CES-11

Algoritmos e Estruturas de Dados

Carlos Alberto Alonso Sanches
Juliana de Melo Bezerra

CES-11

- Alguns algoritmos de ordenação
  - Método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- *Lower bound* para a ordenação

CES-11

- Alguns algoritmos de ordenação
  - Método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- *Lower bound* para a ordenação

Alguns algoritmos de ordenação

- A ordenação é o problema mais clássico da computação.
- Inicialmente, veremos algumas das suas resoluções mais simples:
  - Ordenação pelo método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- Consideraremos sempre a ordenação de um vetor v de índices [1..n].

Importante!!

CES-11

- Alguns algoritmos de ordenação
  - Método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- *Lower bound* para a ordenação

Método da bolha (*BubbleSort*)

- É um dos algoritmos mais simples e conhecidos.
- Princípio:
  - Os elementos vizinhos são comparados e, caso estejam fora de ordem, são trocados.
  - A propagação dessas comparações permite isolar o maior (ou o menor) elemento do vetor.
  - Repetindo-se esse processo com as demais posições do vetor, é possível ordená-lo completamente.
  - Este método recebe este nome porque os elementos vão um a um até a sua posição final, de modo semelhante a bolhas que sobem em um tubo com água.

Exemplo para n=8

No esquema abaixo, a bolha "desce"
(como se o tubo estivesse de ponta-cabeça)

1	44	44	12	12	12	12	6	6
2	55	12	42	42	18	6	12	12
3	12	42	44	18	6	18	18	18
4	42	55	18	6	42	42	42	42
5	94	18	6	44	44	44	44	44
6	18	6	55	55	55	55	55	55
7	6	67	67	67	67	67	67	67
8	67	94	94	94	94	94	94	94

Algoritmo

```
BubbleSort(){
     for (i=1; i<n; i++)
          for (j=1; j<=n-i; j++)
               if (v[j] > v[j+1]) {
                    x = v[j];
                    v[j] = v[j+1];
                    v[j+1] = x;
               }
}
```

- É lento, pois só faz comparações entre posições adjacentes.
- Pode ser melhorado com testes intermediários para verificar se o vetor já está ordenado.
- Mesmo assim, gasta tempo $O(n^2)$ no pior caso.

CES-11

- Alguns algoritmos de ordenação
  - Método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- *Lower bound* para a ordenação

Ordenação por seleção (*SelectionSort*)

- Procedimento:
  - Selecione o menor elemento do vetor e troque-o com o que está na posição 1.
  - Desconsiderando a primeira posição do vetor, repita essa operação com as restantes.

Exemplo com n=6

Vetor inicial:

1	2	3	4	5	6
55	62	21	35	48	13
13	62	21	35	48	**55**
13	**21**	**62**	35	48	55
13	21	**35**	**62**	48	55
13	21	35	**48**	**62**	55
13	21	35	48	**55**	**62**

Algoritmo

```
SelectionSort() {
    for (i=1; i<n; i++) {
         min = i;
         for (j=i+1; j<=n; j++)
              if (v[j] < v[min])
                   min = j;
         x = v[min];
         v[min] = v[i];
         v[i] = x;
    }
}
```

Sempre gasta tempo $O(n^2)$

CES-11

- Alguns algoritmos de ordenação
  - Método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- *Lower bound* para a ordenação

