CCI-22

Matemática Computacional

Carlos Alberto Alonso Sanches
Juliana de Melo Bezerra

CCI-22

4) Equações e Sistemas Não Lineares

Bissecção, Posição Falsa, Ponto Fixo, Newton-Raphson, Secante

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
    - Bissecção
    - Posição Falsa
    - Ponto Fixo
    - Newton-Raphson
    - Secante
    - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Alguns exemplos de polinômios

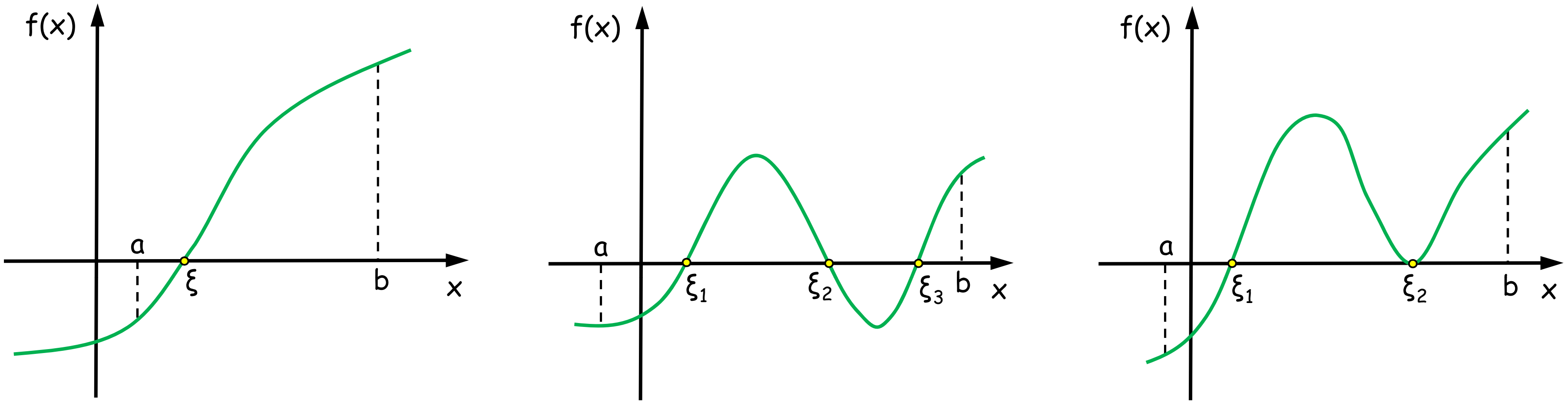
- Uma esfera de raio R e densidade específica ρ, ao flutuar na água, afunda uma quantidade x dada por:
  - $x^3 + 2Rx^2 - 4\rho R^3 = 0$
- Sejam duas cargas elétricas A e B de mesmo sinal, distantes 2 metros entre si. Coloca-se, à distância x de A e 2-x de B, uma carga C de sinal oposto.
  C permanecerá em equilíbrio se:
  - $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 32x + 32 = 0$
- Calcular os autovalores de uma matriz de ordem n é equivalente a encontrar as raízes de um polinômio de grau n

Raízes reais de funções

- Nas diversas áreas das ciências exatas, frequentemente ocorrem situações que envolvem a resolução de uma equação $f(x) = 0$, não necessariamente linear
- O objetivo deste capítulo é estudar *métodos numéricos para a resolução de equações não lineares*
- Em alguns casos (polinômios, por exemplo), as raízes podem ser reais ou complexas. Estamos principalmente interessados em encontrar as raízes reais: dada uma curva, queremos os pontos em que o eixo x é interceptado
- Esses métodos possuem duas fases:
  1) Isolamento de uma raiz (encontrar um intervalo que a contenha)
  2) Refinamento: dada uma aproximação inicial da raiz nesse intervalo, melhorá-la até se obter a precisão desejada

Isolamento das raízes

- Nesta primeira fase, é feita uma análise teórica e gráfica da função f(x), da qual depende fortemente o sucesso da fase seguinte
- De modo geral, é utilizado o teorema de Bolzano: considerando f(x) uma função contínua no intervalo [a,b], se f(a).f(b) < 0, então existe pelo menos uma raiz $x = \xi$ entre a e b
- Graficamente:



Exemplo

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

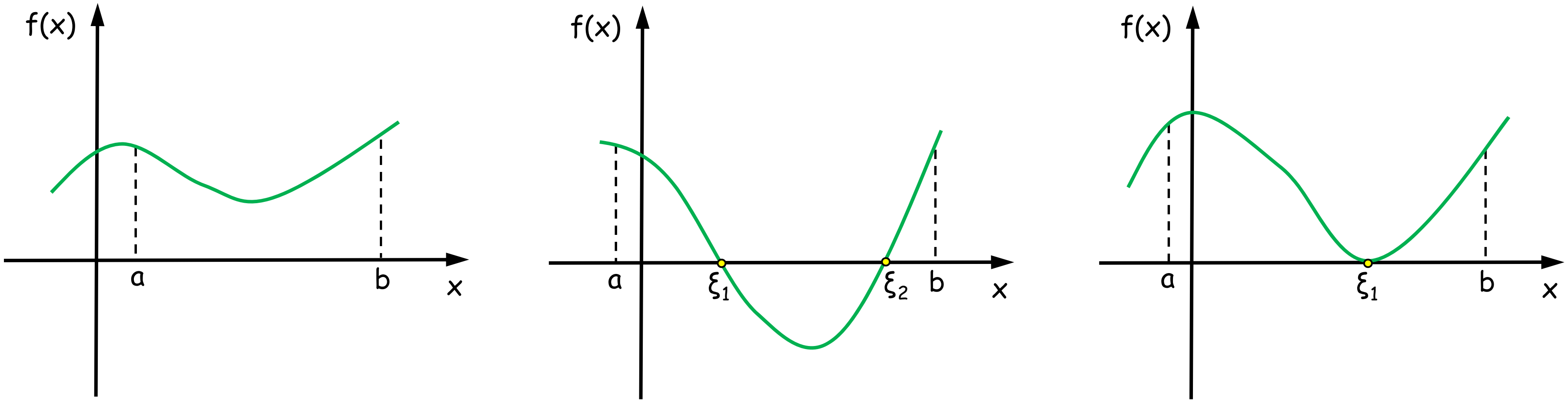
- Vamos construir uma tabela de valores para f(x), considerando apenas os sinais:

x	-∞	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

- Sabendo que f(x) é contínua para qualquer x real, e observando as variações de sinal, podemos concluir que existem raízes nos seguintes intervalos:
  - [-5, -3]
  - [0, 1]
  - [2, 3]
- Como f(x) é um polinômio de grau 3, isolamos todas as suas raízes

Outras situações

- Se f(a).f(b) > 0, então podemos ter várias situações:



- Alguns procedimentos viáveis na análise gráfica de f(x):
  - Esboçar o gráfico de f(x) e localizar as raízes
  - A partir da equação f(x) = 0, obter uma equação equivalente g(x) = h(x), esboçar os gráficos de g(x) e h(x), e localizar pontos de interseção
  - Utilizar programas que traçam gráficos de funções
- No caso específico de polinômios, há alguns teoremas que auxiliam as tarefas de enumeração e isolamento das raízes

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Raízes reais de um polinômio

- Regra de Descartes:
  - O número de raízes reais positivas de um polinômio p(x) com coeficientes reais nunca é maior que o número de trocas de sinal na sequência de seus coeficientes não nulos
  - Se for menor, então será sempre por um número par
- Como as raízes negativas de p(x) são as positivas de p(-x), também é possível utilizar essa mesma regra na enumeração das raízes reais negativas

Exemplo

$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

$\quad\;\; + \quad + \quad - \quad -$

Uma troca de sinal: p(x) tem 1 raiz positiva

$p(-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$

$\quad\;\; - \quad + \quad + \quad -$

Duas trocas de sinal: p(x) pode ter 2 ou 0 raízes negativas

- Se p(x) tiver 2 raízes negativas, não terá raízes complexas; caso contrário, terá 2 raízes complexas
- Possibilidades:

	Raízes	
Positivas	Negativas	Complexas
1	2	0
1	0	2

Sempre aos pares

Outro exemplo

$$p(x) = \overset{+}{x^4} \overset{-}{-\,x^3} \overset{+}{+\,x^2} \overset{-}{-\,x} \overset{+}{+\,1}$$

Quatro trocas de sinal: p(x) pode ter 4, 2 ou 0 raízes positivas

$$p(-x) = \overset{+}{x^4} \overset{+}{+\,x^3} \overset{+}{+\,x^2} \overset{+}{+\,x} \overset{+}{+\,1}$$

Nenhuma troca de sinal: p(x) não tem raízes negativas

- Possibilidades:

