# CCI-22

# Matemática Computacional

**Carlos Alberto Alonso Sanches**
**Juliana de Melo Bezerra**

# CCI-22

# 3) Raízes de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss, Gauss-Jordan,
Decomposição LU, Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Métodos de resolução

- Para a resolução de um sistema linear de equações, há dois grupos de métodos:
  - Métodos diretos: a solução é obtida através da aplicação de um número finito de operações aritméticas
    - Regra de Cramer
    - Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan
    - Decomposição LU
  - Métodos iterativos: a solução é obtida através de uma sequência de aproximações sucessivas, até se alcançar uma resposta que satisfaça a precisão exigida
    - Gauss-Jacobi
    - Gauss-Seidel

# Sistemas de Equações Lineares

- Forma geral:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

onde:

$a_{ij}$ são os coeficientes

$x_i$ são as incógnitas

$b_i$ são os termos independentes

$n$ é a ordem do sistema

- Forma matricial:

$Ax = b$ onde: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

# Exemplo

- Forma geral:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 5 \\
4x_1 + 1x_2 - 5x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

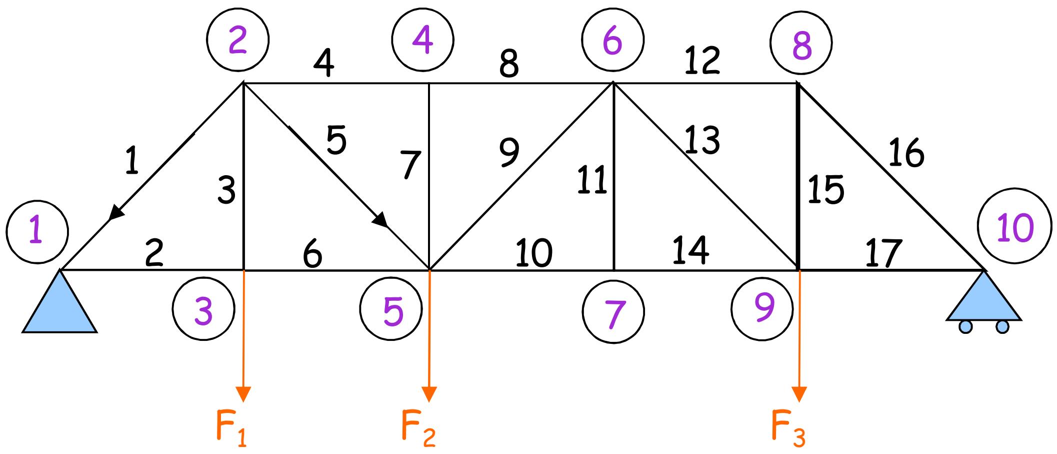
- Forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

# Cálculo das forças em uma treliça

- Um exemplo:

F1, F2 e F3 são dadas




- Condições de equilíbrio:
  - Na junção 2:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_1 \underbrace{\cos 45^\circ}_{a} + f_4 + f_5 \underbrace{\cos 45^\circ}_{a} = 0 \\ \sum F_x = -a f_1 + f_4 + a f_5 = 0 \\ \sum F_y = -a f_1 - f_3 - a f_5 = 0 \end{cases}$$

  - Na junção 3:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \sum F_y = -F_1 + f_3 = 0 \end{cases}$$

  - Idem para demais junções

- Gerará um sistema de ordem 17

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Regra de Cramer

- A aplicação da regra de Cramer, em um sistema de ordem n, exige o cálculo de quantos determinantes?
  - n para os numeradores e 1 para o denominador

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,i-1} & B_n & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \cdots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

# Tempo de processamento

- Seja m o tempo gasto para realizar uma multiplicação
- Seja $det_n$ o número de multiplicações presentes no cálculo do determinante de uma matriz de ordem n
- Podemos calcular o tempo T gasto apenas com multiplicações, no caso de 17 equações:
  - $T = m.18.det_{17}$
  - $T = m.18.(17 + 17.det_{16})$
  - $T = m.18.(17 + 17.(16 + 16.det_{15}))$
  - $T = m.18.(17 + 17.(16 + 16.(15 + 15.det_{14})))$
  - $T = m.18.(17 + 17.(16 + 16.(15 + 15.(14 + 14.(\ldots (3 + 3.(2)\ldots)))))$

Lembrando:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \cdot detA_{-i,-j} .$$

# Tempo de processamento

$T = m.18.(17 + 17.(16 + 16.(15 + 15.(\ldots(3 + 3.(2)\ldots)))))$

$$
\begin{array}{llllllllll}
T = & m.(\,2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & \ldots . & 17 & . & 18 & + \\
 & + & & 3 & . & 4 & . & 5 & . & \ldots . & 17 & . & 18 & + \\
 & + & & & & 4 & . & 5 & . & \ldots . & 17 & . & 18 & + \\
 & + & & & & & & 5 & . & \ldots . & 17 & . & 18 & + \\
 & \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & + & & & & & & & & 16 . & 17 & . & 18 & + \\
 & + & & & & & & & & & 17 & . & 18\,) &
\end{array}
$$

$T = m.18!.(1 + (1/2!) + (1/3!) + \ldots + (1/16!))$

$T \approx m \,.\, 9{,}6 \,.\, 10^{15}$

# Tempo de processamento

- Quantidade de multiplicações: $\approx 9{,}6 \cdot 10^{15}$
- Utilizando um supercomputador atual:
  - $10^{11}$ multiplicações por segundo
  - Tempo gasto: $9{,}6 \cdot 10^{4}$ s $\approx$ 1 dia
- Se o sistema fosse de ordem 20, exigiria cerca de 28 anos de processamento nesse mesmo computador!
- Um algoritmo bem mais eficiente é o *Método da Eliminação de Gauss*, que gasta tempo $O(n^3)$

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Método da Eliminação de Gauss

- Objetivo:
  - Transformação do sistema linear a ser resolvido em um *sistema linear triangular*
- Operações válidas:
  - Troca da ordem das linhas
  - Troca da ordem das colunas (com exceção dos termos independentes)
  - Multiplicação de uma equação por um número real não nulo
  - Substituição de uma equação por uma combinação linear entre ela mesma e outra equação

# Sistemas lineares triangulares

- Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Resolução de um sistema triangular

- Exemplo:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 4x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

- Passos da resolução:

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} 4x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 4x_3 - 5 \cdot 1 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_2 + 2 - 2 \cdot 1 &= -1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\ 3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 &= -10 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

# Passos

- Considere a matriz aumentada [Ab]:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{Linha } L_1 \\ \longleftarrow \text{Linha } L_2 \\ \\ \longleftarrow \text{Linha } L_n \end{array}$$