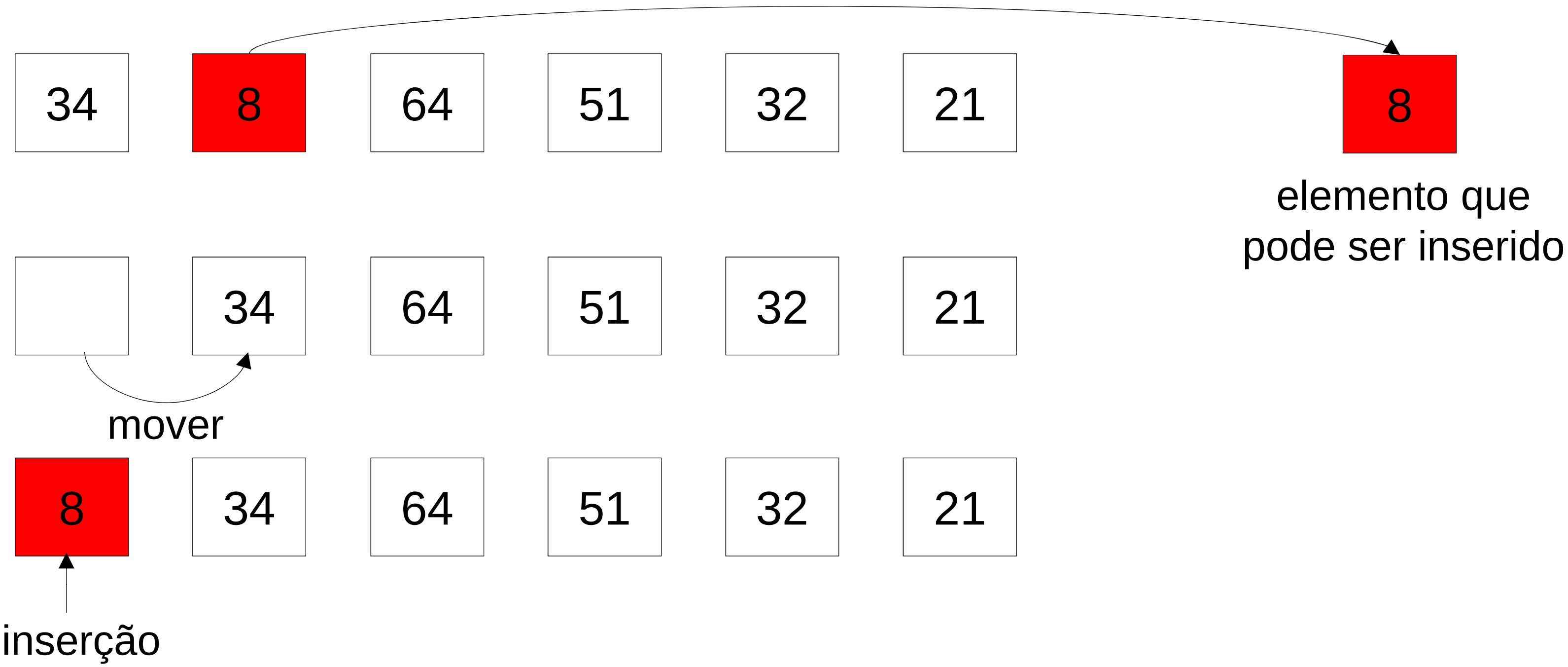
Ordenação por inserção (*InsertionSort*)

- Semelhante ao método de ordenação das cartas de um baralho.
- Procedimento:
  - Verifica-se se o valor da posição 2 do vetor poderia ser colocado na posição 1.
  - Repete-se este processo para as posições subsequentes, verificando-se o local adequado da inserção.
- A inserção de um elemento na sua nova posição exige a movimentação de vários outros.