Raízes		
Positivas	Negativas	Complexas
4	0	0
2	0	2
0	0	4

Raízes complexas de um polinômio

- Seja o polinômio de grau n de coeficientes reais: $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$
- <u>Regra de Huat</u>: Se $p(0) \neq 0$ e para algum k, $0<k<n$, tivermos $(a_k)^2 \leq a_{k-1}.a_{k+1}$, então p(x) terá raízes complexas
- Um caso particular é a <u>Regra da Lacuna</u>:
  - Se $p(0) \neq 0$ e para algum k, $0<k<n$, tivermos $a_k = 0$ e $a_{k-1}.a_{k+1} > 0$, então p(x) terá raízes complexas
  - Se $p(0) \neq 0$ e existirem dois ou mais coeficientes nulos sucessivos, então p(x) terá raízes complexas

Exemplo

$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3$ 2 ou 0 positivas

$+ \quad + \quad + \quad + \quad - \quad +$

$p(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ 3 ou 1 negativas

$- \quad + \quad - \quad + \quad + \quad +$

- Regra de Huat: $(a_2)^2 \leq a_1.a_3$, pois $1 < 3.2$
  - Portanto, p(x) tem raízes complexas
- Possibilidades:

Raízes		
Positivas	Negativas	Complexas
2	1	2
0	3	2
0	1	4

Outro exemplo

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1$$

$+ \quad - \quad - \quad + \quad - \quad +$

4, 2 ou 0 positivas

$$p(-x) = 2x^6 + 3x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1$$

$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

não tem negativas

- Regra da Lacuna: $a_2 = 0$ e $a_1.a_3 > 0$, pois $(-3).(-2) > 0$
  - Portanto, p(x) tem raízes complexas
- Possibilidades:

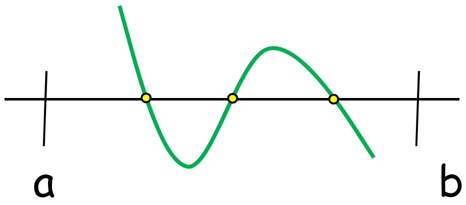
Raízes		
Positivas	Negativas	Complexas
4	0	2
2	0	4
0	0	6

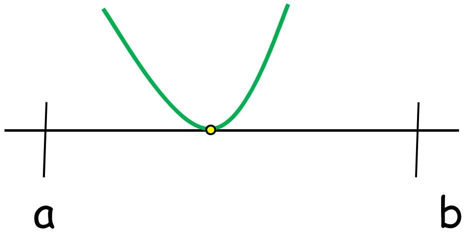
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

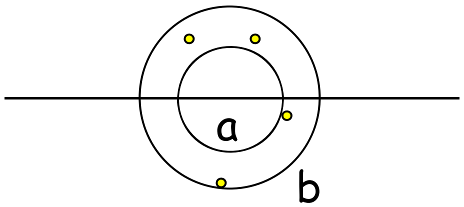
Isolamento das raízes de um polinômio

- No caso dos polinômios, o isolamento das suas raízes é feito em duas fases: localização e separação
- *Localizar as raízes reais* de um polinômio p(x) é determinar um intervalo que as contenha
- Exemplos:





- *Localizar as raízes complexas* é determinar os raios interno e externo de anéis que as contenham
- Exemplo:



- Em ambos os casos, a e b são chamados respectivamente de cota inferior e superior

Localização de raízes reais

- Teorema de Laguerre: Dado o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e dado um número δ, obtemos $p(x) = q(x).(x - \delta) + R$. Se os coeficientes de $q(x)$ forem todos positivos ou nulos, e $R > 0$, então todas as raízes reais são menores que δ

- Cota de Laguerre-Thibault: Dado o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais, calcule a divisão de $p(x)$ por $x-1$, $x-2$, $x-3$, ..., $x-m$, até que o quociente $q(x)$ tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, e resto $R > 0$. Esse $m > 0$ é uma cota superior das raízes reais de $p(x)$. Uma cota inferior $n < 0$ pode ser calculada de modo semelhante, multiplicando-se $p(-x)$ por -1 e seguindo o mesmo procedimento

Exemplo

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

	1	1	-9	-1	20	-12
1		1	2	-7	-8	12
	1	2	-7	-8	12	0

	1	1	-9	-1	20	-12
2		2	6	-6	-14	12
	1	3	-3	-7	6	0

	1	1	-9	-1	20	-12
3		3	12	9	24	132
	1	4	3	8	44	120
			≥ 0			> 0

3 é uma cota superior de p(x)

Exemplo (continuação)

$$p(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12$$

	1	-1	-9	1	20	12
1		1	0	-9	-8	12
	1	0	-9	-8	12	24

	1	-1	-9	1	20	12
2		2	2	-14	-26	-12
	1	1	-7	-13	-6	0

	1	-1	-9	1	20	12
3		3	6	-9	-24	-12
	1	2	-3	-8	-4	0

	1	-1	-9	1	20	12
4		4	12	12	52	288
	1	3	3	13	72	300

Todas as raízes de p(x) pertencem a [-4, 3]

-4 é uma cota inferior de p(x)

Localização de raízes complexas

- Cota de Kojima: Dado o polinômio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, toda raiz ξ, real ou complexa, está em um anel de raio externo $R = q_1 + q_2$, onde q_1 e q_2 são os maiores valores de $|a_i/a_0|^{1/i}$, para $1 \leq i \leq n$

- Considerando o polinômio $p(1/x)$, o raio interno r é calculado de modo semelhante: $r = 1/(q_1 + q_2)$

Exemplo

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

- $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = -9$, $a_3 = -1$, $a_4 = 20$, $a_5 = -12$
- Valores: $\{ 1^1; 9^{1/2}; 1^{1/3}; 20^{1/4}; 12^{1/5} \} = \{1; 3; 1; 2{,}115; 1{,}644\}$
- $q_1 = 3$ e $q_2 = 2{,}115 \Rightarrow R = 5{,}115$
- Toda raiz ξ satisfaz $|\xi| < 5{,}115$
- As raízes de $p(1/x)$ são as mesmas do polinômio $-12x^5 + 20x^4 - x^3 - 9x^2 + x + 1$
- Valores: $\{(20/12)^1; (1/12)^{1/2}; (9/12)^{1/3}; (1/12)^{1/4}; (1/12)^{1/5}\} = \{1{,}667; 0{,}289; 0{,}909; 0{,}537; 0{,}608\}$
- $q_1 = 1{,}667$ e $q_2 = 0{,}909 \Rightarrow r = 0{,}388$
- Toda raiz ξ satisfaz $|\xi| > 0{,}388$

Separação de raízes reais

- Separar as raízes de um polinômio é encontrar uma sequência de subintervalos distintos, tais que cada um contenha exatamente uma raiz real, e cada raiz real esteja contida em um desses subintervalos
- Teorema de Budan: Seja $p^{(k)}(c)$ o valor da k-ésima derivada do polinômio $p(x)$ calculada para $x = c$. Seja V_c o número de variações de sinal na sequência $p(c)$, $p'(c)$, $p''(c)$, ..., $p^{(n)}(c)$, onde n é o grau de $p(x)$. Então, o número de raízes de $p(x)$ no intervalo (a,b) é igual ou menor que $|V_a - V_b|$. Se for menor, será por um número par
  - Eventuais valores nulos devem ser desprezados na contagem de variações
  - Este teorema não dá informações sobre a multiplicidade das raízes, ou seja, uma mesma raiz pode ser contada várias vezes...

Exemplo

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

- Pela regra de Descartes, como há duas variações de sinal, p(x) tem 2 ou 0 raízes positivas
- Derivadas de p(x):
  - $p'(x) = 3x^2 - 4x - 1$; $p''(x) = 6x - 4$; $p'''(x) = 6$
- Por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 3. Portanto, tomemos (a,b) = (0;3):
  - $p(0)=2$; $p'(0)=-1$; $p''(0)=-4$; $p'''(0)=6$
  - $p(3)=8$; $p'(3)=10$; $p''(3)=14$; $p'''(3)=6$
- $V_0=2$ e $V_3=0$: há 2 ou 0 raízes em (0;3)
- Dividindo-se o intervalo em (0;3/2) e (3/2;3), é possível verificar que $V_{3/2}=1$: podemos concluir que há uma raiz em cada um desses subintervalos

Outro exemplo

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1$$

- Pela regra de Descartes, p(x) tem 2 ou 0 raízes positivas e 1 raiz negativa
- Por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 9, e a inferior é -1
- Análise gráfica:

x	p(x)
-1	-29
0	1
1	13
2	13
3	7
4	1
5	1
6	13
7	43

- De fato, é fácil comprovar que há uma raiz negativa em [-1;0]
- A tabela parece indicar que não há raízes positivas...
- No entanto, p(4,5) = -0,125, ou seja, há uma raiz em [4;4,5] e outra em [4,5;5]
- É preciso ter muito cuidado com as análises gráficas...