- Passo 1: anular os coeficientes de $x_1$ nas linhas $L_2$ a $L_n$
  - Substituir a linha $L_2$ pela combinação linear:

$$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad \text{onde} \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Conhecido como **pivô**

  - Se $a_{11} = 0$, trocar $L_1$ com $L_k$, onde $a_{k1} \neq 0$
    - Se $L_k$ não existir, então o sistema não tem solução
  - Continuar analogamente para linhas $L_j$ , $2 < j \leq n$
- Passo i, $1 < i < n$: anular os coeficientes de $x_i$ nas linhas $L_{i+1}$ a $L_n$

# Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1
\end{aligned}
\qquad
[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2 \qquad \begin{aligned} L_2 &= [4 \quad 4 \quad -3 \quad 3] - 2 \cdot [2 \quad 3 \quad -1 \quad 5] \\ L_2 &= [0 \quad -2 \quad -1 \quad -7] \end{aligned}$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1 \qquad \begin{aligned} L_3 &= [2 \quad -3 \quad 1 \quad -1] - 1 \cdot [2 \quad 3 \quad -1 \quad 5] \\ L_3 &= [0 \quad -6 \quad 2 \quad -6] \end{aligned}$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

# Exemplo 1

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

$$L_3 = [0 \quad -6 \quad 2 \quad -6] - 3 \cdot [0 \quad -2 \quad -1 \quad -7]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 5 \quad 15]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

# Algoritmo

- Sistema linear $Ax = b$ de ordem n:

```
EliminaçãodeGauss {

    para k=1 até n-1
        para i=k+1 até n {
            m = a_ik/a_kk        // a_kk ≠ 0
            a_ik = 0
            para j=k+1 até n
                a_ij = a_ij - m.a_kj
            b_i = b_i - m.b_k
        }

    x_n = b_n/a_nn
    para k=n-1 até 1 {
        s = 0
        para j=k+1 até n
            s = s + a_kj.x_j
        x_k = (b_k - s)/a_kk
    }
}
```

Eliminação

Sistema triangular

Complexidade de tempo: $O(n^3)$

# Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\
27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\
22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38
\end{aligned}
\qquad
[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]
$$

Nos cálculos a seguir, consideraremos F(10,3,-5,5):

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134] - (27/1) \cdot [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57]$$

$$L_2 = [0 \quad 2 \quad -1400 \quad -1410]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \quad 2 \quad 14 \quad 38] - (22/1) \cdot [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57]$$

$$L_3 = [0 \quad -86 \quad -1130 \quad -1210]$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array}\right]$$

# Exemplo 2

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array}\right]$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad -86 \quad -1130 \quad -1210] - (-86/2) \cdot [0 \quad 2 \quad -1400 \quad -1410]$$
$$L_3 = [0 \quad 0 \quad -61300 \quad -61800]$$

Apenas 3 algarismos são representados

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{array}\right]$$

$x_3$ = -61800/(-61300) = 1,01

$x_2$ = [-1410 – (-1400)·1,01]/2 = 0,0

$x_1$ = [57 - 52·1,01 - 4·0,0]/1 = 4,5

No entanto, a solução exata é:

- $x_1 = 1$
- $x_2 = 1$
- $x_3 = 1$

# Pivoteamentos parcial e completo

- Pivôs pequenos geram multiplicadores grandes, que aumentam os erros de arredondamento...
- Uma simples alteração na Eliminação de Gauss é escolher como pivô o *elemento de maior módulo* :
  - em cada coluna (pivoteamento parcial)
  - dentre todos os elementos possíveis no processo (pivoteamento completo): exige um maior esforço computacional (tempo total da Eliminação de Gauss será $O(n^4)$)
- Voltemos a resolver o exemplo anterior com precisão de 3 casas decimais, mas com pivoteamento parcial:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array}\right]$$

# Exemplo 2 com pivoteamento parcial

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \quad 4 \quad 52 \quad 57] - (1/27) \cdot [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134]$$

$$L_2 = [0 \quad -0{,}07 \quad 52{,}1 \quad 52]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \quad 2 \quad 14 \quad 38] - (22/27) \cdot [27 \quad 110 \quad -3 \quad 134]$$

$$L_3 = [0 \quad -87{,}6 \quad 16{,}5 \quad -71]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0{,}07 & 52{,}1 & 52 \\ 0 & -87{,}6 & 16{,}5 & -71 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87{,}6 & 16{,}5 & -71 \\ 0 & -0{,}07 & 52{,}1 & 52 \end{array}\right]$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad -0{,}07 \quad 52{,}1 \quad 52] - (0{,}07/87{,}6) \cdot [0 \quad -87{,}6 \quad 16{,}5 \quad -71]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 52{,}1 \quad 52{,}1]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87{,}6 & 16{,}5 & -71 \\ 0 & 0 & 52{,}1 & 52{,}1 \end{array}\right]$$

$x_3 = 52{,}1/52{,}1 = 1$

$x_2 = [-71-16{,}5 \cdot 1]/(-87{,}6) = 0{,}999$

$x_1 = [134 - (-3) \cdot 1 - 110 \cdot 0{,}999]/27 = 1{,}00$

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Método de Gauss-Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema com a finalidade de transformá-lo em um *sistema diagonal equivalente*, isto é, são nulos todos os coeficientes $a_{ik}$, quando $i \neq k$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 1$$
$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Pivoteamento}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \quad 5 \quad 1 \quad 1] - (1/5) \cdot [5 \quad 2 \quad 3 \quad 2]$$
$$L_2 = [0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6]$$
$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2 \quad 3 \quad 2 \quad 4] - (2/5) \cdot [5 \quad 2 \quad 3 \quad 2]$$
$$L_3 = [0 \quad 2{,}2 \quad 0{,}8 \quad 3{,}2]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 2{,}2 & 0{,}8 & 3{,}2 \end{bmatrix}$$

# Exemplo

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 2{,}2 & 0{,}8 & 3{,}2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad 2{,}2 \quad 0{,}8 \quad 3{,}2] - (2{,}2 / 4{,}6) \cdot [0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{23} \cdot L_3 = [0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6] - (0{,}4 / 0{,}609) \cdot [0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913]$$

$$L_2 = [0 \quad 4{,}6 \quad 0 \quad -1{,}313]$$

# Exemplo

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4{,}6 & 0 & -1{,}313 \\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - (2/4{,}6) \cdot [0 \quad 4{,}6 \quad 0 \quad -1{,}313]$$
$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1{,}571]$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1{,}571] - (3/0{,}609) \cdot [0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913]$$
$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 0 \quad -12{,}78]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -12{,}78 \\ 0 & 4{,}6 & 0 & -1{,}313 \\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

