Sanches**

# CT-234

## 6) Ordenação

*HeapSort*, *QuickSort*, Rede Bitônica

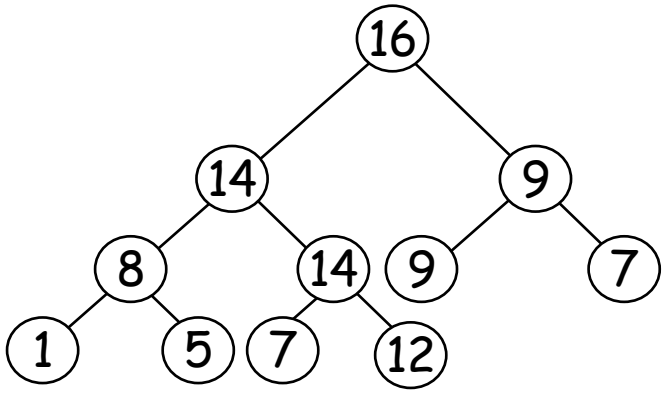
# A estrutura *heap*

- *Heap* é uma árvore binária com duas propriedades:

  1) Balanceamento: é uma árvore completa, com a eventual exceção do último nível, onde as folhas estão sempre nas posições mais à esquerda.

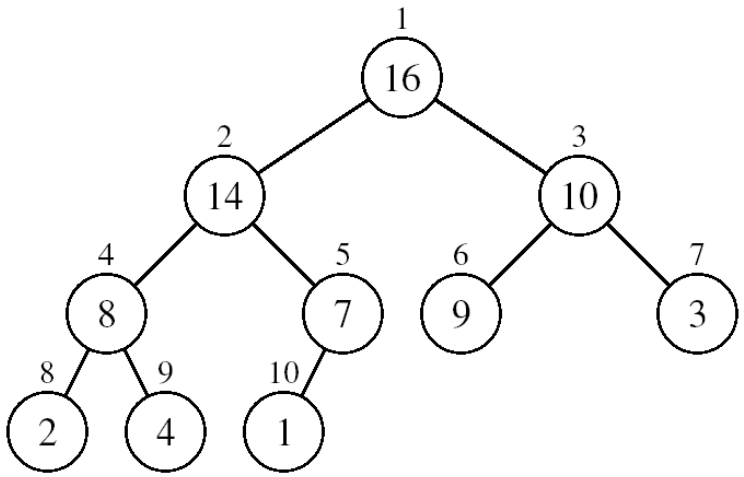
  2) Estrutural: o valor armazenado em cada nó não é menor que os de seus filhos.

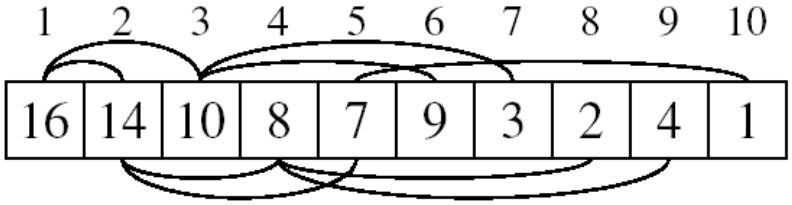
Exemplo:




- *Observação*: há também o caso análogo, em que o valor de cada nó não é maior que os de seus filhos.

# Representação de *heap* com vetor

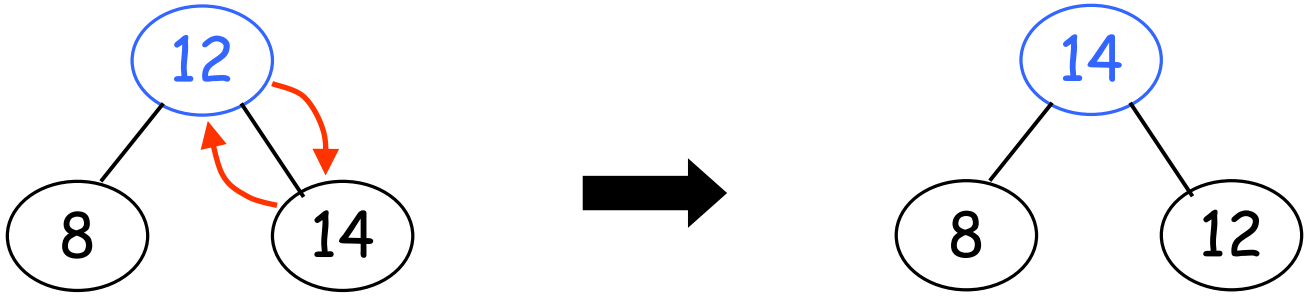



- Armazenamento de um *heap* com n elementos em um vetor v:
  - A raiz está em v[1]
  - O filho esquerdo de v[i] é v[2i]
  - O filho direito de v[i] é v[2i+1]
- O pai de v[i] será v[$\lfloor i/2 \rfloor$].
- Os elementos do subvetor v[($\lfloor n/2 \rfloor$+1) .. n] são as folhas.
- É fácil constatar que a altura do *heap* é $\Theta(\log n)$.

# Algoritmo *Sift*

- Dado um *heap*, suponhamos que ocorra uma alteração no valor presente na sua raiz.
- Caso ela perca a propriedade estrutural, poderá recuperá-la trocando de valor com o seu filho maior.
- Isso pode ser feito através do algoritmo *Sift* :




Nó azul não tem a propriedade estrutural

Nó azul tem a propriedade estrutural

- Como o filho trocado também pode perder a propriedade estrutural, será preciso chamar *Sift* para ele.

# Algoritmo *Sift*

Reorganiza "para baixo" o *heap* alterado na posição i:

```
Sift(i, n){
    esq = 2i;
    dir = 2i+1;
    maior = i;
    if (esq <= n && v[esq] > v[i])
        maior = esq;
    if (dir <= n && v[dir] > v[maior])
        maior = dir;
    if (maior != i) {
        aux = v[i];
        v[i] = v[maior];
        v[maior] = aux;
        Sift(maior, n);
    }
}
```

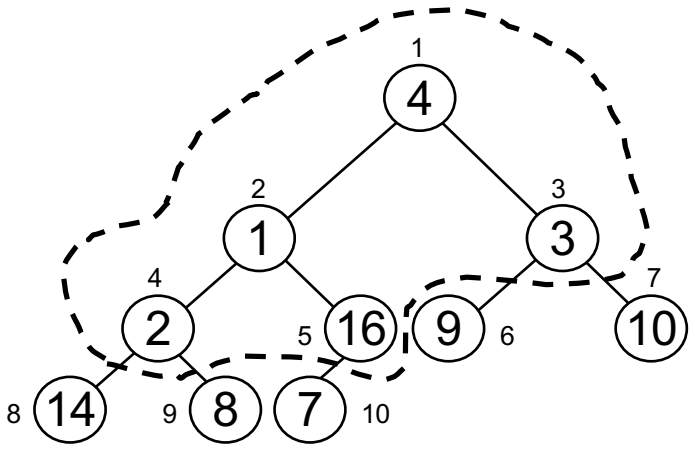
Tempo: $O(\log n)$

Exercício: reescrever *Sift* em formato não recursivo.

# Transformação de um vetor em um *heap*

- O algoritmo *Build* transforma o vetor v[1..n], já inicializado, em um *heap* de tamanho n.
- Como as posições entre $\lfloor n/2 \rfloor+1$ e n são as folhas do *heap*, basta aplicar *Sift* entre as posições $\lfloor n/2 \rfloor$ e 1, nessa ordem.
- Exemplo:

| v | 4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |



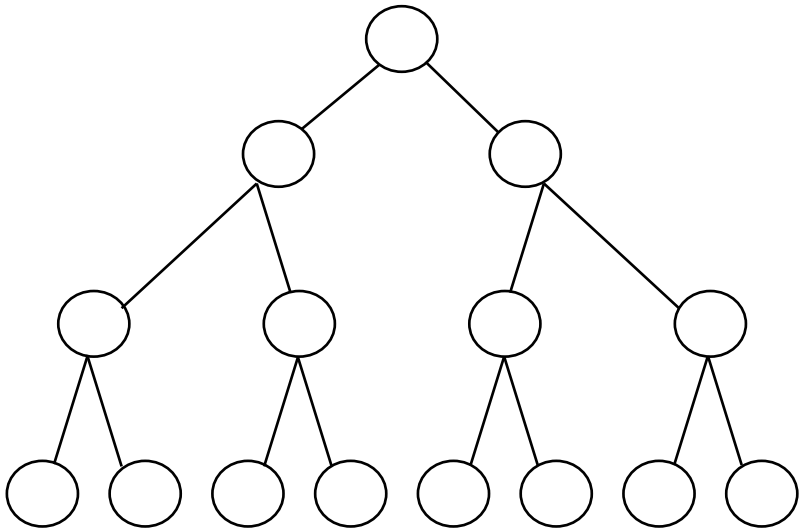

```
Build(v) {
    for (i=⌊n/2⌋; i>0; i--)
          Sift(i, n);
}
```

Complexidade de tempo: O(n.log n) ?