MatLab

- roots(C)
  - Vetor coluna com as raízes do polinômio com coeficientes do vetor C
- poly(R)
  - Vetor linha com os coeficientes do polinômio cujas raízes estão no vetor R
- polyval(C,x)
  - Avalia em x o polinômio cujos coeficientes estão no vetor C

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Métodos iterativos

Através do isolamento de raízes

Específico de cada método

Veremos a seguir

- Na resolução de equações não lineares, qualquer método iterativo possui 4 partes:
  - <u>Estimativa inicial</u>: uma aproximação para a raiz
  - <u>Atualização</u>: uma fórmula que recalcula a solução
  - <u>Critério de parada</u>: uma condição de término para o processo iterativo
  - <u>Avaliador de exatidão</u>: associado ao critério de parada, provê uma estimativa do erro cometido

Critérios de parada

- No cálculo da raiz de $f(x) = 0$ através de um processo iterativo, sejam:
  - x_i: a solução obtida no passo i
  - ε_1 e ε_2: valores de tolerância estabelecidos
  - L: número máximo permitido de iterações

- De modo geral, pode-se interromper esse processo das seguintes maneiras:
  - $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon_1 \,.\, \text{máx}\,\{1, |x_i|\}$ $\begin{cases} \text{erro relativo, se } |x_i| > 1 \\ \text{erro absoluto, caso contrário} \end{cases}$
  - $|f(x_i)| < \varepsilon_2$ — O intervalo inicial deve ser bem escolhido
  - $i > L$ — Muitas iterações...

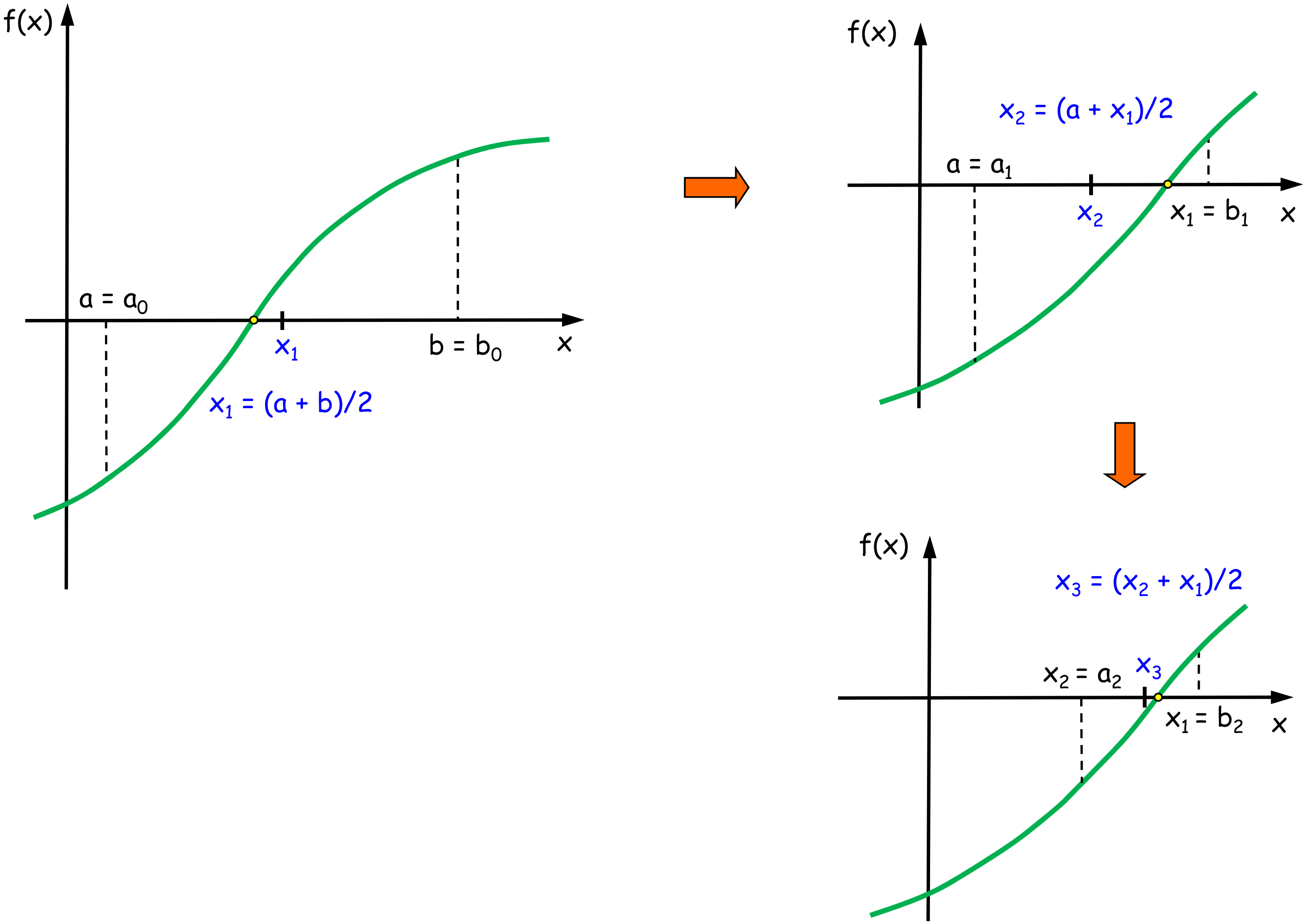
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Bissecção

- Seja [a,b] um intervalo que contenha uma raiz de f(x), onde $f(a).f(b) < 0$
- Algoritmo:
  - Calcula-se o ponto médio do intervalo: $x_m = (a+b)/2$
  - Se $f(x_m) \neq 0$, escolhe-se o subintervalo de [a,b] em que f tenha sinais opostos nas extremidades: $f(a).f(x_m) < 0$ ou $f(x_m).f(b) < 0$
  - Repete-se o processo até que algum critério de parada seja satisfeito

Bissecção: análise gráfica



Exemplo

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$$

- Enumeração: pela regra de Descartes, p(x) tem 2 ou 0 raízes positivas e 1 raiz negativa
- Localização: por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 5 e a inferior é -1
- Separação: por análise gráfica, percebe-se que há apenas uma raiz negativa em [-1;0]
- Aplicação do Método da Bissecção:

x	p(x)
-1	-2
0	21
1	34
2	43
3	54
4	73

i	a	f(a)	b	f(b)	x_m	$f(x_m)$
1	-1,0	-2	0,0	21	-0,5	11,125
2	-1,0	-2	-0,5	11,125	-0,75	5,015625
3	-1,0	-2	-0,75	5,015625	-0,875	1,626953120
4	-1,0	-2	-0,875	1,626953120	-0,9375	-0,156005860
5	-0,9375	-0,1560	-0,875	1,626953120	-0,90625	0,743011480
6	-0,9375	-0,1560	-0,90625	0,743011480	-0,921875	0,296398710
7	-0,9375	-0,1560	-0,921875	0,070171830	-0,9296875	0,070171830
...	...		...		...	...

Estimativa do número de iterações

- Dada uma precisão ε e um intervalo inicial $[a_0,b_0]$, é possível calcular o número i de iterações do Método da Bissecção até que se tenha $b_i - a_i < \varepsilon$:
  - $b_i - a_i = (b_{i-1} - a_{i-1})/2 = (b_0 - a_0)/2^i$
  - Deseja-se que $b_i - a_i < \varepsilon$:
    - $(b_0 - a_0)/2^i < \varepsilon$
    - $2^i > (b_0 - a_0)/\varepsilon$
    - $i > (\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon)/\log 2$

O número de iterações tende a ser grande devido a este valor

- Se essa condição for satisfeita, então no final do passo i teremos um intervalo $[a_i,b_i]$ que contém a raiz ξ tal que $\forall x \in [a_i,b_i] \Rightarrow |x - \xi| \leq b_i - a_i < \varepsilon$

Bissecção: análise geral

- Vantagens:
  - Se a função f(x) for contínua no intervalo inicial [a,b], o método da bissecção gera uma sequência convergente
  - Facilidade de implementação, pois as iterações envolvem cálculos simples
- Desvantagens:
  - A convergência é lenta
  - Exige o conhecimento prévio da região onde se encontra a raiz
  - A extensão desse método para problemas multivariáveis é complexa