*A solução é:*

- $x_1$ = -2,556
- $x_2$ = -0,2854
- $x_3$ = 4,783

# Outra aplicação

- Uma variação do método de Gauss-Jordan pode ser utilizada para se encontrar a inversa de uma matriz A quadrada de ordem n
- Basta transformar a matriz A na correspondente matriz identidade, aplicando essas mesmas operações em uma matriz identidade de ordem n

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|A^{-1}]$$

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Refinamento por resíduos

- Se $x^{(1)}$ for encontrado como solução do sistema $Ax = b$, então o erro dessa solução é $x - x^{(1)}$
- Multiplicando esse erro por $A$:
  - $A(x - x^{(1)}) = b - Ax^{(1)} = r^{(1)}$ resíduo
- O resíduo pode ser utilizado para se encontrar uma solução melhorada $x^{(2)}$:
  - $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$, onde $\delta^{(1)}$ é um vetor de correção
  - $Ax^{(2)} = b \Leftrightarrow A(x^{(1)} + \delta^{(1)}) = b \Leftrightarrow A\delta^{(1)} = b - Ax^{(1)} = r^{(1)}$
  - $\delta^{(1)}$ é encontrado resolvendo-se o sistema $A\delta = r^{(1)}$
- Esses cálculos permitem um processo de refinamento da solução do sistema $Ax = b$

# Exemplo

- Considere o sistema abaixo, que será resolvido em uma máquina que trabalha com apenas *dois dígitos decimais significativos* :

$$16x_1 + 5{,}0x_2 = 21$$
$$3{,}0x_1 + 2{,}5x_2 = 5{,}5$$

- Através da Eliminação de Gauss, podemos encontrar a solução abaixo:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do resíduo:

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

Não está bom...

# Exemplo

- Cálculo do vetor de correção $\delta^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 16 & 5{,}0 \\ 3{,}0 & 2{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} \\ \delta_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}30 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}$$

- Vetor de correção: $\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}00063 \\ 0{,}058 \end{bmatrix}$

Arredondamento aqui

- Solução melhorada: $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}$

- Novo resíduo:

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $x^{(2)}$ é solução exata

# Melhor aproximação

- Dado um sistema Ax = b, sejam y e z duas aproximações da solução exata x. Como saber qual delas é melhor?
- A estratégia mais lógica parece ser comparar os respectivos resíduos: o menor seria da melhor solução
- Infelizmente, isso nem sempre é verdade...
- Exemplo na mesma máquina de 2 dígitos decimais:

$$\begin{cases} 0{,}24x_1 + 0{,}36x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}84 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}24x_3 = 0{,}52 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}25x_3 = 0{,}64 \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} 25 \\ -14 \\ -1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_y = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}00 \\ 0{,}08 \end{bmatrix} \quad r_z = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}24 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Conclusão: nem sempre a aproximação de menor resíduo é a mais exata
- Se a busca por resíduos menores não garante melhores soluções, como saber se o processo de refinamento por resíduos funciona?

# Condicionamento de sistemas

- Um sistema linear é dito <u>mal condicionado</u> se pequenas alterações nos dados de entrada (A ou b) ocasionam grandes erros no resultado final
- Exemplo em outra máquina de 3 dígitos decimais:

$$\begin{cases} 0{,}961x + 0{,}844y = 0{,}119 \\ 0{,}481x + 0{,}422y = 0{,}060 \end{cases}$$

Solução: x=1,00 e y=-0,998

- Suponha que os valores desse sistema sejam obtidos experimentalmente, e por isso os termos independentes possam variar de ±0,001:

Valor perturbado

$$\begin{cases} 0{,}961x + 0{,}844y = 0{,}120 \\ 0{,}481x + 0{,}422y = 0{,}060 \end{cases}$$

Solução: x=0,00 e y=0,142

Erro na entrada: (|0,119-0,120|/|0,119|) ≈ 0,8%

Erro no resultado: (|-0,998-0,142|/|-0,998|) ≈ 114%

- Quando há mal condicionamento, alta precisão nos cálculos não significa quase nada, pois os resultados obtidos não são confiáveis...

# Interpretação geométrica

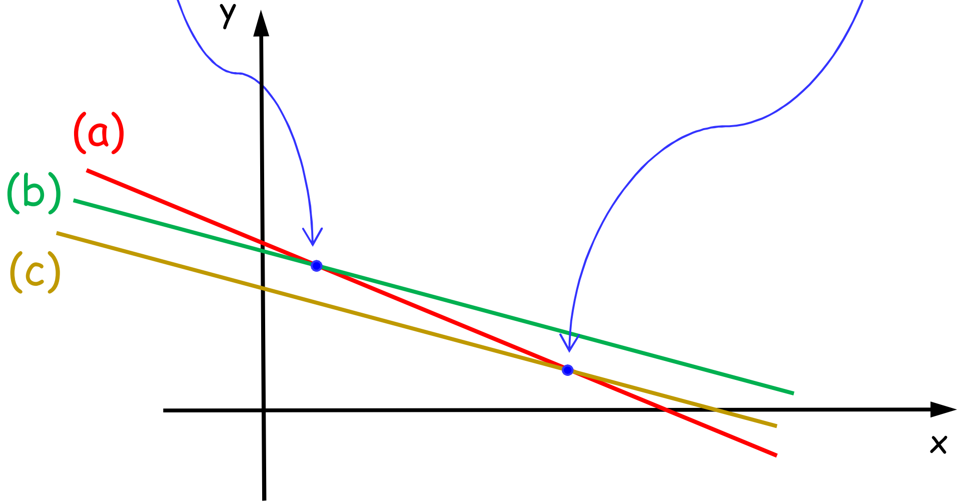
- Considere os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x + 3y = 11 & \text{(a)} \\ 1{,}5x + 4{,}501y = 16{,}503 & \text{(b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 11 & \text{(a)} \\ 1{,}5x + 4{,}501y = 16{,}500 & \text{(c)} \end{cases}$$

Solução: x=2 e y=3

Solução: x=10,28 e y=0,24



# Uma métrica de condicionamento

- Em máquinas com grande precisão, geralmente não faz sentido refinar os resultados...
- No entanto, *empiricamente*, os refinamentos ajudam a identificar o condicionamento de um sistema linear:
  - Se as correções $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, ..., $\delta^{(n)}$ forem grandes, então o *sistema será mal condicionado*
  - Em *sistemas bem condicionados*, bastam dois refinamentos: $\delta^{(3)}$, ..., $\delta^{(n)}$ serão próximos do épsilon da máquina
- Importante: nesse processo de verificação, o vetor b não pode ser nulo
  - Caso contrário, mesmo em um sistema mal condicionado, a solução exata será nula, com correções também nulas...