# Complexidade de tempo de *Build*

- O tempo gasto por *Sift(i, n)* é proporcional à altura do nó i.
- O pior caso ocorre com a árvore completa:

| Altura | Nível | Número de nós |
|---|---|---|
| $h = \lfloor \lg n \rfloor$ | i = 0 | $2^0$ |
| h - 1 | i = 1 | $2^1$ |
| h - 2 | i = 2 | $2^2$ |
| h - 3 | i = 3 | $2^3$ |



$$T(n) = 2^0h + 2^1(h-1) + \ldots + 2^h(h-h) \qquad T(n) = \sum_{i=0}^{h} 2^i(h-i)$$

# Complexidade de tempo de *Build*

Tempo de pior caso, correspondente a uma árvore completa com n nós e altura h:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{h} 2^i (h - i)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $2^h$:

$$= \sum_{i=0}^{h} \frac{h - i}{2^{h-i}} 2^h$$

Troca de variáveis (k = h - i):

$$= 2^h \sum_{k=0}^{h} \frac{k}{2^k}$$

Sabemos que h = lg n e que essa somatória é menor que a correspondente somatória até ∞:

$$\leq n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Sabemos também que essa somatória é menor que 2:

$$= \Theta(n)$$

# Filas de prioridade

- Fila de prioridade é um tipo abstrato de dados com as seguintes operações:
  - ***Max*** (ou ***Min***): retorna o elemento com prioridade máxima (ou mínima) presente na fila
  - ***ExtractMax*** (ou ***ExtractMin***): extrai e retorna o elemento de prioridade máxima (ou mínima) presente na fila
  - ***Modify(k, x)*** : atribui prioridade x ao elemento que esteja na posição k da fila
  - ***Insert(x)*** : insere na fila um elemento com prioridade x
- *Heap* é uma boa implementação para filas de prioridade.
- Supomos que o *heap* utilize um vetor v, e que a variável `size` armazene o seu tamanho corrente.

# Operação *Max*

- Passos:
  - Basta retornar o elemento armazenado na primeira posição do *heap*.

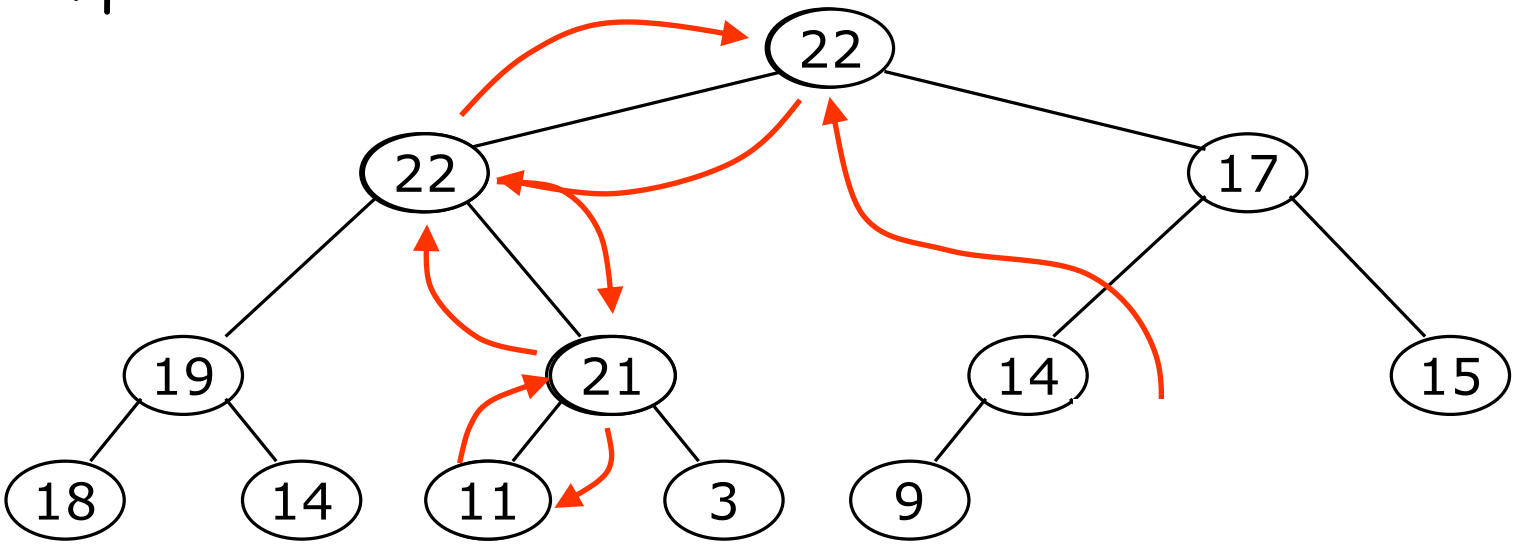
```
Max(){
    return v[1];
}
```

Tempo: *constante*

Um *heap* com operação ***Min*** é análogo.

# Remoção da raiz

- Remover a raiz equivale a extrair o elemento de prioridade máxima presente no *heap*.
- Em seguida, colocaremos em seu lugar a última folha e recuperaremos a propriedade estrutural com a aplicação de vários *Sifts*.
- Exemplo:



# Operação *ExtractMax*

- Passos:

  1) Substituir a raiz pelo último elemento do *heap*.

  2) Decrementar o seu tamanho atual.

  3) Chamar *Sift* desde a raiz.

```
ExtractMax(){
   if (size < 1)
     Erro("heap underflow");
   else {
      max = v[1];
      v[1] = v[size--];
      Sift(1, size);
      return max;
   }
}
```

Tempo: *logarítmico*

# Operação *Modify(k, x)*

- Passos:

  1) Modificar a prioridade da posição k.

  2) Se a propriedade estrutural for perdida, ir trocando os elementos para cima ou para baixo da árvore, até "consertar" o *heap*.

```
Modify(k, x){
  if (k > size || k < 1)
        Erro("Index error");
  else {
     v[k] = x;
     while (k > 1 && v[⌊k/2⌋] < v[k]) { //conserta para cima
           aux = v[k];
           v[k] = v[⌊k/2⌋];
           v[⌊k/2⌋] = aux;
           k = ⌊k/2⌋;
     }
     Sift(k, size); // ou conserta para baixo
  }
}
```

Tempo: *logarítmico*

# Operação *Insert(x)*

- Passos:
  1) Aumentar uma posição no final do *heap*.
  2) Chamar *Modify* nessa posição, que equivale a inserir um elemento com a prioridade x.

```
Insert(x){
    Modify(++size, x);
}
```

Tempo: *logarítmico*

# Sumário

- A tabela abaixo indica as complexidades de tempo das operações de uma fila de prioridades implementada com um *heap* :

| ***Operação*** | ***Tempo*** |
|---|---|
| ***Build*** | Linear |
| ***Max*** (ou ***Min***) | Constante |
| ***ExtractMax*** (ou ***ExtractMin***) | Logarítmico |
| ***Modify*** | Logarítmico |
| ***Insert*** | Logarítmico |

# Exercícios

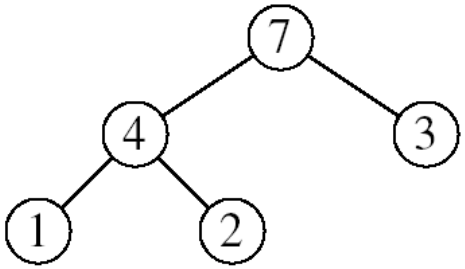
- Implemente uma fila de prioridades utilizando lista ligada e calcule a complexidade de tempo de cada uma das suas operações.
- Compare esses resultados com a implementação que utiliza *heap*.

# *HeapSort* (Williams, 1964)

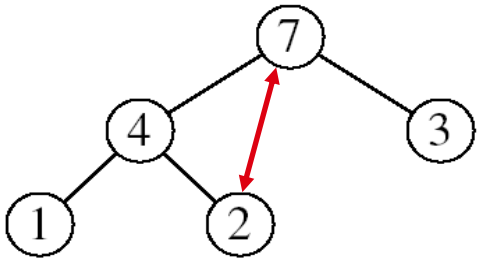
- A estrutura de *heap* permite a elaboração de um eficiente algoritmo de ordenação.
- Ideia:
  1) Transformar o vetor inicial em um *heap*.
  2) Laço de repetição:
     a) Trocar a raiz (elemento de valor máximo) com o último elemento do *heap*.
     b) Desconsiderar esse último elemento.
     c) Chamar *Sift* para os demais elementos do vetor.