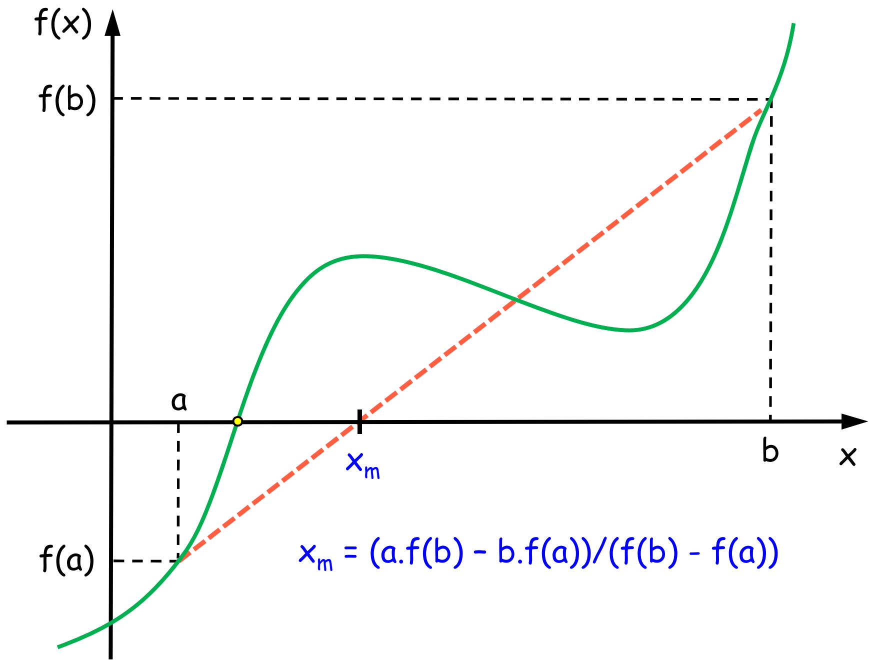
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Posição Falsa

- Dado o intervalo [a,b], vimos que o Método da Bissecção encontra um novo intervalo através de uma *média aritmética* entre a e b:
  - $x_m = (a + b)/2$
- Por outro lado, o Método da Posição Falsa calcula uma *média ponderada* entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:
  - $x_m = (a.|f(b)| + b.|f(a)|)/(|f(b)| + |f(a)|)$
  - Como f(a) e f(b) têm sinais opostos, é equivalente a $x_m = (a.f(b) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$

Posição Falsa: análise gráfica



x_m é a interseção do eixo x com a reta que passa por (a,f(a)) e (b,f(b))

- Equação da reta: (x – a)/(f(x) - f(a)) = (b - a)/(f(b) - f(a))
- No eixo x: $x = x_m$ e $f(x_m) = 0$
- $x_m - a = -f(a).(b - a)/(f(b) - f(a))$
- $x_m - a = (a.f(a) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$
- $x_m = (a.f(b) - a.f(a) + a.f(a) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$
- $x_m = (a.f(b) - b.f(a))/(f(b) - f(a))$

Exemplo

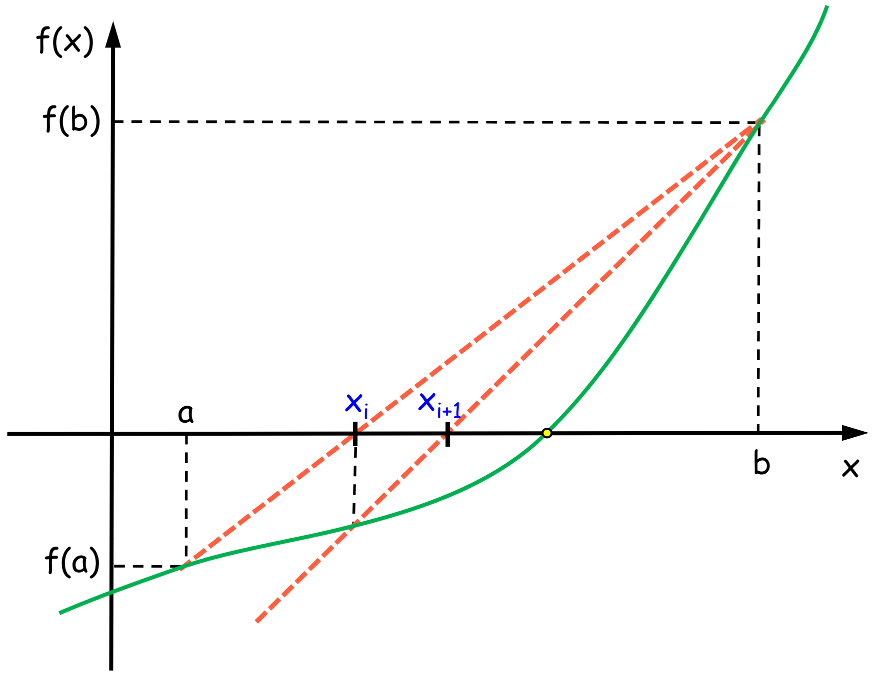
$$f(x) = x.\log x - 1$$

$$[a_0,b_0] = [2;3]$$

- $f(a_0) = -0,3979 < 0$
- $f(b_0) = 0,4314 > 0$
- $x_0 = (a_0.f(b_0) - b_0.f(a_0))/(f(b_0) - f(a_0)) = 2,4798$
- $f(x_0) = -0,0219 < 0$
- Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ têm mesmo sinal, $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$
- $x_1 = (a_1.f(b_1) - b_1.f(a_1))/(f(b_1) - f(a_1)) = 2,5049$
- $f(x_1) = -0,0011 < 0$
- Como $f(a_1)$ e $f(x_1)$ têm mesmo sinal, $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$
- E assim por diante, até que o critério de parada seja satisfeito

Posição Falsa: análise geral

- De modo geral, suas vantagens e desvantagens são análogas às do Método da Bissecção
- Se a função for côncava ou convexa em [a,b], então umas das extremidades permanecerá fixa
- Exemplo:



- Cuidado com o critério de parada: neste caso, o intervalo $[a_i,b_i]$ nunca ficará suficientemente pequeno, pois b_i permanece constante...
- É possível modificar o método, prevendo casos como este

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método do Ponto Fixo

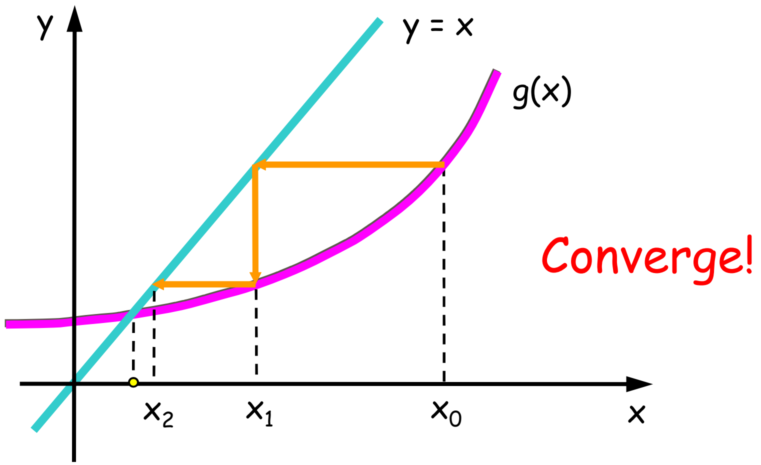
- Seja uma função $f(x)$ contínua e não linear em $[a,b]$, onde está uma única raiz ξ
- O Método do Ponto Fixo consiste em:
  - transformar a equação $f(x) = 0$ na equivalente $x = g(x)$, de tal modo que $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = \xi$
  - a partir de $x_0 \in [a,b]$, gerar a sequência $\{x_i\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{i+1} = g(x_i)$
- O problema de se encontrar a raiz em $f(x)$ foi transformado no problema de se encontrar o ponto fixo de $g(x)$
- $g(x)$ é chamada de *função de iteração*