# Exemplo

- Considere o sistema abaixo em F(10,5,-98,100):

$$\begin{cases} 2{,}4759x_1 + 1{,}6235x_2 + 4{,}6231x_3 = 0{,}064700 \\ 1{,}4725x_1 + 0{,}95890x_2 - 1{,}3253x_3 = 1{,}0473 \\ 2{,}6951x_1 + 2{,}8965x_2 - 1{,}4794x_3 = -0{,}67890 \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1{,}8406 \\ -2{,}0717 \\ -0{,}24419 \end{bmatrix}$$

- Primeiro refinamento em F(10,10,-98,100):

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}0647 \\ 1{,}0473 \\ -0{,}6789 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}064821801 \\ 1{,}047355377 \\ -0{,}678823304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}00012180 \\ -0{,}000055377 \\ -0{,}000076696 \end{bmatrix}$$

Resíduos pequenos

- Resolução de $A\delta = r^{(1)}$:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} -0{,}0000042282 \\ 0{,}000025110 \\ -0{,}000057765 \end{bmatrix}$$

Correções relativamente pequenas

- Solução melhorada $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}8405 \\ -2{,}0717 \\ -0{,}24419 \end{bmatrix}$$

# Outra métrica de condicionamento

- Mostraremos agora outra maneira de identificar o mal condicionamento de um sistema linear não singular $Ax = b$
- Vamos supor que os dados estão sujeitos a certas perturbações, e analisaremos seus efeitos na solução
- Inicialmente, seja $b + \Delta b$ uma *perturbação no vetor de termos independentes*
- Desse modo, a solução também será perturbada, ou seja, teremos $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$
- Desejamos encontrar uma relação entre $\Delta x$ e $\Delta b$, pois, conhecendo o tamanho da perturbação $\Delta b$, poderemos estimar $\Delta x$, e verificar então se o sistema é ou não mal condicionado
- Para isso, teremos que rever o conceito de normas

# Normas de vetores

- Dado um vetor x do espaço vetorial E, chama-se norma de x (denotada por $||x||$) qualquer função definida em E com valores em R que satisfaz as seguintes condições:
  - $||x|| \geq 0$
  - $||x|| = 0$ se e somente se x for o vetor nulo
  - $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||$, para todo escalar $\lambda$
  - $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, onde $y \in E$
- Exemplos de normas de vetores em $E = R^n$:
  - $||x||_\infty = \text{máx}_i |x_i|$
  - $||x||_1 = \Sigma_i |x_i|$
  - $||x||_E = (\Sigma_i x_i^2)^{1/2}$

# Normas de matrizes

- Dada uma matriz A do espaço vetorial E de matrizes quadradas de ordem n, chama-se norma de A (denotada por $||A||$) qualquer função definida em E com valores em R que satisfaz as seguintes condições:
  - $||A|| \geq 0$
  - $||A|| = 0$ se e somente se A for a matriz nula
  - $||\lambda A|| = |\lambda|.||A||$, para todo escalar $\lambda$
  - $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$, onde $B \in E$
- Exemplos de normas de matrizes, onde $A = (a_{ij})$:
  - Norma linha: $||A||_\infty = \text{máx}_i \sum_j |a_{ij}|$
  - Norma coluna: $||A||_1 = \text{máx}_j \sum_i |a_{ij}|$
  - Norma euclidiana: $||A||_E = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{1/2}$

# Usando normas

- Desenvolvendo a equação $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ :
  - $Ax + A\Delta x = b + \Delta b$
  - Como $Ax = b$, então $A\Delta x = \Delta b$
  - Desde que $A$ é não singular, então $\Delta x = A^{-1}\Delta b$
- Se uma norma de matriz e uma norma de vetor estão relacionadas de tal modo que satisfaça a desigualdade $||Ax|| \leq ||A||.||x||$, para qualquer vetor $x$ de ordem $n$, então dizemos que as duas normas são *consistentes*
- Usando normas consistentes:
  - $||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||.||\Delta b||$
  - De $Ax = b$, também temos $||b|| \leq ||A||.||x||$
- Multiplicando as inequações membro a membro:
  - $||\Delta x||.||b|| \leq ||A||.||A^{-1}||.||\Delta b||.||x||$

# Número de condição

- $||\Delta x||.||b|| \leq ||A||.||A^{-1}||.||\Delta b||.||x||$
- $||\Delta x||/||x|| \leq ||A||.||A^{-1}||.||\Delta b||/||b||$
- $||\Delta x||/||x|| \leq cond(A).||\Delta b||/||b||$
- Observações:
  - Número de condição de A:
    $cond(A) = ||A||.||A^{-1}|| \geq ||A.A^{-1}|| = ||I|| = 1$
  - $||\Delta b||/||b||$ é uma medida do erro relativo em b
  - O erro em $||\Delta x||/||x||$ dependerá de cond(A), que é maior ou igual a 1
  - Se cond(A) for grande, então pequenas perturbações relativas em b produzirão grandes perturbações relativas em x, e o sistema Ax = b será mal condicionado
  - Geralmente, sistemas com $cond(A) \geq 10^4$ são considerados mal condicionados

# Outro caso possível

- Consideremos agora outro caso possível: o vetor b é conhecido exatamente, mas ocorre uma *perturbação na matriz A*. Teremos, portanto, $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$
- Desenvolvendo:
  - $(x + \Delta x) = (A + \Delta A)^{-1}b$ Equação (*)
  - Como $x = A^{-1}b$, temos: $\Delta x = (A + \Delta A)^{-1}b - A^{-1}b$
  - $\Delta x = [(A + \Delta A)^{-1} - A^{-1}]b = [B^{-1} - A^{-1}]b$, onde $A + \Delta A = B$
  - $B^{-1} - A^{-1} = (A^{-1}A)B^{-1} - A^{-1}(BB^{-1}) = A^{-1}(A - B)B^{-1}$
  - $\Delta x = (B^{-1} - A^{-1})b = [A^{-1}(A - B)B^{-1}]b = [A^{-1}(A - (A + \Delta A))(A + \Delta A)^{-1}]b$
  - $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(A + \Delta A)^{-1}b$
  - Utilizando a equação (*): $\Delta x = -A^{-1}\Delta A(x + \Delta x)$
- Aplicando normas consistentes em ambos os membros:
  - $||\Delta x|| \leq ||A^{-1}||.||\Delta A||.||(x + \Delta x)||$
  - $||\Delta x|| /||(x + \Delta x)|| \leq cond(A).||\Delta A||/||A||$: semelhante ao anterior