# Exemplo

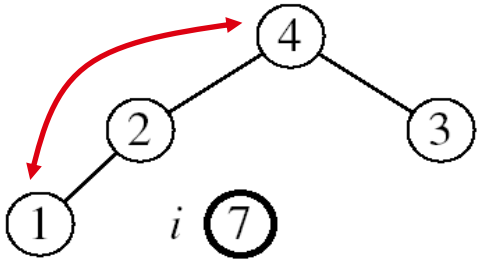
*Heap* já construído:



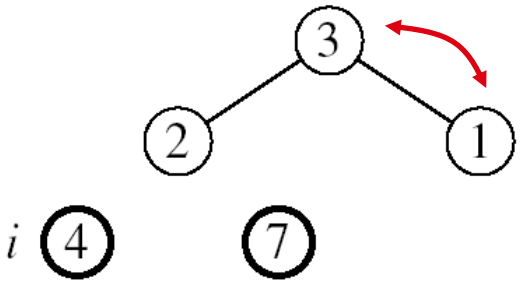

| 7 | 4 | 3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|



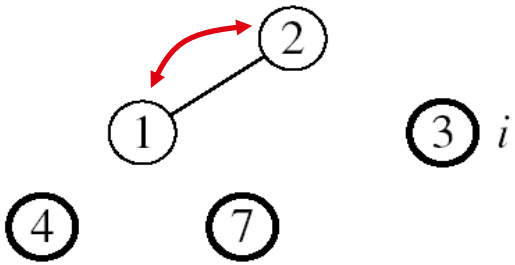

Sift(1, 4)



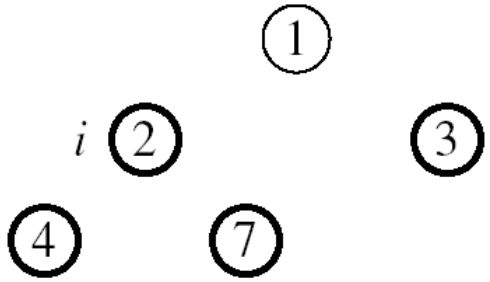

Sift(1, 3)




Sift(1, 2)




Sift(1, 1)




| 1 | 2 | 3 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|

# Algoritmo *HeapSort*

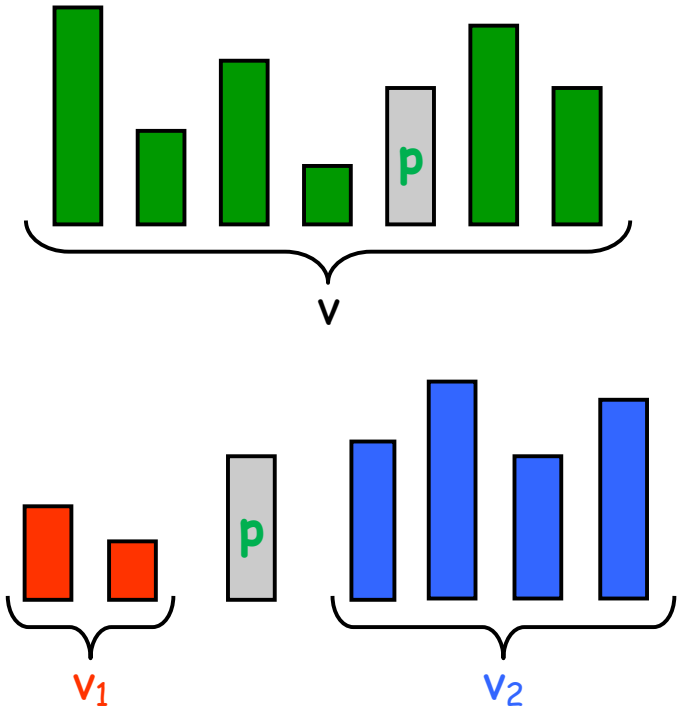
```
HeapSort(v) {
    Build(v);
    for (i=n; i>1; i--) {
        aux = v[i];
        v[i] = v[1];
        v[1] = aux;
        Sift(1, i-1);
    }
}
```

- Tempo de pior caso:
  - *Build* : $\Theta(n)$
  - n-1 *Sifts* : $\Theta(n.\log n)$
- Total: $\Theta(n.\log n)$

Dentre os algoritmos de ordenação baseados em comparação, *HeapSort* é ótimo em termos de complexidade de tempo e em termos de complexidade de espaço extra

# *QuickSort* (Hoare, 1961)

- Na prática, *QuickSort* é o algoritmo de ordenação mais rápido.
- Também segue o paradigma da *Divisão-e-Conquista*.
- Divisão:
  1) Escolha um elemento p para ser o pivô em v.
  2) Particione v – {p} em dois grupos distintos:
     - $v_1 = \{x \in v - \{p\} \mid x < p\}$
     - $v_2 = \{x \in v - \{p\} \mid x \geq p\}$
- Conquista: ordene recursivamente $v_1$ e $v_2$.
- Combinação: junte $v_1$, p e $v_2$ para obter v ordenado.



# Algoritmo básico para o *QuickSort*

```
QuickSort(min, max) {
    if (min < max) {
        p = Partition(min, max);
        Quicksort(min, p-1);
        Quicksort(p+1, max);
    }
}
```

- Pontos-chave: a escolha do pivô e o algoritmo de particionamento.
- Há várias técnicas eficientes.

# Um possível particionamento

- Escolha como pivô o primeiro elemento do vetor.
- Começando da esquerda, encontre o primeiro elemento do vetor igual ou maior que o pivô (ou seja, um valor que deverá ir para o lado direito do vetor).
- Vindo do direita, encontre o primeiro elemento menor que o pivô (idem: deverá ir para o lado esquerdo).
- Troque esses dois elementos.
- Continue o mesmo procedimento até que os pontos de busca se encontrem em alguma posição do vetor.
- No final, troque o pivô com o último valor encontrado vindo da direita.

# Exemplo

- Escolha do pivô: 4 3 6 9 2 4 3 1 2 1 4 9 3 5 6
- Busca: 4 3 6 9 2 4 3 1 2 1 4 9 3 5 6
- Troca: 4 3 3 9 2 4 3 1 2 1 4 9 6 5 6
- Busca: 4 3 3 9 2 4 3 1 2 1 4 9 6 5 6
- Troca: 4 3 3 1 2 4 3 1 2 9 4 9 6 5 6
- Busca: 4 3 3 1 2 4 3 1 2 9 4 9 6 5 6
- Troca: 4 3 3 1 2 2 3 1 4 9 4 9 6 5 6
- Busca: 4 3 3 1 2 2 3 1 4 9 4 9 6 5 6
- Troca com o pivô: 1 3 3 1 2 2 3 4 4 9 4 9 6 5 6

Posição do pivô

# Algoritmo para particionamento

```
int Partition(left, right) {
    pivot = v[left];
    l = left + 1;
    r = right;
    while (true) {
        while (l < right && v[l] < pivot) l++;
        while (r > left && v[r] >= pivot) r--;
        if (l >= r) break;
        v[l] ↔ v[r];
    }
    v[left] = v[r];
    v[r] = pivot;
    return r;
}
```

Tempo: $\Theta(n)$

Mostrar animação
(o pivô será o último elemento)

# Análise de tempo do *QuickSort*

- T(n): tempo do *QuickSort* para ordenar v[1..n]
- $T(n) = \Theta(n) + T(i) + T(n-i-1)$, onde $0 \leq i < n$ (obs.: $i = |v_1|$)
- Melhor caso: $i = n/2$ (balanceamento perfeito)
  - $T(n) = T(n/2) + T((n/2)-1) + \Theta(n) \approx 2T(n/2) + \Theta(n)$
  - $T(n) = \Theta(n.\log n)$
- Pior caso: $i = 0$ ou $i = n-1$
  - $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$
  - $T(n) = \Theta(n^2)$
- No pior caso, o *QuickSort* é quadrático!!
- Comprove essas complexidades resolvendo as recorrências.

# Casos práticos

- Embora haja casos em que o desempenho do *QuickSort* seja quadrático, seu tempo médio é O(n.log n).
- Além disso, as constantes são tão boas que o *QuickSort* é o melhor algoritmo de ordenação conhecido.
- No mundo real, a grande maioria das ordenações é realizada através deste algoritmo, principalmente quando n é grande.
- Para se encontrar um particionamento ótimo, seria preciso escolher a mediana como pivô. E para encontrar a mediana, seria necessário ordenar o vetor...
- Na verdade, em determinadas condições é possível encontrar a mediana em tempo Θ(n), mas com um algoritmo nada trivial. Isso garantiria tempo total de pior caso Θ(n.log n).

