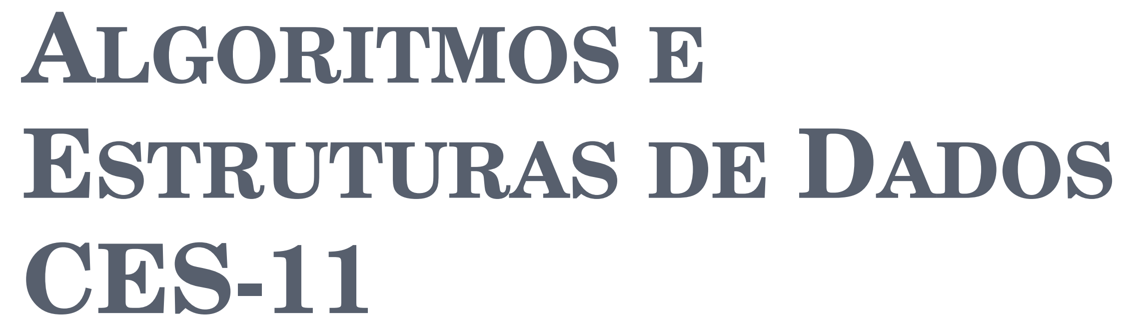



**Prof. Paulo André Castro**
**pauloac@ita.br**
**Sala 110 – Prédio da Computação**
**www.comp.ita.br/~pauloac**
**IECE - ITA**

# MÉTODOS MAIS EFICIENTES QUE $O(n^2)$

- Método Quicksort
- Método Heap-Sort
- Método MergeSoft

# O MÉTODO QUICK-SORT

**Generalidades e fundamentos**

- **Quick-Sort** é provavelmente o algoritmo de ordenação **mais usado** por programadores em geral. Foi criado por C.Hoare em 1960.

- Durante muito tempo, pesquisadores de métodos de ordenação se dedicaram mais a **aperfeiçoar o Quick-Sort** do que a procurar **novos métodos**.

- No caso médio, Quick-Sort é **$O(n \log_2 n)$** e no pior caso é **$O(n^2)$**.
- Quick-Sort é **recursivo**, mas pode ser transformado em **não recursivo**, mediante o uso de **pilha**.
- Quick-Sort aplica a técnica denominada **divisão e conquista**, que reparte o vetor a ser ordenado em dois sub-vetores e os ordena independentemente.

O método consiste em:

1. Escolher, mediante um critério razoável, um **pivô** entre todos os elementos do vetor a ser ordenado

Bom é quando tal **pivô** é a **mediana** de todos os elementos, ou seja, quando ele consegue dividir o vetor ao meio

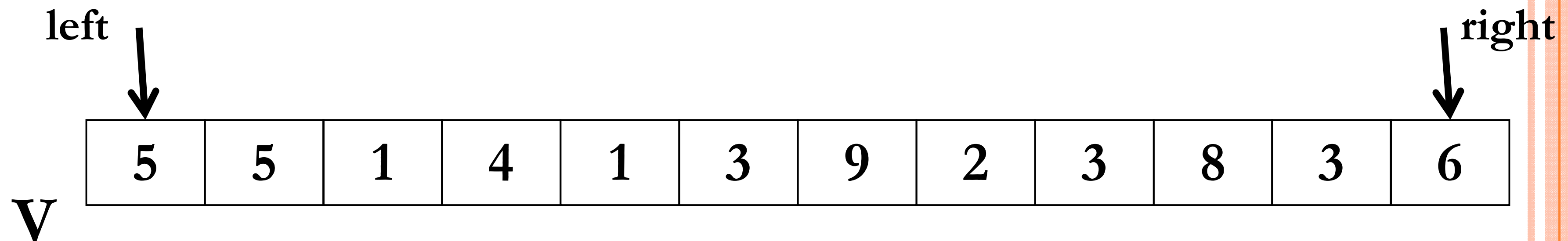
Exemplo: seja o vetor

**V**

| 5 | 5 | 1 | 4 | 1 | 3 | 9 | 2 | 3 | 8 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Seja o maior entre os dois elementos distintos mais à esquerda escolhido como **pivô** **(pivô = 5)**