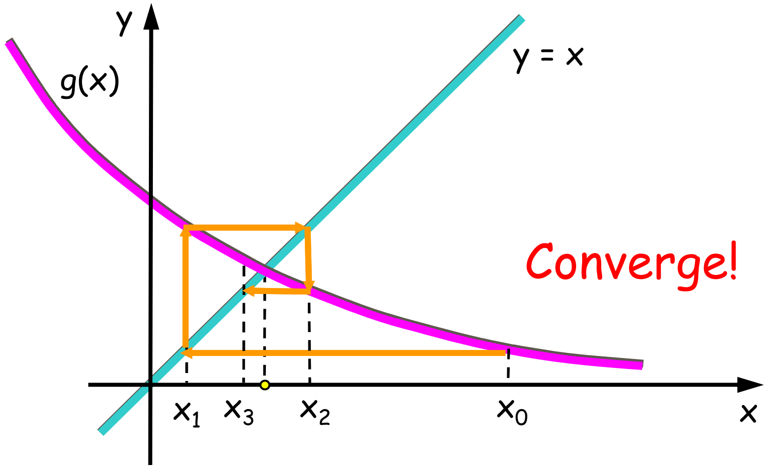
Exemplo

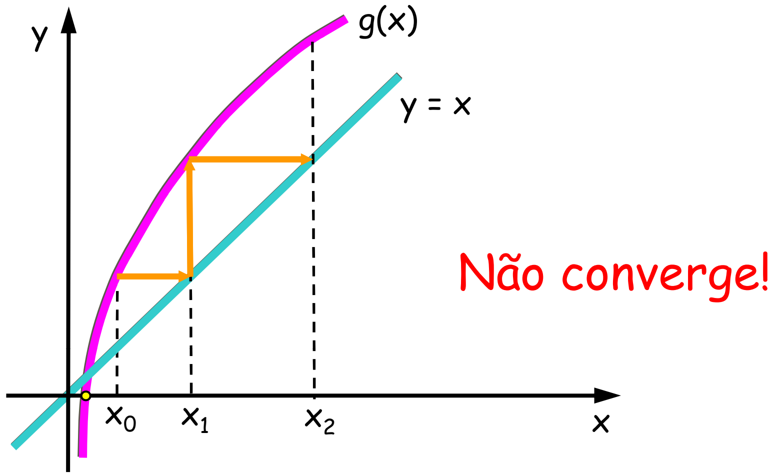
$$f(x) = x^2 + x - 6$$

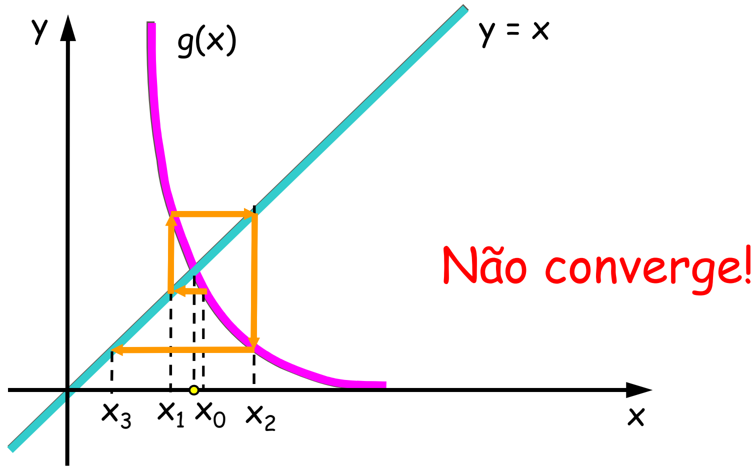
- Possíveis funções de iteração para f(x):
  - $g_1(x) = 6 - x^2$
  - $g_2(x) = \pm(6 - x)^{1/2}$
  - $g_3(x) = (6/x) - 1$
  - $g_4(x) = 6/(x+1)$

Algumas situações possíveis









Convergência

- <u>Teorema</u>: Sejam um intervalo I *aproximadamente centrado* numa raiz ξ de $f(x)$, e $g(x)$ uma função de iteração. A sequência $\{x_i\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ convergirá para ξ se:
  - $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I
  - $x_0 \in I$
  - $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$

Demonstração

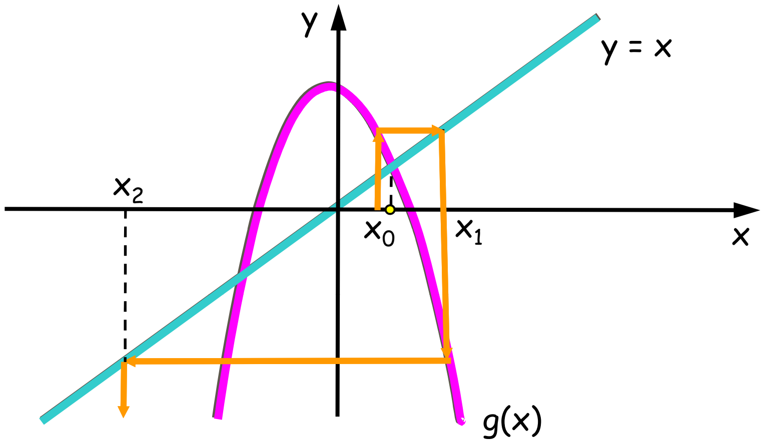
- <u>1ª parte</u>: Se $x_0 \in I$, então $x_i \in I$, $i \geq 0$
  - $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = g(\xi)$
  - Para $i \geq 0$, $x_{i+1} = g(x_i) \Rightarrow x_{i+1} - \xi = g(x_i) - g(\xi)$
  - Como $g(x)$ é contínua e diferenciável em I, pelo *Teorema do Valor Médio*, se $x_i \in I$ então existe c_i entre x_i e ξ tal que $g'(c_i).(x_i - \xi) = g(x_i) - g(\xi)$
  - $x_{i+1} - \xi = g'(c_i).(x_i - \xi)$, $i \geq 0$
  - $|x_{i+1} - \xi| = |g'(c_i)|.|x_i - \xi|$, $i \geq 0$
  - $|x_{i+1} - \xi| < |x_i - \xi|$, $i \geq 0$, pois $|g'(c_i)| \leq M < 1$
  - Como I está aproximadamente centrado em ξ, se $x_i \in I$ então $x_{i+1} \in I$, $i \geq 0$

Demonstração

- <u>2^a parte</u>: $\lim_{i\to\infty} x_i = \xi$
  - Vimos que $|x_{i+1} - \xi| = |g'(c_i)|.|x_i - \xi|$, $i \geq 0$, onde c_i está entre x_i e ξ, e sabemos que $|g'(c_i)| \leq M < 1$
  - $|x_1 - \xi| = |g'(c_0)|.|x_0 - \xi| \leq M.|x_0 - \xi|$ — c_0 está entre x_0 e ξ
  - $|x_2 - \xi| = |g'(c_1)|.|x_1 - \xi| \leq M^2.|x_0 - \xi|$ — c_1 está entre x_1 e ξ
  - Generalizando:
    - $|x_i - \xi| = |g'(c_{i-1})|.|x_{i-1} - \xi| \leq M^i.|x_0 - \xi|$, $i>0$ — c_{i-1} está entre x_{i-1} e ξ
  - $0 \leq \lim_{i\to\infty} |x_i - \xi| \leq \lim_{i\to\infty} M^i.|x_0 - \xi| = 0$, pois $0<M<1$
  - Portanto, $\lim_{i\to\infty} |x_i - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_i = \xi$

Voltando ao exemplo anterior

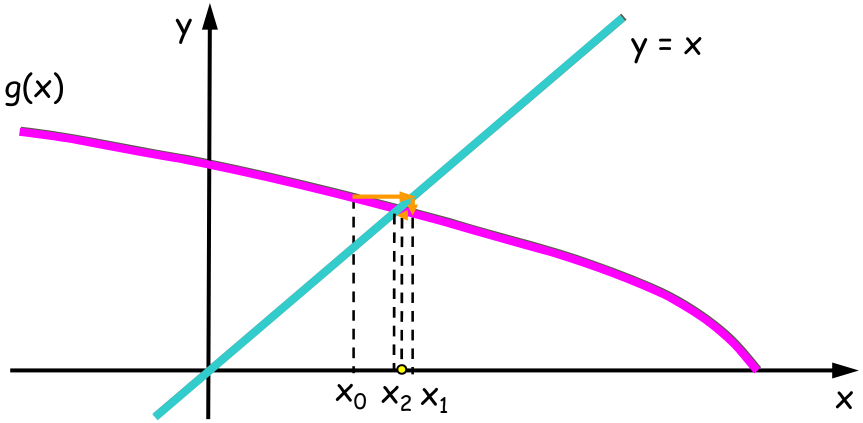
- Sabemos que as raízes de $f(x) = x^2 + x - 6$ são $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
- Consideremos $g_1(x) = 6 - x^2$ e $x_0 = 1{,}5$:
  - $x_1 = g(x_0) = 6 - 1{,}5^2 = 3{,}75$
  - $x_2 = g(x_1) = 6 - 3{,}75^2 = -8{,}0625$
  - $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8{,}0625)^2 = -59{,}003906$
  - $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59{,}003906)^2 = -3475{,}4609$
- A sequência $\{x_i\}$ diverge...



- $g_1(x) = 6 - x^2 \Rightarrow g'_1(x) = -2x$
- $g_1(x)$ e $g'_1(x)$ são contínuas em R
- $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
- O intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ não satisfaz o teorema, pois não contém as raízes, nem x_0...