# Mediana de três

- Uma alternativa mais simples é encontrar a chamada *mediana de três*.
- Comparam-se três elementos do vetor: o primeiro, o central e o último:
  - O pivô será a mediana entre os três.
  - Este valor é trocado com o que estava na posição inicial e o particionamento é feito do mesmo modo anterior.
- Quando esta técnica é utilizada, tornam-se muito raros os casos em que o *QuickSort* gasta tempo quadrático.

# Pilha de execução

- Nos piores casos do *QuickSort* (vetor ordenado, por exemplo), devido às chamadas recursivas, a pilha de execução chega a exigir espaço $\Theta(n)$.
  - Isso ocorre porque pode haver até n chamadas pendentes.
- Dependendo do tamanho do vetor, esse espaço pode se esgotar, e o programa será abortado...
- Através de uma pequena alteração no código do *QuickSort*, é possível eliminar uma das chamadas recursivas:
  - A ideia é chamar a recursão sempre na menor metade de cada subvetor.
  - Desse modo, cada subvetor tratado na pilha de execução será menor que a metade do subvetor imediatamente anterior.
  - Isso garante que a pilha de execução tenha tamanho $O(\log n)$.

# *QuickSort* com uma única recursão

```
QuickSort(min, max) {
    while (min < max) {
        p = Partition(min, max);
        if (p-min < max-p) {
            QuickSort(min, p-1);
            min = p+1;
        }
        else {
            QuickSort(p+1, max);
            max = p-1;
        }
    }
}
```

- O tamanho da pilha de execução passa a ser $O(\log n)$: o caso que consome mais espaço é aquele em que o vetor é sempre quebrado em duas metades iguais, gastando tempo $\Theta(n.\log n)$.
- Por outro lado, nos casos em que o algoritmo gasta tempo $\Theta(n^2)$, a pilha de execução cresce apenas $\Theta(1)$.

# Análise do caso médio

- Seja T(n) o número médio de comparações realizadas pelo *QuickSort* em um vetor com n elementos. Sabemos que o número médio de trocas entre elementos desse vetor será no máximo igual a T(n).
- Supomos que os particionamentos do vetor (0:n-1, 1:n-2, …, n-2:1, n-1:0) ocorrem com a mesma probabilidade 1/n.

$$T(n) = (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T(i) + T(n-i-1))$$

$$T(n) = (n-1) + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

- Por indução em n, iremos provar que $T(n) \leq 2n.\ln n$.
- Utilizaremos o seguinte fato, válido para uma função f(x) crescente:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_{1}^{n} f(x)dx$$

# Análise do caso médio

$$T(n) = (n-1) + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

Número médio de comparações

$$T(n) \leq (n-1) + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 2i.\ln i$$

Aplicação da hipótese de indução

$$T(n) \leq (n-1) + \frac{2}{n}\int_{1}^{n} (2x.\ln x)dx$$

Integral é limite superior para a soma dos pontos internos

$$T(n) \leq (n-1) + \frac{2}{n}\left(n^2 \ln n - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Cálculo da integral

$$T(n) \leq 2n.\ln n$$

Portanto, T(n) = O(n.log n)

# *QuickSort versus MergeSort*

- Tanto o *QuickSort* como o *MergeSort*:
  - são O(n.log n) no caso médio;
  - possuem duas chamadas recursivas.
- Além disso, há casos em que o *QuickSort* é quadrático, enquanto o *MergeSort* é sempre Θ(n.log n).
- Por que o *QuickSort* é mais rápido que o *MergeSort*?
  - Seu laço interno consiste apenas de incrementos, decrementos, comparações e algumas atribuições (são operações rápidas).
  - Não possui tanto processamento como o *MergeSort*, que manipula subvetores.

# Exercícios

```
Partition2(left, right) {
    x = v[right];
    i = left - 1;
    for (j=left; j<right; j++)
         if (v[j] <= x) {
              aux = v[++i];
              v[i] = v[j];
              v[j] = aux;
         }
    v[i+1] ↔ v[right];
    return i+1;
}
```

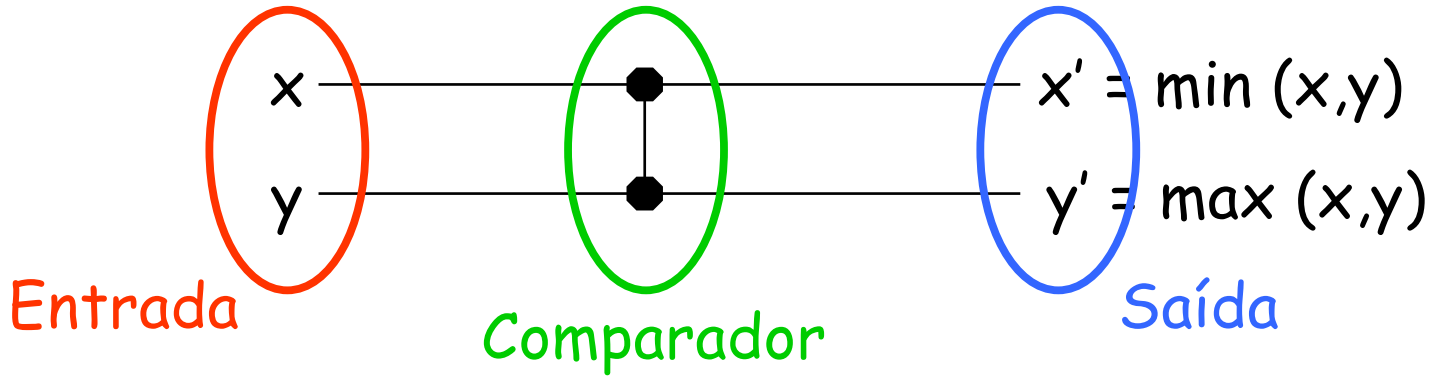
- O que faz este algoritmo de particionamento do *QuickSort*?
- Ele funciona?

# Exercícios

- Implemente todos os algoritmos apresentados: *BubbleSort*, *SelectionSort*, *InsertionSort*, *MergeSort*, *RadixSort*, *HeapSort* e *QuickSort*.
- Crie um arquivo com milhares de números inteiros gerados aleatoriamente, e através dele compare os tempos de execução desses algoritmos.

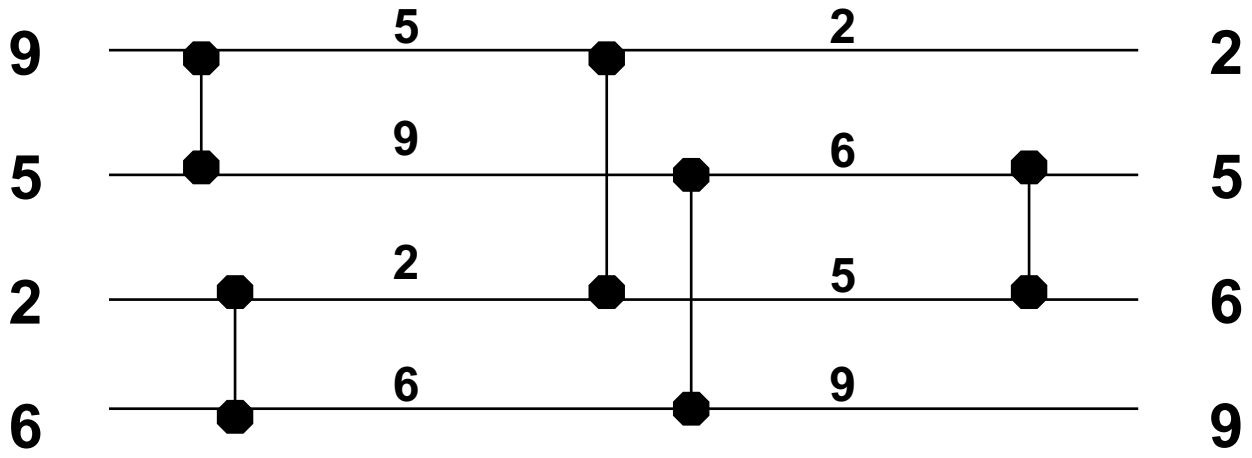
# Redes de comparação

- Uma rede (ou circuito) de comparação é composta de ligações e comparadores.
  - As ligações transmitem valores de um lugar para outro.
  - Os comparadores recebem duas entradas e produzem duas saídas.
- Uma rede de comparação que sempre ordena suas entradas é chamada de *rede de ordenação*.
- Exemplo:



# Redes de ordenação

- Um exemplo:




- Evidentemente, nem todas as redes de comparação são de ordenação.
- Considerando que determinadas comparações possam ser feitas em paralelo, o nível de profundidade de uma rede é o número de passos necessários para que a saída seja calculada.