2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes

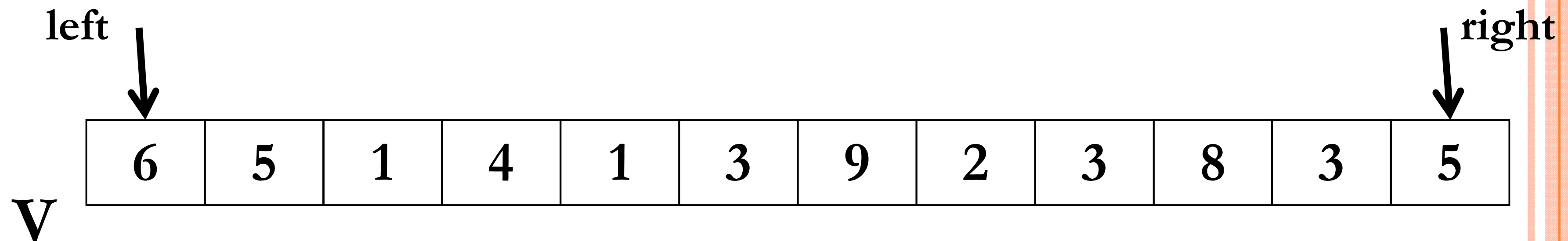



**pivô = 5**

Incondicionalmente, trocar **V[left]** com **V[right]**

(para facilitar a elaboração do algoritmo)

2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes

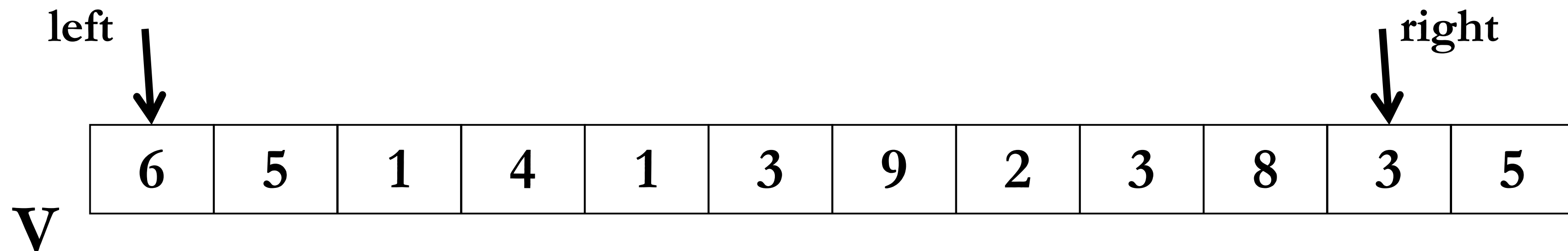



**pivô = 5**

Mover **left** para a direita até **V[left] ≥ pivô**

Mover **right** para a esquerda até **V[right] < pivô**

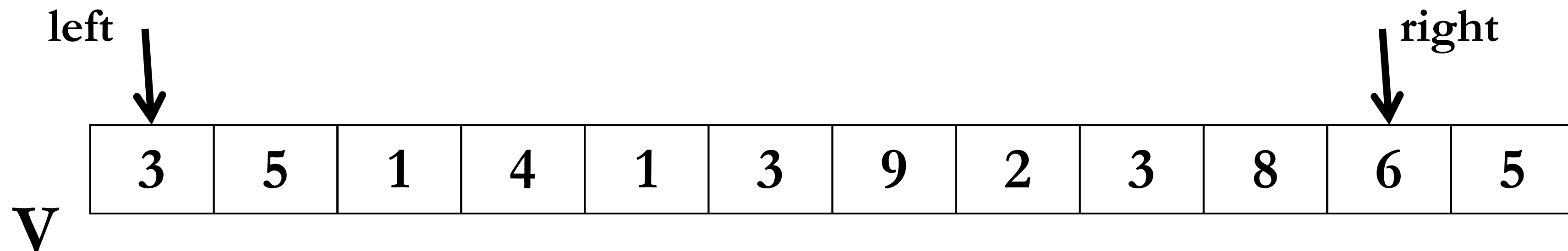
2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes




**pivô = 5**

Trocar **V[left]** com **V[right]**

2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes

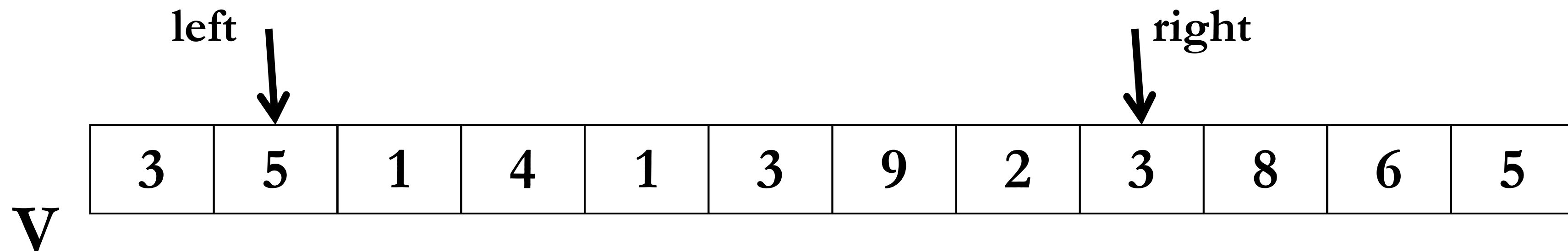



**pivô = 5**

Mover **left** para a direita até **V[left] ≥ pivô**

Mover **right** para a esquerda até **V[right] < pivô**

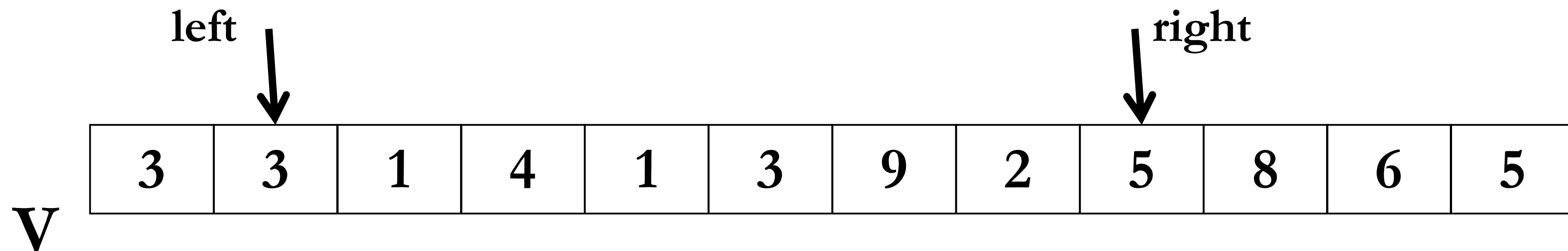
2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes




**pivô = 5**

Trocar **V[left]** com **V[right]**

2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes

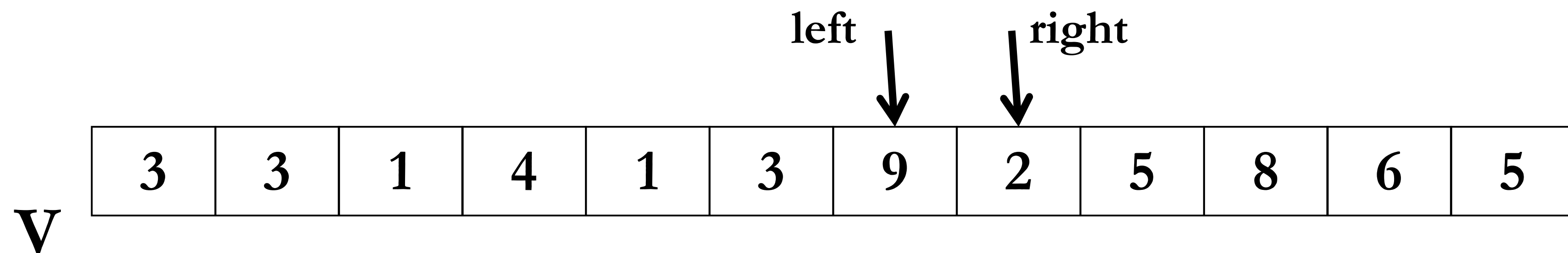



pivô = 5

Mover **left** para a direita até **V[left] ≥ pivô**

Mover **right** para a esquerda até **V[right] < pivô**

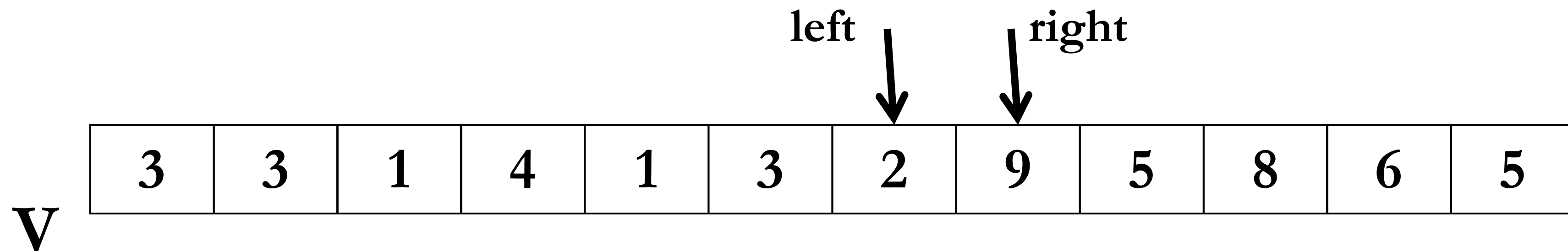
2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes




**pivô = 5**

Trocar **V[left]** com **V[right]**

2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes

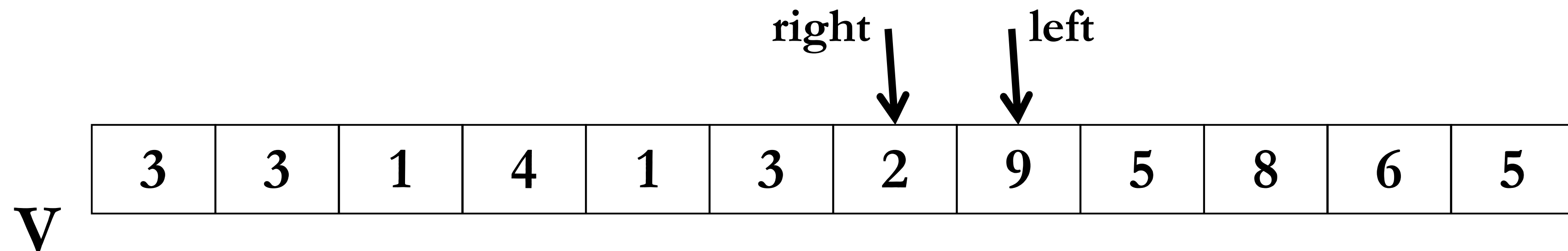



**pivô = 5**

Mover **left** para a direita até **V[left] ≥ pivô**

Mover **right** para a esquerda até **V[right] < pivô**

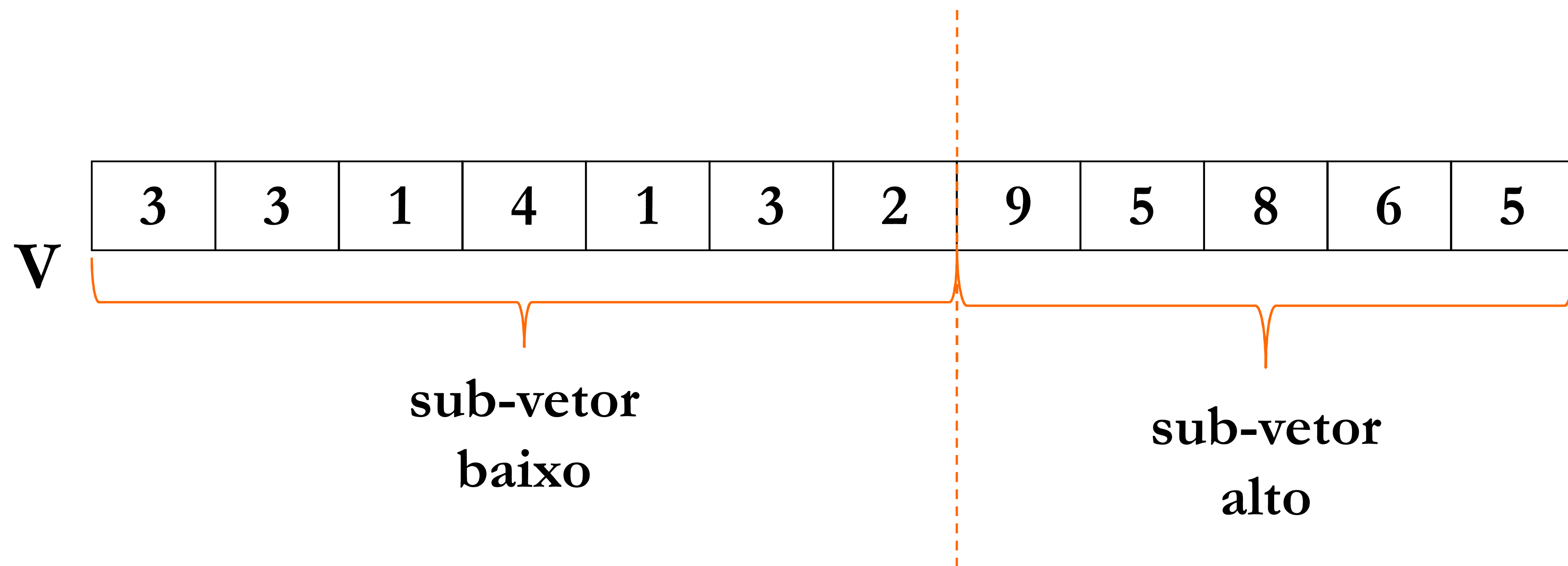
2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes




pivô = 5

A divisão está completa pois **left > right**

2. Dividir o vetor em 2 partes: **sub-vetor baixo** e **sub-vetor alto**, colocando no primeiro, todos os elementos **menores** que o pivô, e no segundo, os elementos restantes