Ainda o mesmo exemplo

- Consideremos agora $g_2(x) = (6 - x)^{1/2}$ e $x_0 = 1{,}5$:
  - $x_1 = g(x_0) = (6 - 1{,}5)^{1/2} = 2{,}12132$
  - $x_2 = g(x_1) = (6 - 2{,}12132)^{1/2} = 1{,}96944$
  - $x_3 = g(x_2) = (6 - 1{,}96944)^{1/2} = 2{,}00763$
  - $x_4 = g(x_3) = (6 - 2{,}00763)^{1/2} = 2{,}00048$
- A sequência $\{x_i\}$ está convergindo para $\xi_2 = 2$



- $g_2(x) = (6 - x)^{1/2} \Rightarrow$
  $g'_2(x) = -1/(2(6 - x)^{1/2})$
- $g_2(x)$ é contínua em R para $x \leq 6$
- $g'_2(x)$ é contínua em R para $x < 6$
- $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow |1/(2(6 - x)^{1/2})| < 1$
  $\Leftrightarrow x < 5{,}75$
- O intervalo $I = [1{,}5;2{,}5]$ satisfaz as condições do teorema

Outro exemplo

- Seja $f(x) = x^2 - x - 2$, com $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 2$
- Sejam duas funções de iteração:
  - $g_1(x) = x^2 - 2$
  - $g_2(x) = (2 + x)^{1/2}$
- $g'_1(x) = 2x$: $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
  O intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ não satisfaz o teorema
- $g'_2(x) = 1/(2(2 + x)^{1/2})$: $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow x > -7/4$
  O intervalo $I = [0;3]$, por exemplo, satisfaz o teorema
- Consideremos $g_2(x) = (2 + x)^{1/2}$, $x_0 = 0$:
  - $x_1 = g(x_0) = (2 + x_0)^{1/2} = 1{,}41421$
  - $x_2 = g(x_1) = (2 + x_1)^{1/2} = 1{,}84775$
  - $x_3 = g(x_2) = (2 + x_2)^{1/2} = 1{,}96157$
  - $x_4 = g(x_3) = (2 + x_3)^{1/2} = 1{,}98036$
- A sequência está convergindo para $\xi_2 = 2$

Ordem da convergência

- Sejam $\{x_i\}$ uma sequência que converge para a raiz ξ, $e_i = x_i - \xi$ o erro na iteração $i \geq 0$ e $0 \leq K < 1$ uma constante
- Se $\lim_{i\to\infty} |e_{i+1}|/|e_i| = K > 0$, dizemos que $\{x_i\}$ tem *ordem de convergência* linear e *constante assintótica de erro* K
- Se $\lim_{i\to\infty} |e_{i+1}|/|e_i| = 0$: a convergência será superlinear
  - Se houver constantes $p>1$ e $C>0$ tais que $\lim_{i\to\infty} |e_{i+1}|/|e_i|^p = C$, então p será a *ordem de convergência* dessa sequência, e C será a *constante assintótica de erro*
  - Quanto maior o valor de p, maior a rapidez de convergência do método iterativo
- No Método do Ponto Fixo, pode-se demonstrar que $\lim_{i\to\infty} e_{i+1}/e_i = g'(\xi) < 1$, ou seja, a ordem de convergência é linear

Demonstração

- Na demonstração do teorema da convergência, vimos que $x_{i+1} - \xi = g'(c_i).(x_i - \xi)$, $i \geq 0$, onde c_i está entre x_i e ξ
- Portanto, $(x_{i+1} - \xi)/(x_i - \xi) = g'(c_i)$
- Tomando o limite quando $i \to \infty$:
  - $\lim_{i \to \infty} (x_{i+1} - \xi)/(x_i - \xi) = \lim_{i \to \infty} g'(c_i) = g'(\lim_{i \to \infty} c_i) = g'(\xi)$
- Logo, $\lim_{i \to \infty} e_{i+1}/e_i = g'(\xi) = C$
- Além disso, $|C|<1$, pois $g'(x)$ satisfaz as hipóteses do teorema da convergência
- Neste caso, a convergência será mais rápida quanto menor for $|g'(\xi)|$

Ponto Fixo: análise geral

- Vantagens:
  - Convergência rápida
- Desvantagens:
  - Obtenção de uma função de iteração
  - Determinação de um intervalo inicial válido
  - Difícil implementação
- A importância deste método está mais no estudo dos seus conceitos que em sua eficiência computacional

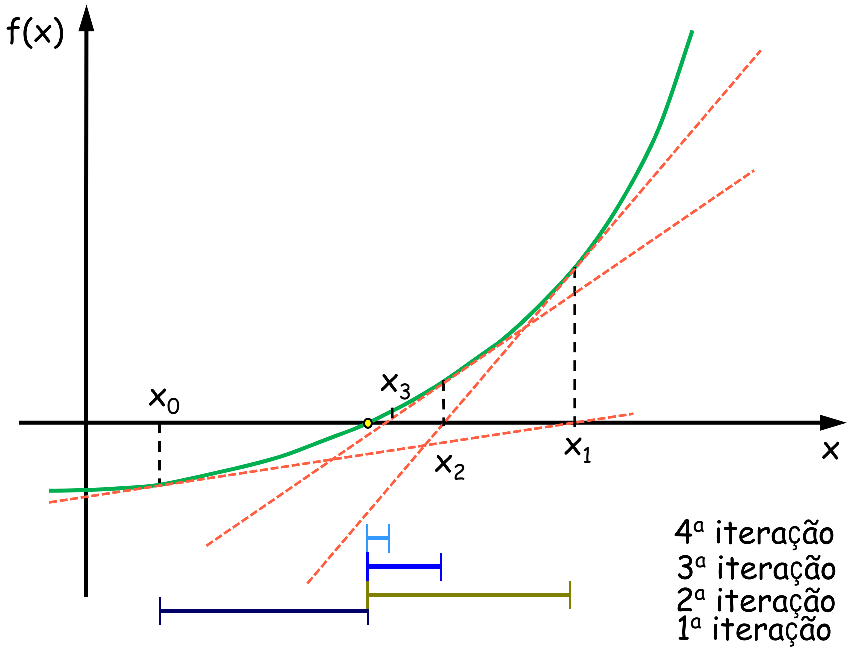
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método de Newton-Raphson

- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ que contém uma única raiz, e um ponto inicial x_0, é possível encontrar uma aproximação para essa raiz a partir da interseção do eixo x com a reta tangente à curva em x_0
- O ponto inicial x_0 é escolhido em função do comportamento da curva nas proximidades da raiz
- Cálculo das aproximações: $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Newton-Raphson: análise gráfica



- Seja o ponto $(x_i, f(x_i))$
- Traça-se a reta $L_{i+1}(x)$ tangente à curva nesse ponto:
  $L_{i+1}(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$
- No cruzamento com o eixo x, $L_{i+1}(x) = 0$:
  $0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$
- Portanto, $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Caso particular do Ponto Fixo

- O Método de Newton-Raphson pode ser entendido como um caso particular do Método do Ponto Fixo, onde $g(x) = x - f(x)/f'(x)$
- Calculando a derivada de $g(x)$:
  - $g'(x) = 1 - [f'(x)^2 - f(x).f''(x)]/f'(x)^2$
  - $g'(x) = f(x).f''(x)/f'(x)^2$
- Na raiz ξ, sabemos que $f(\xi) = 0$.
  Desde que $f'(\xi) \neq 0$, então $g'(\xi) = 0$
- De acordo com o teorema da convergência do Método do Ponto Fixo, podemos concluir que o Método de Newton-Raphson converge com rapidez máxima para a raiz

Convergência

- Teorema: Sejam $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz ξ de $f(x)$. Supondo $f'(\xi) \neq 0$, existe um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo essa raiz tal que, se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_i\}$ gerada por $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ converge para ela
- Demonstração: basta verificar que são satisfeitas as hipóteses do teorema da convergência do Método do Ponto Fixo
- Em outras palavras, o Método de Newton-Raphson converge desde que a aproximação inicial seja suficientemente próxima da raiz
- Além disso, podemos comprovar que sua convergência é de ordem quadrática: $\lim_{i\to\infty} e_{i+1}/e_i^2 = C \neq 0$

Erro de aproximação de x_i em relação à raiz

Convergência de ordem quadrática

- $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i) = g(x_i)$
- $x_{i+1} - \xi = x_i - \xi - f(x_i)/f'(x_i)$
- $e_{i+1} = e_i - f(x_i)/f'(x_i)$
- Desenvolvimento de Taylor de $f(x)$ em torno de x_i:
  - $f(x) = f(x_i) + f'(x_i).(x-x_i) + f''(c_i).(x-x_i)^2/2$, onde c_i está entre x e x_i
  - Para $x = \xi$: $0 = f(\xi) = f(x_i) - f'(x_i).(x_i-\xi) + f''(c_i).(x_i-\xi)^2/2$
  - $f(x_i) = f'(x_i).e_i - f''(c_i).e_i^2/2$
  - $e_i - f(x_i)/f'(x_i) = f''(c_i).e_i^2/2f'(x_i)$
  - Utilizando a fórmula acima: $f''(c_i).e_i^2/2f'(x_i) = e_{i+1}$
  - $e_{i+1}/e_i^2 = f''(c_i)/2f'(x_i)$
- $\lim_{i\to\infty} e_{i+1}/e_i^2 = \lim_{i\to\infty} f''(c_i)/2f'(x_i) = f''(\xi)/2f'(\xi)$
- $\lim_{i\to\infty} e_{i+1}/e_i^2 = g''(\xi)/2$
- $\lim_{i\to\infty} e_{i+1}/e_i^2 = C$