# *Princípio Zero-Um*

- Se uma rede de comparação com n entradas ordena corretamente todas as $2^n$ possíveis sequências formadas por n bits, então também ordenará qualquer sequência com n números reais.
- Este princípio facilita a elaboração de redes de ordenação, pois basta considerar apenas as entradas binárias.
- Concretamente, vamos utilizá-lo para apresentar a rede de ordenação bitônica (*Batcher*, 1968).

# Demonstração do *Princípio Zero-Um*

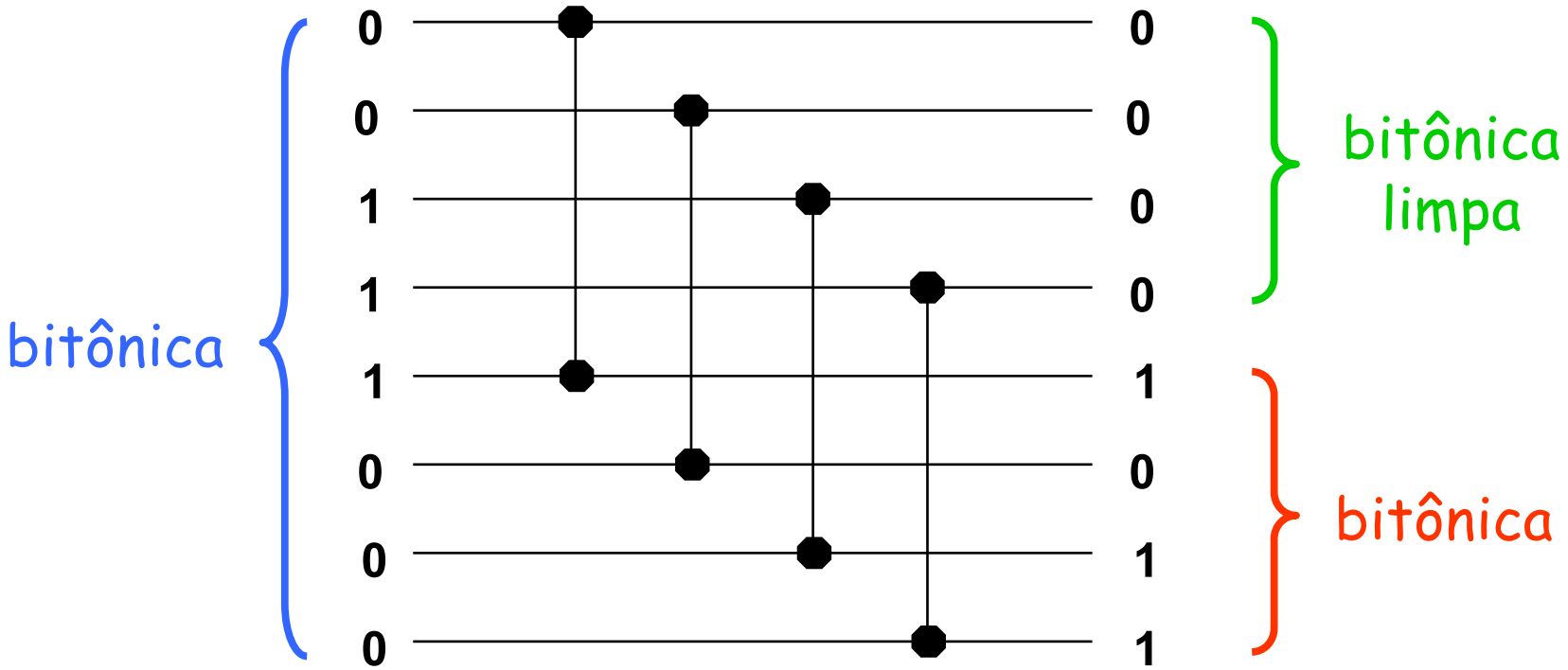
- Numa função f monotônica crescente, se $x \leq y$ então $f(x) \leq f(y)$.
- Portanto, $\min\{f(x),f(y)\} = f(\min\{x,y\})$ e $\max\{f(x),f(y)\} = f(\max\{x,y\})$.
- Considerando uma função f monotônica crescente, se uma determinada rede de ordenação recebe como entrada a sequência $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ e produz a saída $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, então essa mesma rede, se tiver como entrada $\langle f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n) \rangle$, irá produzir a saída $\langle f(b_1), f(b_2), \ldots, f(b_n) \rangle$.
  - Isso pode ser demonstrado por indução na profundidade da rede, usando os resultados para min e max mostrados acima.
- Suponhamos que o *Princípio Zero-Um* não seja válido. Em outras palavras, essa rede ordena corretamente todas as sequências de n bits, mas existe uma sequência não binária $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, com $a_i < a_j$, que, se for recebida como entrada, irá produzir uma saída onde $a_j$ vem antes de $a_i$.
- Seja a função monotônica crescente definida como $f_i(x) = 0$ se $x \leq a_i$, e $f_i(x) = 1$ se $x > a_i$. Portanto, essa rede não ordenará corretamente a entrada $\langle f_i(a_1), f_i(a_2), \ldots, f_i(a_n) \rangle$: contradição!

# Sequência binária bitônica

- Uma sequência binária é chamada *bitônica* se cresce monotonicamente e depois decresce, ou vice-versa.
- Únicos casos possíveis:
  - $0^i\,1^j\,0^k$, com $i, j, k \geq 0$
  - $1^i\,0^j\,1^k$, com $i, j, k \geq 0$
- Uma sequência binária bitônica pode ser vista como a justaposição de duas sequências binárias ordenadas, sendo que a segunda está na ordem contrária da primeira.

# Meio-limpador

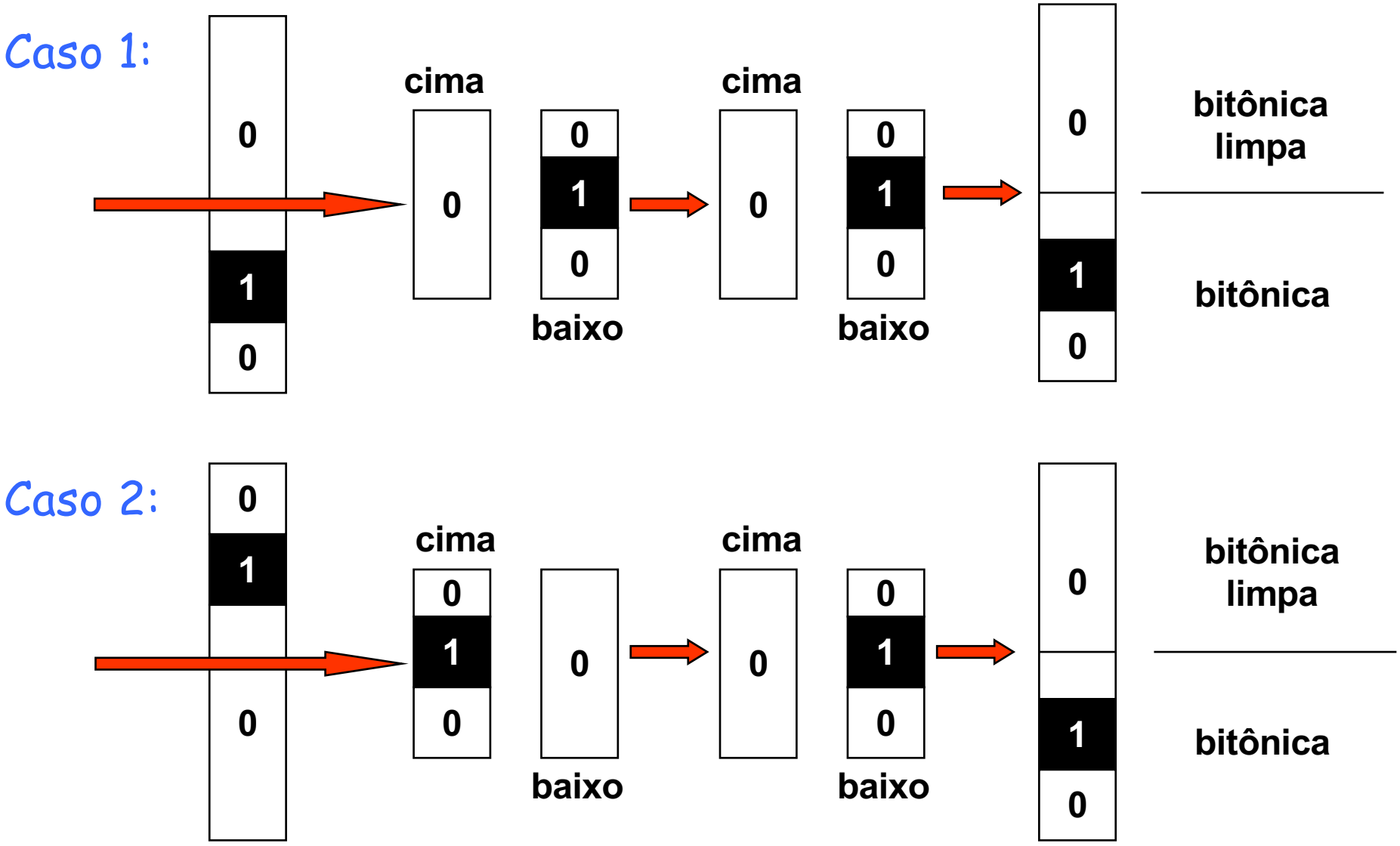
- Um meio-limpador (*half-cleaner*) é uma rede de comparação com n entradas e um único nível de profundidade, onde a linha i é comparada com a linha i + n/2, para i = 1, 2, …, n/2. Assume-se que n é par.
- Meio-limpador de tamanho 8:



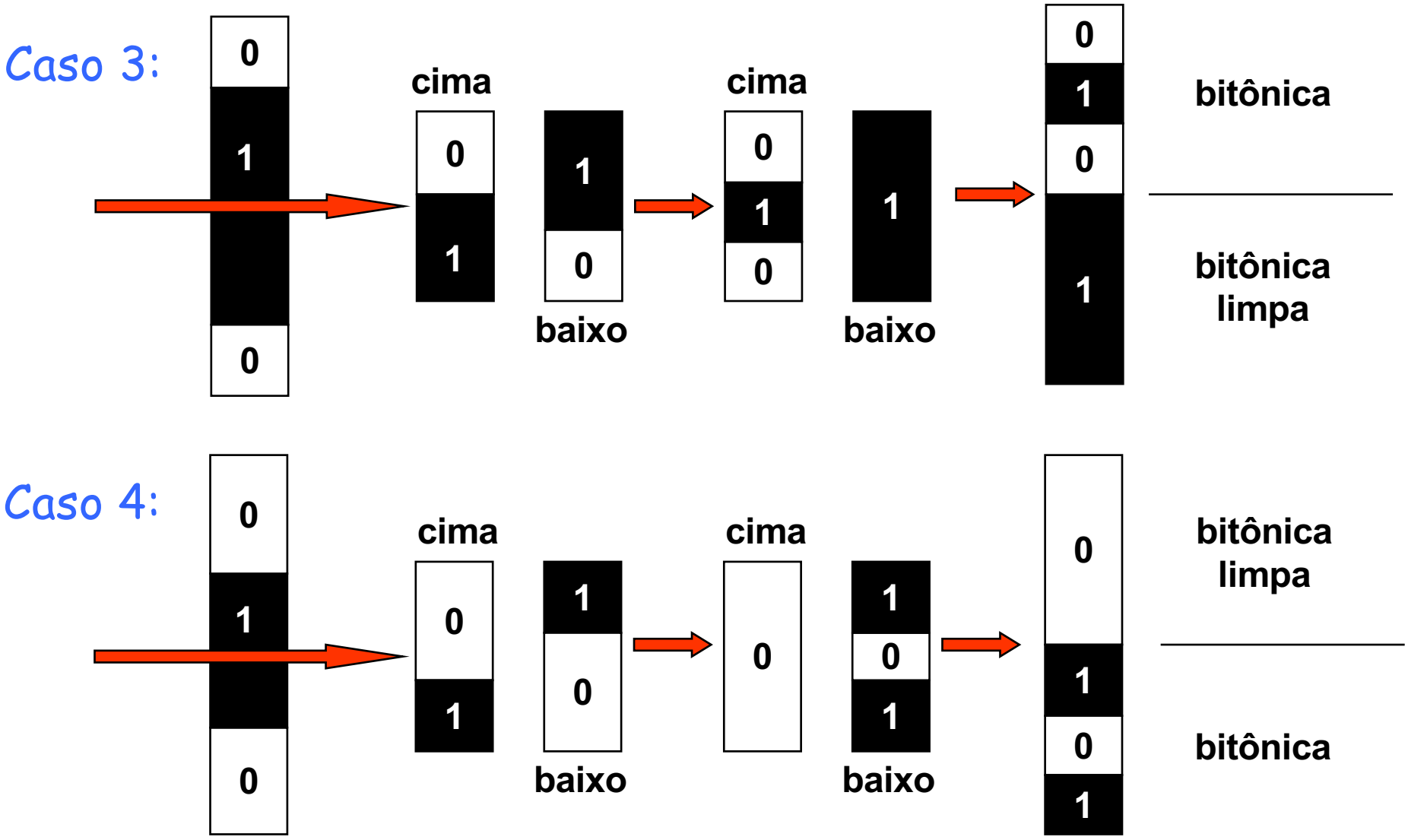
# Propriedades de um meio-limpador

- Se um meio-limpador recebe como entrada uma sequência binária bitônica, então sua saída satisfará três propriedades:
  1) Pelo menos uma metade será limpa (somente 0's ou 1's).
  2) As metades de cima e de baixo serão bitônicas.
  3) Todos os elementos da metade de cima serão menores ou iguais aos elementos da metade de baixo.
- Demonstração:
  - Há 8 possíveis casos. Veremos a seguir os 4 casos que correspondem a $0^i\,1^j\,0^k$, com i, j, k ≥ 0.
  - Os casos $1^i\,0^j\,1^k$, com i, j, k ≥ 0, são análogos.
- As duas últimas propriedades sugerem um algoritmo de ordenação *Divisão-e-Conquista*.

# Demonstração (casos $0^i\,1^j\,0^k$)



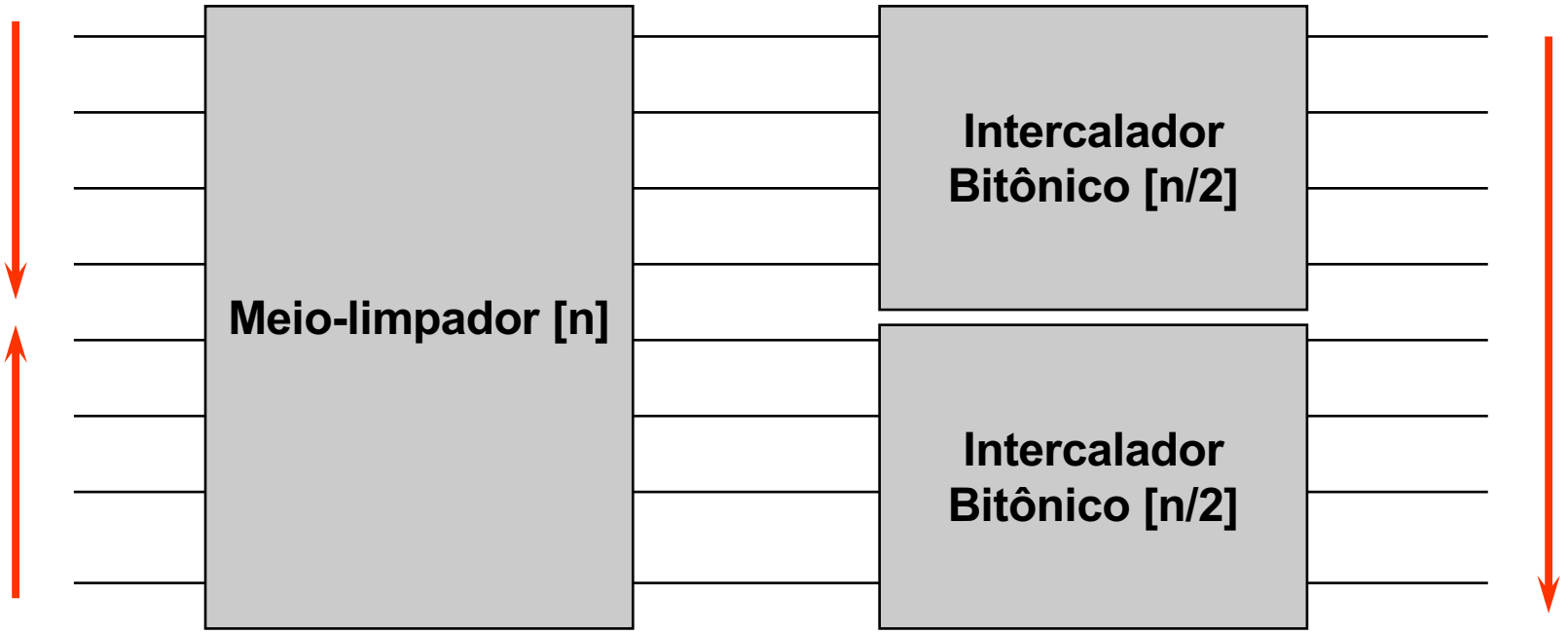
# Demonstração (casos $0^i\,1^j\,0^k$)