Exemplo com n=6

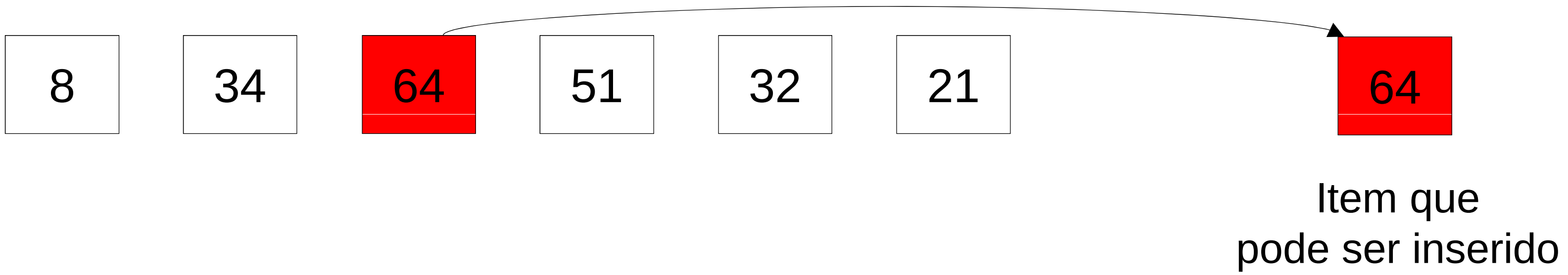
34	8	64	51	32	21

Passo 1



Exemplo com n=6

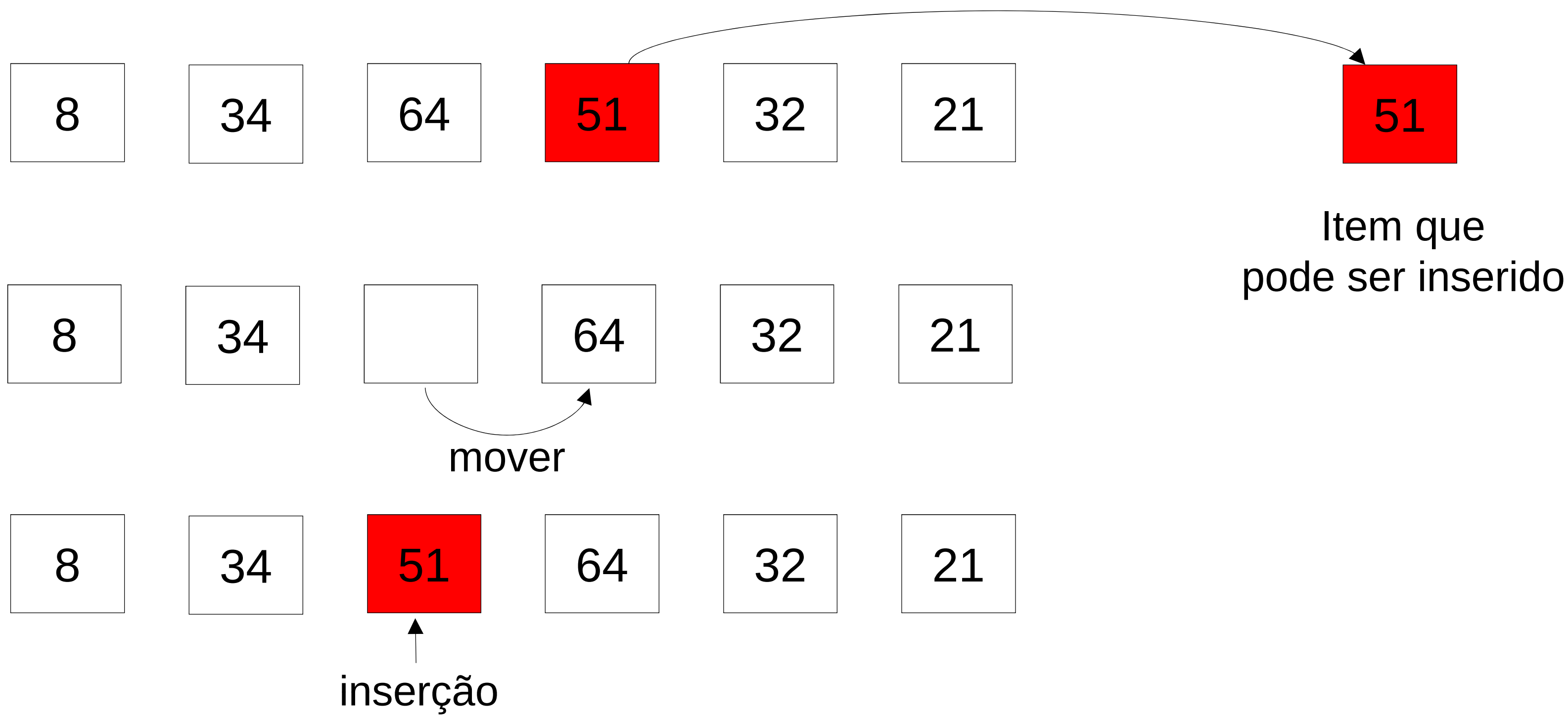
Passo 2



Não ocorre inserção, pois esse elemento já está no seu lugar

Exemplo com n=6

Passo 3

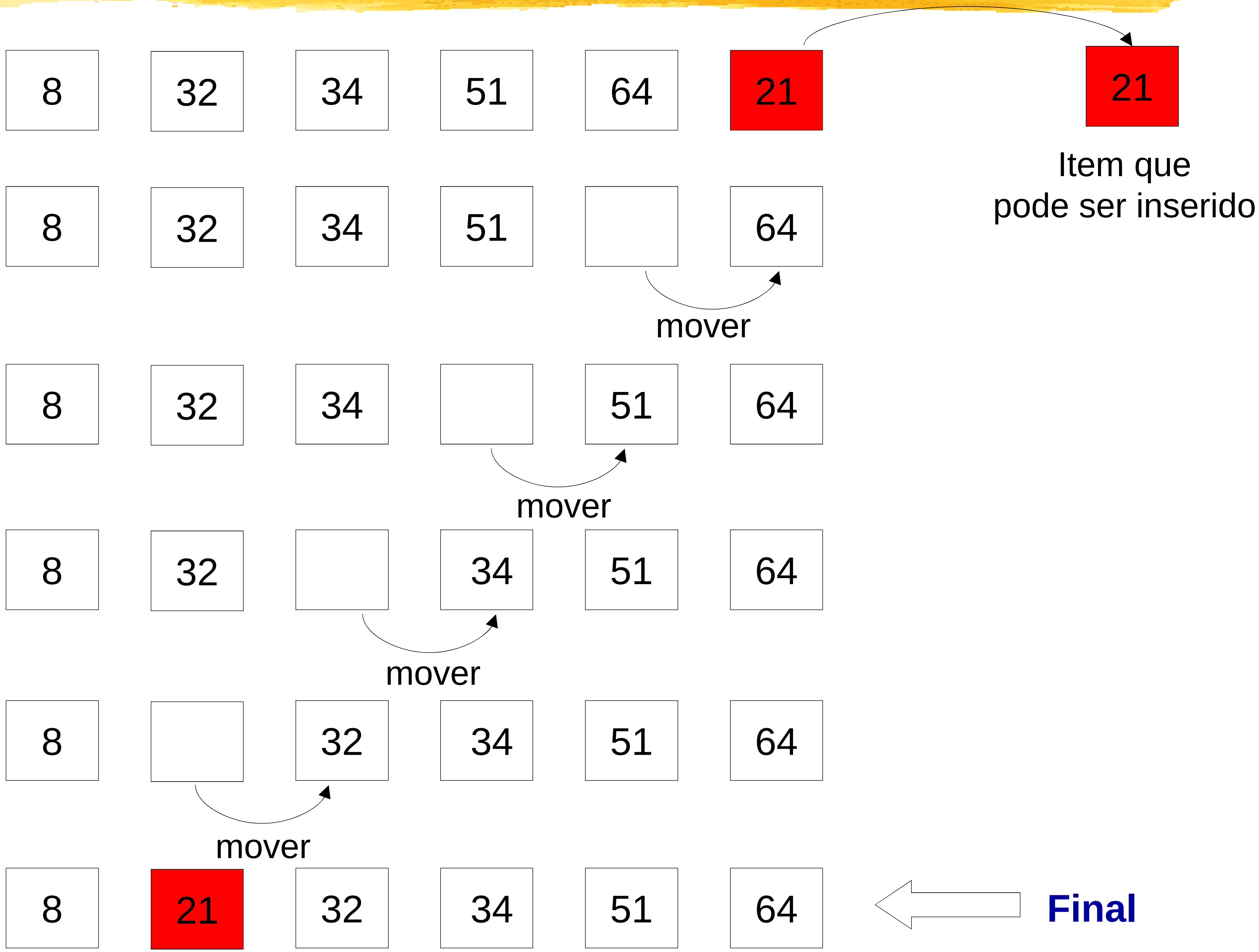


Exemplo com n=6

Passo 4

Exemplo com n=6

Passo 5



Algoritmo

```
InsertionSort() {
    for (i=2; i<=n; i++) {
        x = v[i];
        for (j=i; j>1 && x<v[j-1]; j--)
            v[j] = v[j-1];
        v[j] = x;
    }
}
```

Gasta tempo $O(n^2)$ no pior caso.

CES-11

- Alguns algoritmos de ordenação
  - Método da bolha (*BubbleSort*)
  - Ordenação por seleção (*SelectionSort*)
  - Ordenação por inserção (*InsertionSort*)
- *Lower bound* para a ordenação