# Exemplo

- Analisar o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1{,}2969 & 0{,}8648 \\ 0{,}2161 & 0{,}1441 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8642 \\ 0{,}1440 \end{bmatrix}$$

- Através de Gauss-Jordan, podemos calcular $A^{-1}$:

$$A^{-1} = 10^8 \begin{bmatrix} 0{,}1441 & -0{,}8648 \\ -0{,}2161 & 1{,}2969 \end{bmatrix}$$

- Usando a norma linha, que é consistente:
  - $||A||_\infty = 2{,}1617$
  - $||A^{-1}||_\infty = 1{,}5130.10^8$
  - $cond(A) = ||A||_\infty.||A^{-1}||_\infty \approx 3{,}3.10^8$
  - Conclusão: sistema mal condicionado

# Alguns comentários

- Um sistema é mal condicionado se for excessivamente sensível a perturbações em seus dados de entrada
- A solução de um sistema mal condicionado, mesmo calculada com *grande precisão*, pode ser *pouco exata*
- Geralmente, essa situação pode ser detectada quando:
  - no processo de refinamento, as correções permanecem grandes
  - o número de condição da matriz A for muito maior que a unidade
- Importante:
  - Resíduos pequenos não garantem a qualidade de uma solução
  - A precisão da máquina influi no condicionamento do sistema
  - Há sistemas lineares em que o processo de refinamento converge para uma solução, mas a matriz A tem um número de condição grande (por exemplo, da ordem de $10^2$ ou $10^3$). Nestes casos, o sistema está próximo de ser mal condicionado, ou seja, a solução encontrada pode não ser confiável...

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Outra forma de ver...

- Consideremos o sistema de 3 equações $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A^{(0)} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Após a primeira fase da Eliminação de Gauss:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = M^{(0)}.A^{(0)}, \quad \text{onde} \quad M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Após a segunda fase da Eliminação de Gauss:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = M^{(1)}.A^{(1)}, \quad \text{onde} \quad M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

# Outra forma de ver...

- Resumindo:
  - $A = A^{(0)}$
  - $A^{(1)} = M^{(0)}.A^{(0)} = M^{(0)}.A$
  - $A^{(2)} = M^{(1)}.A^{(1)} = M^{(1)}.M^{(0)}.A$
  - $A = (M^{(1)}.M^{(0)})^{-1}.A^{(2)}$
  - $A = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}.A^{(2)}$

- É fácil comprovar que:

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = L.U$$

# Decomposição LU

- A comprovação anterior pode ser generalizada em um teorema:

$$A = L.U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Dada uma matriz quadrada de ordem n, seja $A_k$ a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A. Suponha que $\det(A_k) \neq 0$, $1 \leq k \leq n$. Então:
  - Existe uma única matriz triangular inferior $L=(m_{ij})$, com $m_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$. Os demais são os multiplicadores da Eliminação de Gauss
  - Existe uma única matriz triangular superior $U=(u_{ij})$, tais que $L.U = A$
  - $\det(A) = u_{11}.u_{22}. \dots .u_{nn}$

# Decomposição LU

- Portanto, dados o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição (ou fatoração) LU da matriz A, temos:
  - $Ax = b \Leftrightarrow (L.U)x = b$
- Chamando $Ux = y$, o sistema original passa a ser $Ly = b$, ou seja, surgem dois sistemas triangulares
- Por outro lado, é fácil verificar que $y = L^{-1}.b$ é o vetor b acumulando as operações da Eliminação de Gauss
- Por exemplo, no caso de um sistema com 3 equações:
  - Como $L = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}$, então $L^{-1} = M^{(1)}.M^{(0)}$
  - Portanto, $y = M^{(1)}.M^{(0)}.b$
- Vantagem da decomposição $A = L.U$: uma vez calculadas as matrizes L e U (em tempo cúbico), resolvemos mais rapidamente (em tempo quadrático) outros sistemas com a mesma matriz A. Isso é útil, por exemplo, no refinamento por resíduos

# Exemplo

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

multiplicadores

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ \boxed{1/3} & 1/3 & 2/3 \\ \boxed{4/3} & \boxed{1} & -4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Tempo cúbico

# Exemplo

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 1 \\ 1/3y_1 + y_2 &= 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tempo quadrático

$$Ux = y \Rightarrow \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 1/3\,x_2 + 2/3\,x_3 &= 5/3 \\ -4x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Outra aplicação

- A decomposição LU também é útil no cálculo da matriz inversa
- Resolver o sistema $AX = B$, onde $A$, $X$ e $B$ são matrizes de ordem $n$, é o mesmo que resolver $n$ sistemas $Ax = b$, onde $x$ e $b$ são vetores de tamanho $n$
- A inversa $A^{-1}$ da matriz $A$ pode ser encontrada através da resolução do sistema $AX = I$, onde $I$ é a matriz identidade
- Nesse caso, basta realizar uma única vez a decomposição LU da matriz $A$, e depois utilizá-la na resolução de $n$ sistemas

# Decomposição LU com pivoteamento

- É possível incorporar as estratégias de pivoteamento parcial ou completo à decomposição LU
- Uma matriz quadrada P de ordem n é uma *matriz de permutação* se for obtida da correspondente matriz identidade através de permutações em suas linhas ou colunas
- As eventuais permutações de linhas ou colunas na matriz $A^{(k)}$, obtida em um passo intermediário da Eliminação de Gauss, podem ser realizadas através da multiplicação por uma matriz de permutação
- Exemplo:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad P.A^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

# Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A'^{(0)} = P^{(0)}.A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{1/4} & 2 & 11/4 \\ \boxed{3/4} & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A'^{(1)} = P^{(1)}.A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{3/4} & -4 & 13/4 \\ \boxed{1/4} & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

# Exemplo com pivoteamento parcial

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{3/4} & -4 & 13/4 \\ \boxed{1/4} & \boxed{-1/2} & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

- $L.U = A' = P.A$, onde $P = P^{(1)}.P^{(0)}$:

$$A' = P.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- $A'x = b' \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$

# Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow LUx = Pb$$

$$Ly = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

# Algoritmo

- Decomposição LU com pivoteamento parcial em um sistema de ordem n
- Saída: matriz D = L+U-I e matriz de permutação P

```
LUPivotParcial {

    D = A      // matriz de ordem n
    P = I      // identidade de ordem n

    para j=1 até n-1 {

        q = j
        max = |djj|
        para k=j+1 até n {
            se |dkj| > max então {
                    max = |dkj|
                    q = k
            }

        \\ continua...
```