# Intercalador bitônico (*bitonic merger*)

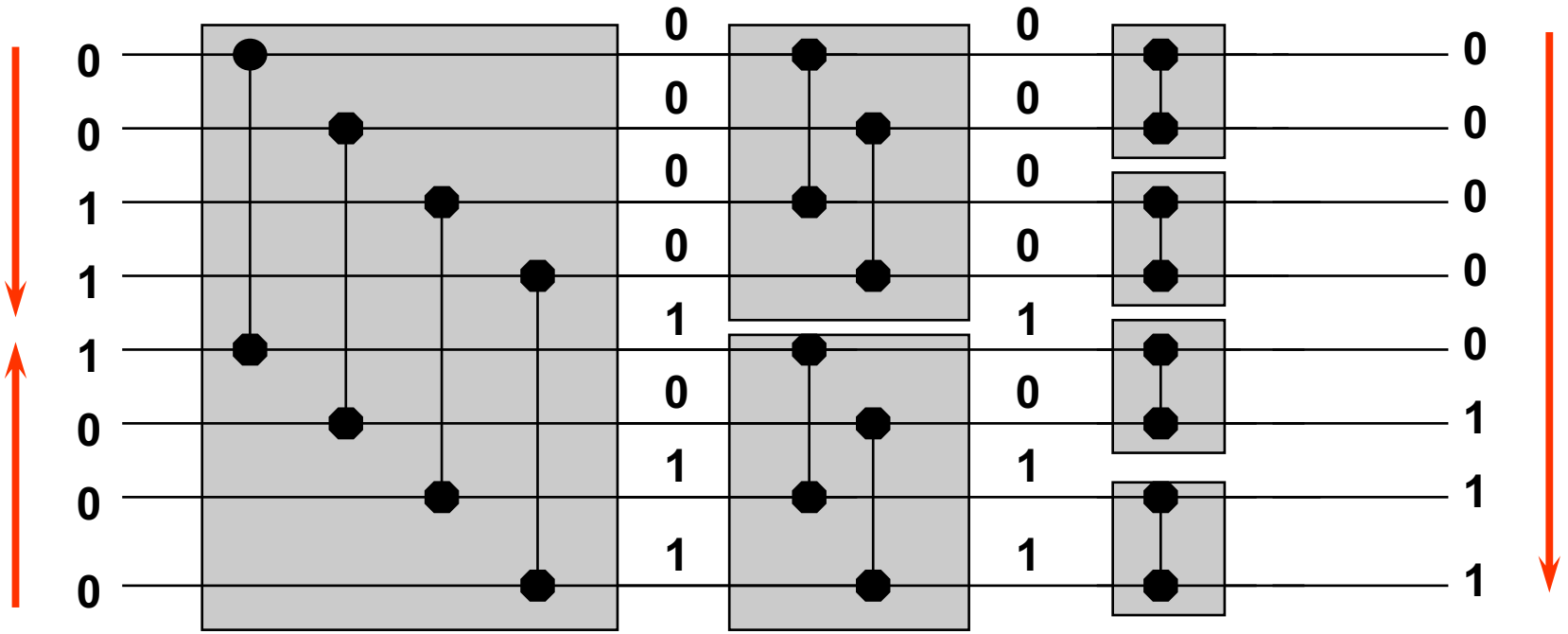
- Um intercalador (*merger*) é um circuito que recebe duas sequências ordenadas e gera uma nova sequência, também ordenada, com todos os elementos das duas primeiras.
- Através de combinações recursivas de meio-limpadores, é possível construir um intercalador bitônico com n entradas:
  - Primeiro estágio: um meio-limpador de tamanho n.
  - Fase seguinte: uso recursivo de um intercalador bitônico com n/2 entradas.

# Esquema de um intercalador bitônico [n]



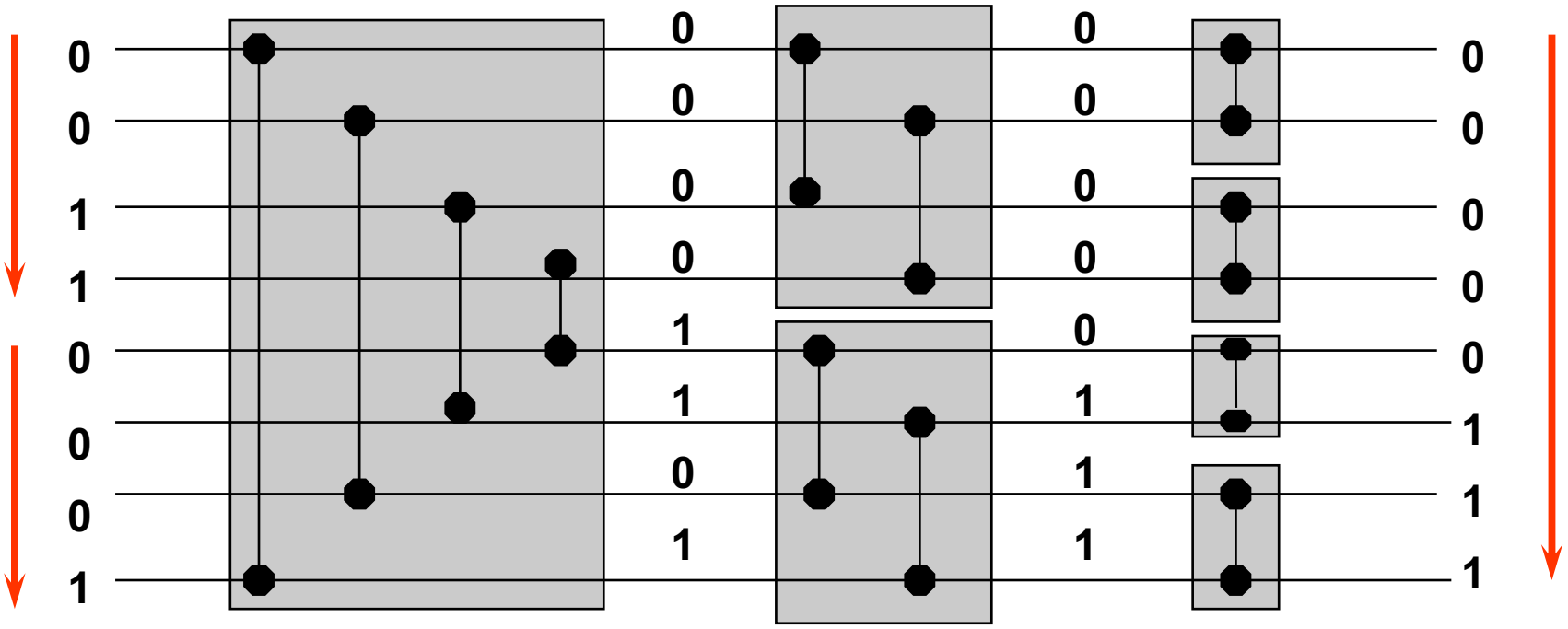

- D(n): profundidade do intercalador bitônico [n]
  - D(1) = 0, D(2) = 1
  - D(n) = 1 + D(n/2), se $n = 2^k$ e $k \geq 1$
  - Logo, D(n) = k = lg n: este seria o tempo da intercalação.