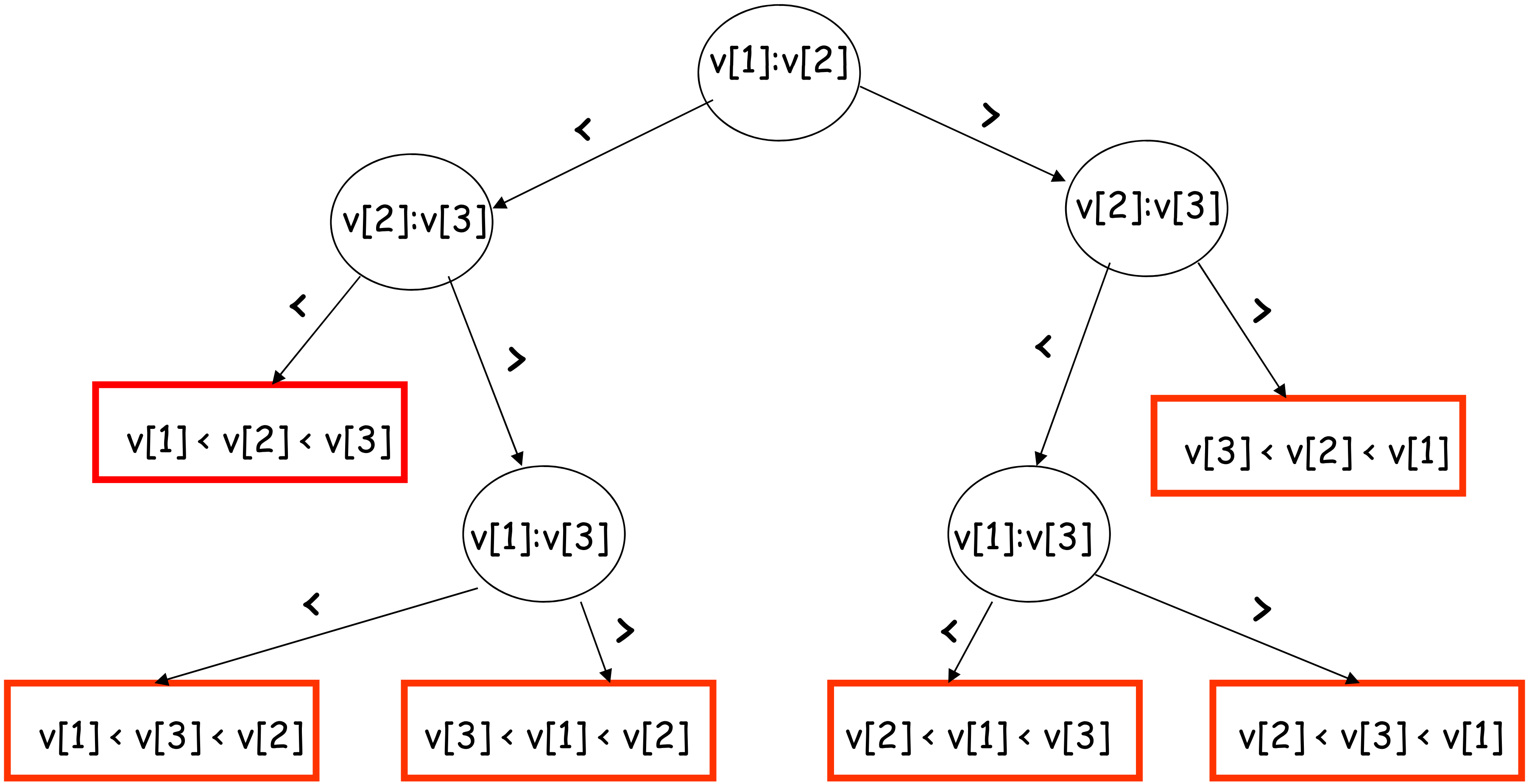
Lower bound para a ordenação

- Até agora, apresentamos algoritmos que ordenam n números em tempo $O(n^2)$. Por enquanto, esse é o nosso melhor resultado prático (*upper bound*) para o problema da ordenação *baseado em comparações*.
- Seria possível calcular um *lower bound* para esse problema?
- Em outras palavras, desejamos encontrar um limite inferior teórico para esse problema, isto é, a mínima complexidade de tempo de quaisquer de suas resoluções algorítmicas.

Árvore de comparações

- Qualquer algoritmo de ordenação *baseado em comparações* pode ser representado em uma árvore binária.
- Na raiz fica a primeira comparação realizada entre dois elementos do vetor; nos filhos, as comparações subsequentes. Deste modo, as folhas representam as possíveis soluções do problema.
- A altura h dessa árvore é o número máximo de comparações que o algoritmo realiza, ou seja, o seu tempo de pior caso.

Exemplo: com 3 valores distintos



Como estamos ordenando 3 elementos, há 3! possíveis resultados

Generalização

- Na ordenação de n elementos distintos, há n! possíveis resultados, que correspondem às permutações desses elementos.
- Portanto, qualquer árvore binária de comparações terá *no mínimo* n! folhas.
- A árvore mínima de comparações tem exatamente n! folhas. Supondo que a altura dessa árvore seja h, então LB(n) = h, onde LB(n) é o *lower bound* de tempo para a ordenação de n elementos.
- Sabemos que $n! \leq 2^h$, ou seja, $h \geq \lg n!$
Logo, $LB(n) \geq \lg n!$

Cálculo do *lower bound*

- Pela aproximação de Stirling: $n! \approx (2\pi n)^{1/2} n^n e^{-n}$
- Portanto:
  - $\lg n! \approx \lg (2\pi)^{1/2} + \lg n^{1/2} + \lg n^n + \lg e^{-n}$
  - $\lg n! \approx O(1) + O(\log n) + O(n.\log n) - O(n)$
- Como $LB(n) \geq \lg n!$, então $LB(n) = \Omega(n.\log n)$
- Se encontrarmos um algoritmo que, *apenas com comparações e trocas*, resolva a ordenação em tempo $O(n.\log n)$, ele será ótimo e esse problema estará computacionalmente resolvido.