Escolha do pivô

# Algoritmo (continuação)

```
LUPivotParcial {

    // continuação

        se q ≠ j então {
              para k=1 até n {
                   t = d_jk
                   d_jk = d_qk
                   d_qk = t
              }
        trocar linhas q e j em P
        se |d_jj| = 0 então parar (A é singular)
        senão {
             r = 1/d_jj
             para i=j+1 até n {
                  m = d_ij.r
                  d_ij = m
                  para k=j+1 até n
                       d_ik = d_ik - m.d_jk
             }
        }
    }
    return D, P
}
```

Troca das linhas q e j

Eliminação

Complexidade de tempo: $O(n^3)$

# MatLab

- No MatLab 7.8 (2009), os números reais são armazenados em 64 bits (precisão dupla da IEEE), ou seja, possuem 16 dígitos decimais
- A\b
  - Vetor coluna com a solução do sistema linear $Ax = b$
- inv(A)
  - Inversa da matriz $A$
- [L,U] = lu(A)
  - Matrizes L e U recebem a decomposição LU da matriz $A$, usando pivoteamento parcial, onde L acumula a permutação
- [L,U,P] = lu(A)
  - Idem, retornando também a matriz de permutação P tal que $P.A = L.U$
- linsolve(A,b)
  - Vetor coluna com a solução de $Ax = b$, usando LU com pivoteamento parcial
- cond(A,x)
  - Número de condição da matriz $A$ ($x$ =1: norma coluna ; $x$ = Inf: norma linha)

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Métodos iterativos

- Como foi inicialmente comentado, os métodos iterativos para resolução de sistemas lineares consistem em encontrar uma sequência de aproximações sucessivas
- Dada uma estimativa inicial $x^{(0)}$, calcula-se a sequência $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ ..., até que determinado critério de parada seja satisfeito
- O sistema $Ax = b$ é transformado em $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$, $k>0$, onde $C$ é uma matriz e $g$ um vetor
- Possíveis critérios de parada:
  - máximo erro absoluto ou relativo
  - número de iterações
- Principais métodos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Método de Gauss-Jacobi

- Considere o sistema linear em sua forma inicial:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + \dots & + a_{nn}x_n & = b_n
\end{array}
$$

- Isolando a i-ésima incógnita na i-ésima equação:
  - $x_1 = (b_1 - a_{12}\, x_2 - \dots - a_{1n}\, x_n)/a_{11}$
  - $x_2 = (b_2 - a_{21}\, x_1 - \dots - a_{2n}\, x_n)/a_{22}$

  ...
  - $x_n = (b_n - a_{n1}\, x_1 - \dots - a_{n,n-1}\, x_{n-1})/a_{nn}$

# Método de Gauss-Jacobi

iteração calculada

iteração anterior

- Dessa forma, seja $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$, onde $k>1$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Exemplos de critérios de parada:
  - Erro absoluto: $d^{(k)} = \max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$
  - Erro relativo: $d_r^{(k)} = d^{(k)}/(\max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)}|) < \varepsilon$

# Exemplo

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0{,}05 \qquad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = g$$

escolha arbitrária

$$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{bmatrix} 0{,}96 \\ -1{,}86 \\ 0{,}94 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0{,}26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0{,}26 \qquad d_r^{(1)} = 0{,}34/(\text{máx } |x_i^{(1)}|) = 0{,}1828 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0{,}34$$

# Exemplo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix}$$

$d_r^{(2)} = 0,12/1,98 = 0,0606 > \varepsilon$

$$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix}$$

$d_r^{(3)} = 0,0324/1,9888 = 0,0163 < \varepsilon$

# Critério das linhas

- Em um método iterativo, a convergência para a solução exata não é garantida: é preciso que o sistema satisfaça alguns requisitos
- Há uma condição suficiente para a convergência do Método de Gauss-Jacobi, conhecido como o *critério das linhas* :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \text{para } i = 1,2,\dots,n$$

# Exemplos

- Considere o exemplo anterior:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 & \longleftarrow \quad & 2+1 < 10 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 & \longleftarrow \quad & 1+1 < 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 & \longleftarrow \quad & 2+3 < 10 \end{aligned} \Bigg\} \text{ Garantia de convergência}$$

- Considere o exemplo abaixo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 & \longleftarrow \quad & 1 = 1 \\ x_1 - 3x_2 &= -3 & \longleftarrow \quad & 1 < 3 \end{aligned} \Bigg\} \text{ Não há garantia de convergência}$$

  - No entanto, o método de Gauss-Jacobi converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
  - Isso mostra que o critério das linhas é <u>suficiente</u>, mas <u>não necessário</u>

# Demonstração

- Sejam:
  - $x^* = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
  - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, ..., x^{(k)}_n]^T$: a k-ésima aproximação de $x^*$
  - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: erro na k-ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k\to\infty} e^{(k)}_i = 0$, $1 \le i \le n$
- Sabemos que:
  - $x^*_1 = (b_1 - (a_{12}x^*_2 + a_{13}x^*_3 + ... + a_{1n}x^*_n))/a_{11}$
  - $x^{(k)}_1 = (b_1 - (a_{12}x^{(k-1)}_2 + a_{13}x^{(k-1)}_3 + ... + a_{1n}x^{(k-1)}_n)/a_{11}$
- Calculando $e^{(k)}_1 = x^{(k)}_1 - x^*_1$, temos:
  - $e^{(k)}_1 = -(a_{12}e^{(k-1)}_2 + a_{13}e^{(k-1)}_3 + ... + a_{1n}e^{(k-1)}_n)/a_{11}$
- Analogamente:
  - $e^{(k)}_2 = -(a_{21}e^{(k-1)}_1 + a_{23}e^{(k-1)}_3 + ... + a_{2n}e^{(k-1)}_n)/a_{22}$
  - $e^{(k)}_n = -(a_{n1}e^{(k-1)}_1 + a_{n2}e^{(k-1)}_2 + ... + a_{n(n-1)}e^{(k-1)}_{n-1})/a_{nn}$