# Intercalador bitônico [8]



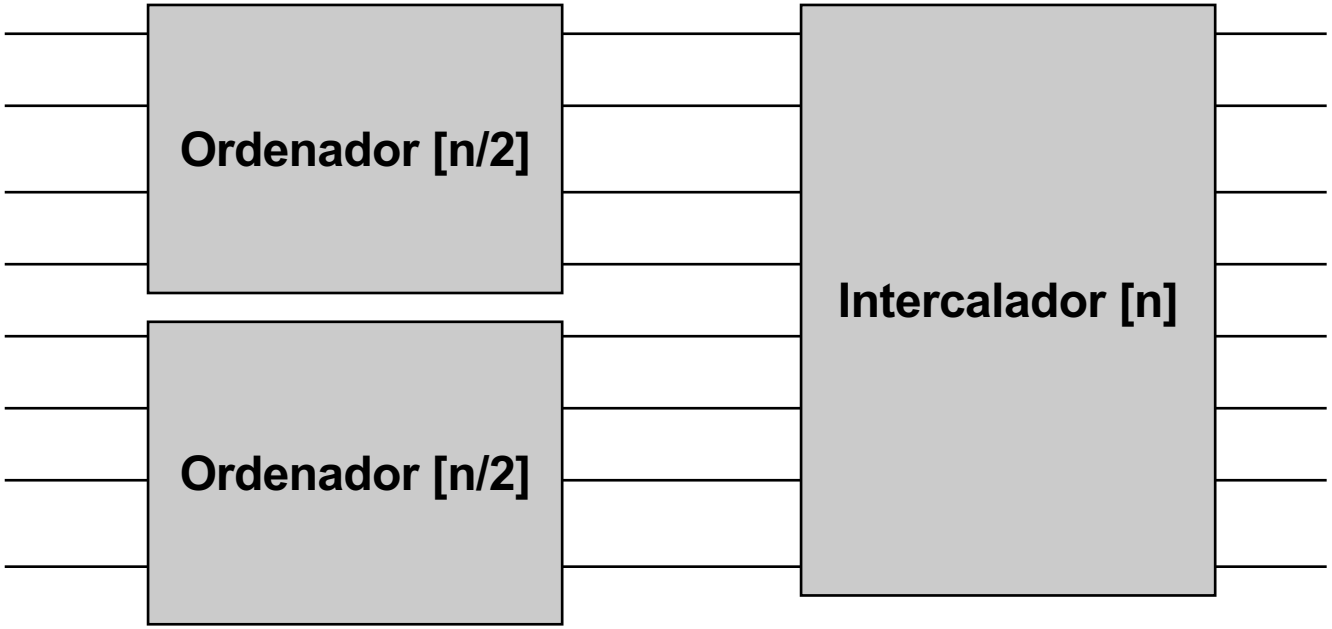
# Intercalador [8]

- É fácil transformar este circuito em um simples intercalador (*merger*).



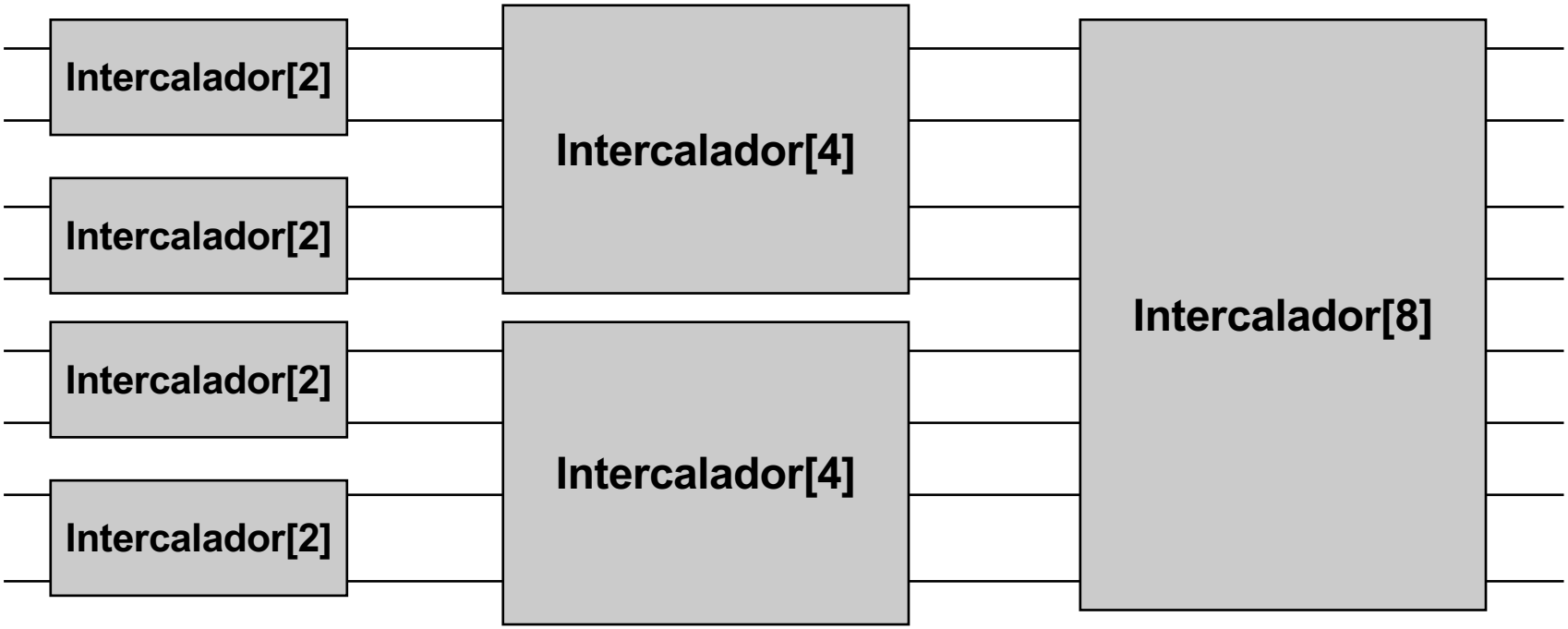
# Uma rede de ordenação

- Também de modo recursivo, podemos construir um Ordenador [n]:

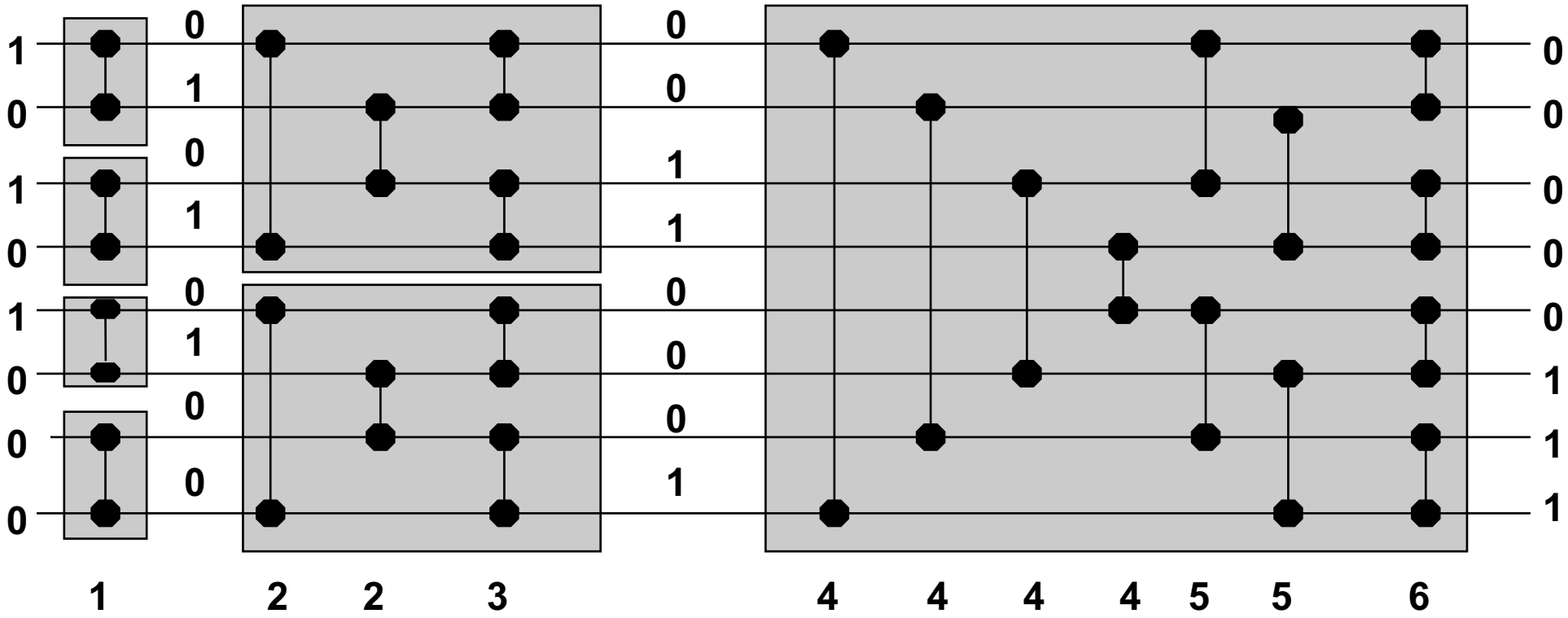



- Tempo de ordenação: $T(n) = T(n/2) + \lg n$
- $T(n) = \Theta(\log^2 n)$

# Ordenador para n=8



# Exemplo para n=8




- Exercícios:
  - Desenhar uma rede de ordenação com 16 entradas.
  - Verificar que essas redes também ordenam números reais.