$g'(x) = f(x).f''(x)/f'(x)^2$
$g''(x) = [(f'(x).f''(x) + f'''(x).f(x)).f'(x)^2 - 2f''(x).f'(x).f(x).f''(x)] /f'(x)^4$
$g''(\xi) = f'(\xi).f''(\xi)/f'(\xi)^2$
$g''(\xi) = f''(\xi)/f'(\xi)$

Exemplo

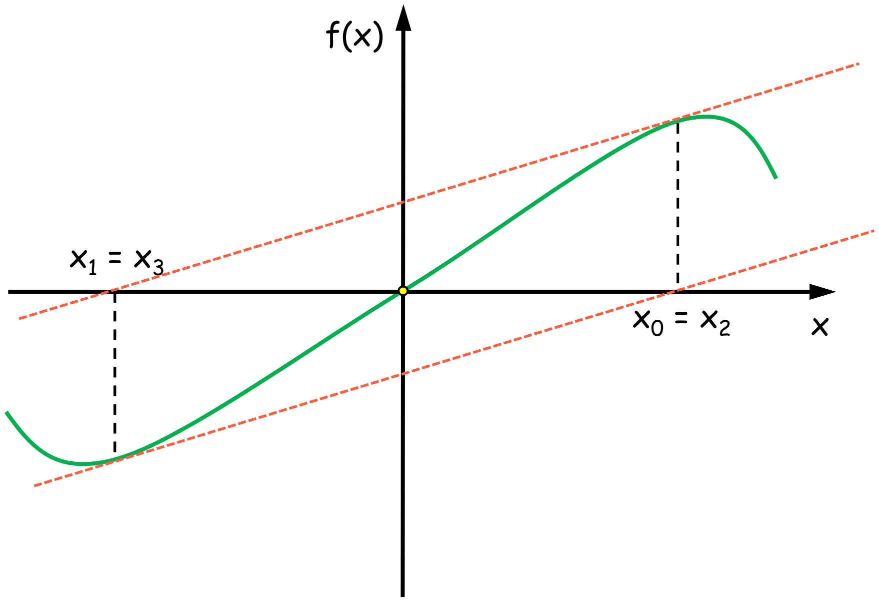
$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$$

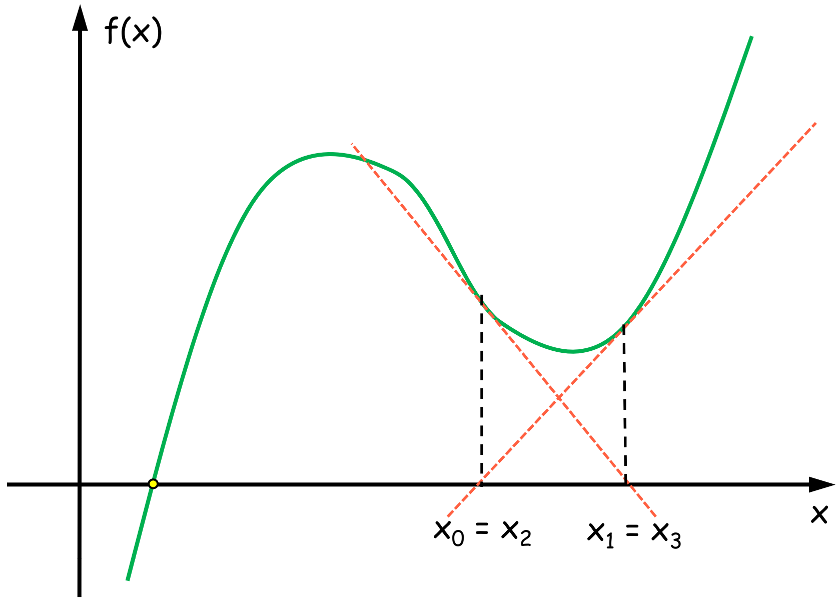
$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 17$$

- $x_0 = -1{,}0$
- $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -1{,}0 + 2/30 = -0{,}9333333333$
- $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = -0{,}9321152567$
- $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = -0{,}9321148567$
- $x_4 = x_3 - f(x_3)/f'(x_3) = -0{,}9321148567$

Casos de *loop* infinito

- Em alguns casos, o Método de Newton-Raphson pode entrar em loop...
- Exemplos:





Newton-Raphson: análise geral

- Vantagens:
  - Convergência rápida
- Desvantagens:
  - Risco de *loop* infinito (casos raros)
  - Necessidade da obtenção de $f'(x)$
    - Uma aproximação: $f'(x) \approx [f(x+\epsilon) - f(x)]/\epsilon$, com ϵ pequeno
  - Risco de chegar a x_i tal que $f'(x_i) = 0$
  - Dificuldade de se encontrar uma aproximação inicial adequada
- O Método da Bissecção pode ser utilizado para se obter uma boa aproximação inicial

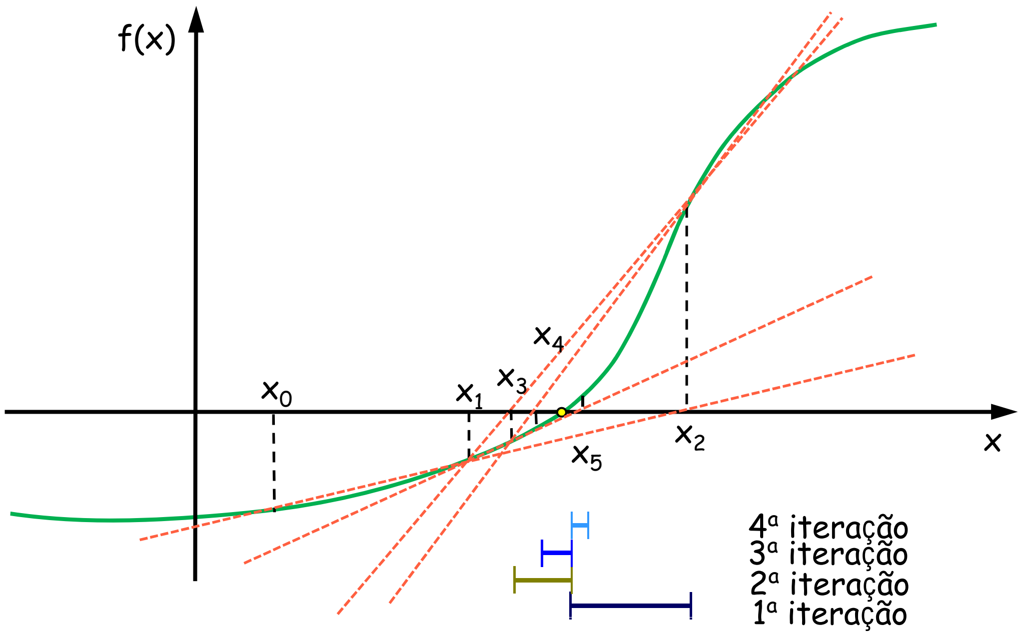
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Secante

- Para se evitar o cálculo de derivadas, podemos usar um modelo linear baseado nos valores mais recentes de $f(x)$
- Partindo de duas aproximações x_{i-1} e x_i, calculamos a reta que passa por $(x_{i-1},f(x_{i-1}))$ e $(x_i,f(x_i))$. A interseção desta reta com o eixo x determina a nova aproximação x_{i+1}, e o processo continua a partir de x_i e x_{i+1}
- Cálculo das aproximações:
  $x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}).f(x_i)/(f(x_i) - f(x_{i-1}))$

Secante: análise gráfica



- Sejam os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$
- Traça-se a reta $L_{i+1}(x)$ que passa por ambos os pontos:
  $L_{i+1}(x) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i).(f(x_i) - f(x_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$
- No cruzamento com o eixo x, $L_{i+1}(x) = 0$:
  $0 = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i).(f(x_i) - f(x_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$
- Portanto, $x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}).f(x_i)/(f(x_i) - f(x_{i-1}))$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\xi = 2;\ x_0 = 1{,}5;\ x_1 = 1{,}7$$

- $x_2 = x_1 - (x_1 - x_0).f(x_1)/(f(x_1) - f(x_0))$
- $x_2 = 1{,}7 - (1{,}7-1{,}5).(-1{,}41)/(-1{,}41+2{,}25) = 2{,}03571$
- $x_3 = 1{,}99774$
- $x_4 = 1{,}99999$