# Demonstração (continuação)

- Sejam:
  - $E^{(k)} = \max_{1\le i\le n}\{|e^{(k)}_i|\}$
  - $\alpha_i = (|a_{i1}| + \ldots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|)/|a_{ii}|,\ 1\le i\le n$
    Quando o critério das linhas é satisfeito, $\alpha_i < 1$
- Quando $k\to\infty$, $x^{(k)}\to x^*$ é equivalente a $E^{(k)}\to 0$
- Demonstraremos que $E^{(k)} \le \alpha.E^{(k-1)}$, onde $\alpha = \max_{1\le i\le n}\{\alpha_i\}$
- Para $1 \le i \le n$:
  - $e^{(k)}_i = -(a_{i1}e^{(k-1)}_1 + \ldots + a_{i(i-1)}e^{(k-1)}_{i-1} + a_{i(i+1)}e^{(k-1)}_{i+1} + \ldots + a_{in}e^{(k-1)}_n)/a_{ii}$
  - $|e^{(k)}_i| \le (|a_{i1}|.|e^{(k-1)}_1| + \ldots + |a_{i(i-1)}|.|e^{(k-1)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}|.|e^{(k-1)}_{i+1}| + \ldots + |a_{in}|.|e^{(k-1)}_n|)/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k)}_i| \le (|a_{i1}| + \ldots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|).E^{(k-1)}/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k)}_i| \le \alpha_i.E^{(k-1)}$
- Portanto, $E^{(k)} \le \alpha.E^{(k-1)}$
- Consequentemente, $E^{(k)}/E^{(k-1)} \le \alpha$
  Como $\alpha<1$, então $E^{(k)}\to 0$ quando $k\to\infty$: há convergência!

# Mais um exemplo

- Considere o sistema a seguir:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 & \longleftarrow \quad & 3+1 > 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 & \longleftarrow \quad & 5+2 > 2 \\ 6x_2 + 8x_3 &= -6 & \longleftarrow \quad & 6 < 8 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

  - No entanto, uma permutação entre as duas primeiras linhas garante a convergência:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 & \longleftarrow \quad & 2+2 < 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 & \longleftarrow \quad & 1+1 < 3 \\ 6x_2 + 8x_3 &= -6 & \longleftarrow \quad & 6 < 8 \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{Garantia de convergência}$$

  - Quando o critério das linhas não for satisfeito, convém tentar uma permutação de linhas e/ou colunas

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Método de Gauss-Seidel

- Analogamente ao Método de Gauss-Jacobi, calcula-se $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- No entanto, utiliza-se no cálculo de $x_i^{(k)}$ :
  - valores da iteração anterior: $x_{i+1}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}$
  - valores calculados na mesma iteração: $x_1^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$

# Exemplo

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\varepsilon = 0{,}05$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 0{,}75 & 0 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Processo iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= 1 - 0{,}2x_2^{(k-1)} - 0{,}2x_3^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} &= 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k)} - 0{,}25x_3^{(k-1)} \\ x_3^{(k)} &= -0{,}5x_1^{(k)} - 0{,}5x_2^{(k)} \end{aligned}$$

# Exemplo

$$x_1^{(k)} = 1 - 0,2x_2^{(k-1)} - 0,2x_3^{(k-1)}$$
$$x_2^{(k)} = 1,5 - 0,75x_1^{(k)} - 0,25x_3^{(k-1)}$$
$$x_3^{(k)} = -0,5x_1^{(k)} - 0,5x_2^{(k)}$$

- Primeira iteração:

$$x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1$$
$$x_2^{(1)} = 1,5 - 0,75.1 - 0 = 0,75$$
$$x_3^{(1)} = -0,5.1 - 0,5.0,75 = -0,875$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,75 \qquad d_r^{(1)} = 1/(\text{máx } |x_i^{(1)}|) = 1 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,875$$

# Exemplo

$$x_1^{(k)} = 1 - 0{,}2x_2^{(k-1)} - 0{,}2x_3^{(k-1)}$$
$$x_2^{(k)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k)} - 0{,}25x_3^{(k-1)}$$
$$x_3^{(k)} = -0{,}5x_1^{(k)} - 0{,}5x_2^{(k)}$$

- Segunda iteração:

$$x_1^{(2)} = 1 - 0{,}2.0{,}75 - 0{,}2.(-0{,}875) = 1{,}025$$
$$x_2^{(2)} = 1{,}5 - 0{,}75.1{,}025 - 0{,}25.(-0{,}875) = 0{,}95$$
$$x_3^{(2)} = -0{,}5.1{,}025 - 0{,}5.0{,}95 = -0{,}9875$$

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1{,}025 \\ 0{,}95 \\ -0{,}9875 \end{bmatrix}$$

$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0{,}025$

$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0{,}20$ $\quad d_r^{(2)} = 0{,}2/(\text{máx } |x_i^{(2)}|) = 0{,}1951 > \varepsilon$

$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0{,}1125$

# Exemplo

$$x_1^{(k)} = 1 - 0{,}2x_2^{(k-1)} - 0{,}2x_3^{(k-1)}$$
$$x_2^{(k)} = 1{,}5 - 0{,}75x_1^{(k)} - 0{,}25x_3^{(k-1)}$$
$$x_3^{(k)} = -0{,}5x_1^{(k)} - 0{,}5x_2^{(k)}$$

- Terceira iteração:

$$x_1^{(3)} = 1 - 0{,}2.0{,}95 - 0{,}2.(-0{,}9875) = 1{,}0075$$
$$x_2^{(3)} = 1{,}5 - 0{,}75.1{,}0075 - 0{,}25.(-0{,}9875) = 0{,}9912$$
$$x_3^{(3)} = -0{,}5.1{,}0075 - 0{,}5.0{,}9912 = -0{,}9993$$

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1{,}0075 \\ 0{,}9912 \\ -0{,}9993 \end{bmatrix}$$

$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0{,}0175$

$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0{,}0412$

$d_r^{(3)} = 0{,}0412/(\text{máx } |x_i^{(3)}|) = 0{,}0409 < \varepsilon$

$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0{,}0118$

# Critério de Sassenfeld

- Sejam os seguintes valores:

$$\beta_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \cdot \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$$

$$\beta_i = \left|\frac{1}{a_{ii}}\right| \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|\right] \text{, para } 1 < i \leq n$$

$$\beta = \text{máx } \{\beta_j\},\ 1 \leq j \leq n$$

- Se $\beta < 1$, então o Método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$
  - Quanto menor for $\beta$, mais rápida será a convergência

# Exemplo

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 &= 0{,}4 \\
0{,}6x_1 + 3x_2 - 0{,}6x_3 - 0{,}3x_4 &= -7{,}8 \\
-0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + x_3 + 0{,}2x_4 &= 1{,}0 \\
0{,}4x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 + 4x_4 &= -10{,}0
\end{aligned}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\beta_1 = (1 + 0{,}2 + 0{,}2)/2 = 0{,}7 \\
\beta_2 = (0{,}6.0{,}7 + 0{,}6 + 0{,}3)/3 = 0{,}44 \\
\beta_3 = (0{,}1.0{,}7 + 0{,}2.0{,}44 + 0{,}2)/1 = 0{,}358 \\
\beta_4 = (0{,}4.0{,}7 + 1{,}2.0{,}44 + 0{,}8.0{,}358)/4 = 0{,}2736
\end{array}
\right\} \beta = 0{,}7 < 1
$$

# Demonstração

- Sejam:
  - $x^* = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
  - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \ldots, x^{(k)}_n]^T$: a k-ésima aproximação de $x^*$
  - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: erro na k-ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k\to\infty} e^{(k)}_i = 0$, $1 \le i \le n$
- No método de Gauss-Seidel, podemos constatar que:
  - $e^{(k)}_1 = -(a_{12}e^{(k-1)}_2 + a_{13}e^{(k-1)}_3 + \ldots + a_{1n}e^{(k-1)}_n)/a_{11}$
  - $e^{(k)}_2 = -(a_{21}e^{(k)}_1 + a_{23}e^{(k-1)}_3 + \ldots + a_{2n}e^{(k-1)}_n)/a_{22}$
  - $e^{(k)}_n = -(a_{n1}e^{(k)}_1 + a_{n2}e^{(k)}_2 + \ldots + a_{n(n-1)}e^{(k)}_{n-1})/a_{nn}$
- Sejam:
  - $E^{(k)} = \text{máx}_{1 \le i \le n}\{|e^{(k)}_i|\}$
  - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|)/|a_{11}|$
  - $\beta_i = (\beta_1.|a_{i1}| + \ldots + \beta_{i-1}.|a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|)/|a_{ii}|$, $1 < i \le n$

# Demonstração (continuação)

- Quando $k\to\infty$, $x^{(k)}\to x^*$ é equivalente a $E^{(k)}\to 0$
- Demonstraremos por indução no índice i ($1\leq i\leq n$) que $E^{(k)} \leq \beta.E^{(k-1)}$, onde $\beta = \text{máx}_{1\leq i\leq n}\{\beta_i\}$
- Base (i=1):
  - $|e^{(k)}{}_1| \leq (|a_{12}|.|e^{(k-1)}{}_2| + |a_{13}|.|e^{(k-1)}{}_3| + ... + |a_{1n}|.|e^{(k-1)}{}_n|)/|a_{11}|$
  - $|e^{(k)}{}_1| \leq [(|a_{12}| + |a_{13}| + ... + |a_{1n}|)/|a_{11}|].\text{máx}_{1\leq i\leq n}\{|e^{(k-1)}{}_i|\}$
  - $|e^{(k)}{}_1| \leq \beta_1.E^{(k-1)} \leq \beta.E^{(k-1)}$
- Hipótese ($1<i\leq n$): $|e^{(k)}{}_{i-1}| \leq \beta_{i-1}.E^{(k-1)} \leq \beta.E^{(k-1)}$
- Passo ($1<i\leq n$):
  - $|e^{(k)}{}_i| \leq (|a_{i1}|.|e^{(k)}{}_1| + ... + |a_{i(i-1)}|.|e^{(k)}{}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}|.|e^{(k-1)}{}_{i+1}| + ... + |a_{in}|.|e^{(k-1)}{}_n|)/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k)}{}_i| \leq (|a_{i1}|.\beta_1 + ... + |a_{i(i-1)}|.\beta_{i-1} + |a_{i(i+1)}| + ... + |a_{in}|).E^{(k-1)}/|a_{ii}|$
  - $|e^{(k)}{}_i| \leq \beta_i.E^{(k-1)} \leq \beta.E^{(k-1)}$
- Portanto, $E^{(k)}/E^{(k-1)} \leq \beta$
- Como $\beta<1$, então $E^{(k)}\to 0$ quando $k\to\infty$: há convergência!

# Exemplos

- Considere o sistema abaixo, anteriormente visto:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 1/1 = 1 \\ \beta_2 &= (1.1)/3 = 1/3 \\ \beta &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Não há garantia de convergência}$$

  - No entanto, o Método de Gauss-Seidel converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
  - Isso mostra que o critério de Sassenfeld, como o critério das linhas, é <u>suficiente</u>, mas <u>não necessário</u>

- Considere outro sistema:

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 &= 23 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1/10 = 0{,}1 \\ \beta_2 &= (6.0{,}1)/2 = 0{,}3 \\ \beta &= 0{,}3 < 1 \end{aligned}$$

  - Neste caso, o critério de Sassenfeld garante a convergência, mas o critério das linhas, não...

# Relação entre os critérios

- Se um sistema satisfaz o critério das linhas, então também satisfará o critério de Sassenfeld
- Demonstração:
  - Seja $\alpha = \text{máx}_{1 \leq i \leq n}\{\alpha_i\} < 1$,
    onde $\alpha_i = (|a_{i1}| + \ldots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|)/|a_{ii}|$
  - Vamos provar por indução em i que $\beta_i \leq \alpha_i < 1$, $1 \leq i \leq n$
  - Base (i=1):
    - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{1n}|)/|a_{11}| = \alpha_1 < 1$
  - Hipótese ($1 < i \leq n$): $\beta_{i-1} \leq \alpha_{i-1} < 1$
  - Passo ($1 < i \leq n$):
    - $\beta_i = (\beta_1.|a_{i1}| + \ldots + \beta_{i-1}.|a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|)/|a_{ii}|$
    - $\beta_i \leq (|a_{i1}| + \ldots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \ldots + |a_{in}|)/|a_{ii}| = \alpha_i < 1$
  - Portanto, $\alpha < 1 \Rightarrow \beta < 1$
- A volta nem sempre é verdadeira...

# CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
  - Regra de Cramer
  - Eliminação de Gauss
  - Gauss-Jordan
  - Resíduos e Condicionamento de Sistemas
  - Decomposição LU
- Métodos iterativos
  - Gauss-Jacobi
  - Gauss-Seidel
- Considerações finais

# Considerações finais

- Tanto o critério das linhas como o critério de Sassenfeld são condições *suficientes* para a convergência, mas não *necessárias*
- Em sistemas esparsos (com grande número de coeficientes nulos), o Método da Eliminação de Gauss não é apropriado, pois não preserva esta vantajosa qualidade. Nesses casos, *convém utilizar métodos iterativos*
- Os métodos iterativos são menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento

# Métodos diretos *versus* iterativos

- Convergência
  - Diretos: não faz sentido considerar essa questão, pois calculam a solução exata
  - Iterativos: ocorre sob determinadas condições
- Esparsidade da matriz de coeficientes
  - Diretos: alteram a estrutura da matriz
  - Iterativos: utilizam sempre a matriz inicial
- Erros de arredondamento
  - Diretos: ocorrem a cada etapa e acumulam-se
  - Iterativos: somente os erros da última etapa afetam a solução