Convergência

- Como o Método da Secante é uma aproximação do Método de Newton-Raphson, as condições de convergência são praticamente as mesmas
- Pode-se demonstrar que, no Método da Secante, $\lim_{i \to \infty} e_{i+1}/e_i^p = C \neq 0$, onde $p = \frac{1}{2}(1+5^{1/2}) \approx 1{,}618$ (razão áurea)
- Portanto, esse método é um pouco mais lento que o Método de Newton-Raphson
- Além disso, é importante frisar que pode divergir se $f(x_i) \approx f(x_{i-1})$

Secante: análise geral

- Vantagens:
  - Convergência quase tão rápida quanto Newton-Raphson
  - Cálculos mais simples
- Desvantagens:
  - Dificuldade de se encontrar as aproximações iniciais
  - Pode divergir se a curva for quase paralela ao eixo x
  - Dados x_{i-1} e x_i, x_{i+1} pode cair fora do domínio de f
- O Método da Bissecção também pode ser utilizado para se obter as aproximações iniciais

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Uma comparação

Função	Raiz	Critério de parada
$f(x) = e^{-x.x} - \cos x$	$\xi \in (1;2)$	$f(x_i) < 10^{-4}$ ou $\lvert x_i - x_{i-1} \rvert < 10^{-4}$

	Bissecção	Posição Falsa	Ponto Fixo $g(x) = \cos x - e^{-x.x} + x$	Newton-Raphson	Secante
Dados iniciais	[1;2]	[1;2]	$x_0 = 1{,}5$	$x_0 = 1{,}5$	$x_0 = 1;\ x_1 = 2$
i (iterações)	14	6	6	2	5
x_i	1,44741821	1,44735707	1,44752471	1,44741635	1,44741345
$f(x_i)$	$2{,}1921.10^{-5}$	$-3{,}6387.10^{-5}$	$7{,}0258.10^{-5}$	$1{,}3205.10^{-6}$	$-5{,}2395.10^{-7}$
Erro em x_i	$6{,}1035.10^{-5}$	$5{,}5288.10^{-1}$	$1{,}9319.10^{-4}$	$1{,}7072.10^{-3}$	$1{,}8553.10^{-4}$

Considerações finais

- Principais critérios de comparação entre os métodos: garantia e rapidez de convergência e esforço computacional
- Convergência:
  - Bissecção e Posição Falsa: basta que a função seja contínua no intervalo [a,b] e que $f(a).f(b) < 0$
  - Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secante: condições mais restritivas, mas maior rapidez
- Quando não for difícil verificar as condições de convergência, convém usar o Método de Newton-Raphson; se o cálculo de $f'(x)$ for muito complicado, tentar o Método da Secante

MatLab

- fzero(função, x0)
  - Dada uma função como parâmetro, retorna uma raiz que esteja próxima de x0
- Exemplos:
  - fzero(inline('x^10 – 3'), 1)
  - fzero(inline('x^10 – 3'), [0 2])

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Isolamento das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
  - Bissecção
  - Posição Falsa
  - Ponto Fixo
  - Newton-Raphson
  - Secante
  - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Sistemas de equações não lineares

- Dada uma função não linear $F: D \subset R^n \rightarrow R^n$, $F = (f_1, \ldots, f_n)^T$, o objetivo é encontrar as soluções de $F(x) = 0$
- Equivalentemente:

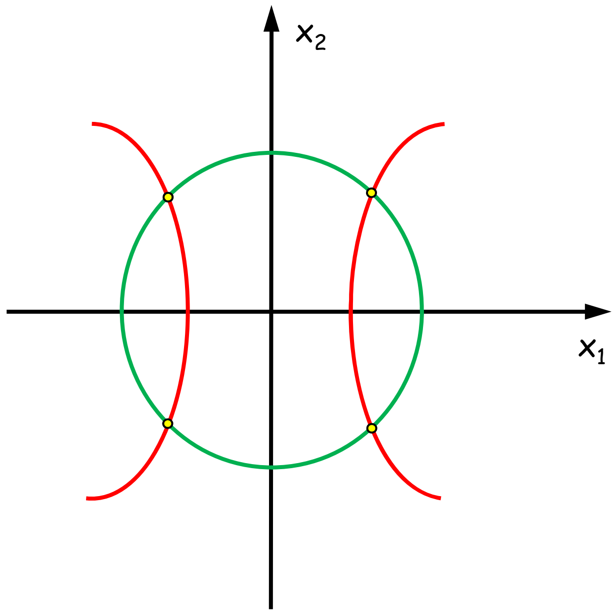
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \quad\quad\quad \ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

onde pelo menos uma função $f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, não é linear

Exemplos

$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$

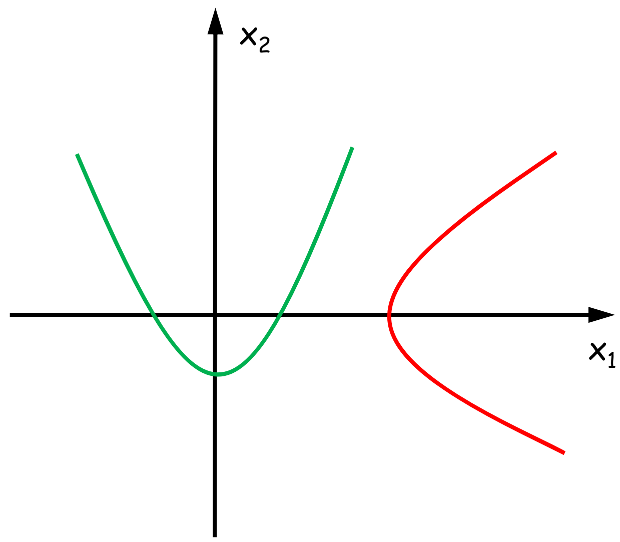
$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2/9 - 1 = 0$



4 soluções

$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0,2 = 0$

$f_2(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 + 1 = 0$



Não há soluções

Matriz Jacobiana

- O vetor das derivadas parciais de cada função $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq n$, é denominado *vetor gradiente* de f_i e será denotado por $\nabla f_i(x)$:

$$\nabla f_i(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right]^T$$

- A matriz $J(x)$ das derivadas parciais de $F(x)$ é chamada de *Matriz Jacobiana* :

$$J(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Método de Newton

- A resolução mais estudada e conhecida de sistemas de equações não lineares é o Método de Newton
- Analogamente ao caso de uma única equação, dada a aproximação $x^{(k)} \in D$, para qualquer $x \in D$ existe $c_i \in D$ tal que $f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(c_i)^T.(x - x^{(k)})$, onde $1 \leq i \leq n$
- Aproximando $\nabla f_i(c_i)$ por $\nabla f_i(x^{(k)})$, $1 \leq i \leq n$, temos um modelo local para $f_i(x)$ em torno de $x^{(k)}$:
  $f_i(x) \approx f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T.(x - x^{(k)})$, onde $1 \leq i \leq n$
- Consequentemente:
  - $F(x) \approx L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)}).(x - x^{(k)})$
  - $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow J(x^{(k)}).(x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$
- Chamando $s^{(k)} = x - x^{(k)}$, temos que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear $J(x^{(k)}).s = -F(x^{(k)})$

Exemplo

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}$$

Soluções: $x^* = [3 \;\; 0]^T$ e $x^{**} = [0 \;\; 3]^T$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4{,}53125 \end{bmatrix} \quad J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1{,}25 & 7{,}25 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1{,}25 & 7{,}25 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}53125 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 0{,}533 \\ -0{,}533 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{bmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}533 \\ -0{,}533 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}092 \\ 3{,}0917 \end{bmatrix}$$

Método de Newton Modificado

- Sob condições adequadas envolvendo o ponto inicial $x^{(0)}$, a função $F(x)$ e a matriz Jacobiana $J(x)$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada pelo Método de Newton converge para a raiz com taxa quadrática
- No entanto, cada iteração exige a resolução do sistema $J(x^{(k)}).s = -F(x^{(k)})$, que compromete seu desempenho. Além disso, existe o risco de que alguma $J(x^{(k)})$ seja singular...
- Uma possível modificação é utilizar a matriz $J(x^{(0)})$ em todas as iterações: desse modo, a sequência $\{x^{(k)}\}$ será gerada através de $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear $J(x^{(0)}).s = -F(x^{(k)})$. Escolhe-se $x^{(0)}$ tal que $J(x^{(0)})$ seja não singular
- A decomposição LU da matriz $J(x^{(0)})$ melhora o desempenho deste novo algoritmo, que é chamado *Método de Newton Modificado*. No entanto, sua taxa de convergência passa a ser linear

Mesmo exemplo

Soluções: $x^* = [3 \;\; 0]^T$ e $x^{**} = [0 \;\; 3]^T$

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \qquad J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}625 \\ -1{,}375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4{,}53125 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ -4{,}53125 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 0{,}56640625 \\ -0{,}56640625 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{bmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}56640625 \\ -0{,}56640625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}05859375 \\ 3{,}05859375 \end{bmatrix}$$