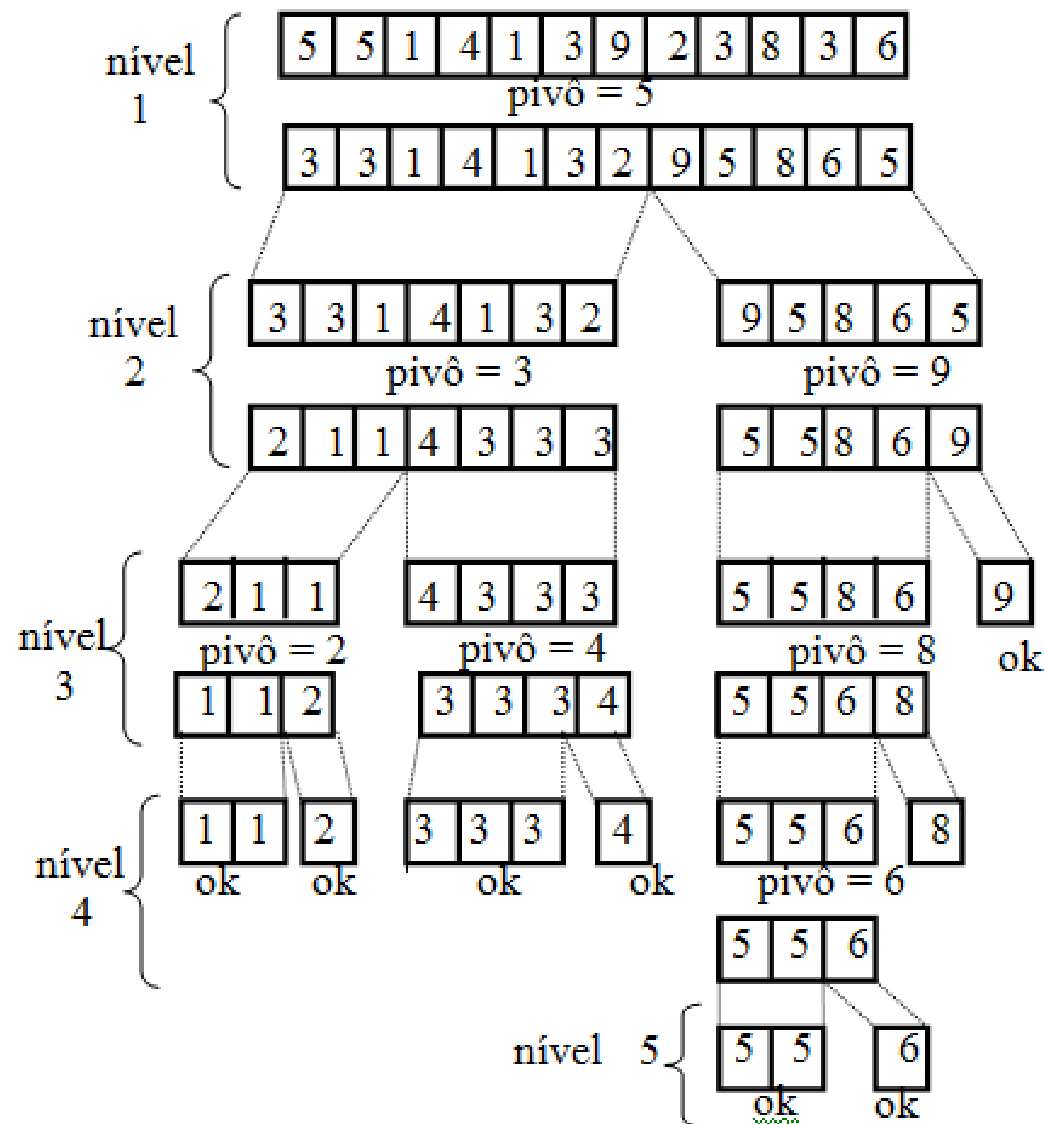

**Pior caso: um dos sub-vetores com um só elemento e o outro com mais de um**

## Aplicar **recursivamente** os passos anteriores nos 2 sub-vetores formados

Encerrar a recursividade quando, num dado sub-vetor, todos os seus elementos forem iguais

Outros critérios para a **escolha do pivô**:

- Um dos elementos **extremos** do vetor
- **Média** de três elementos **aleatórios**




Seqüência ordenada: 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 8, 9

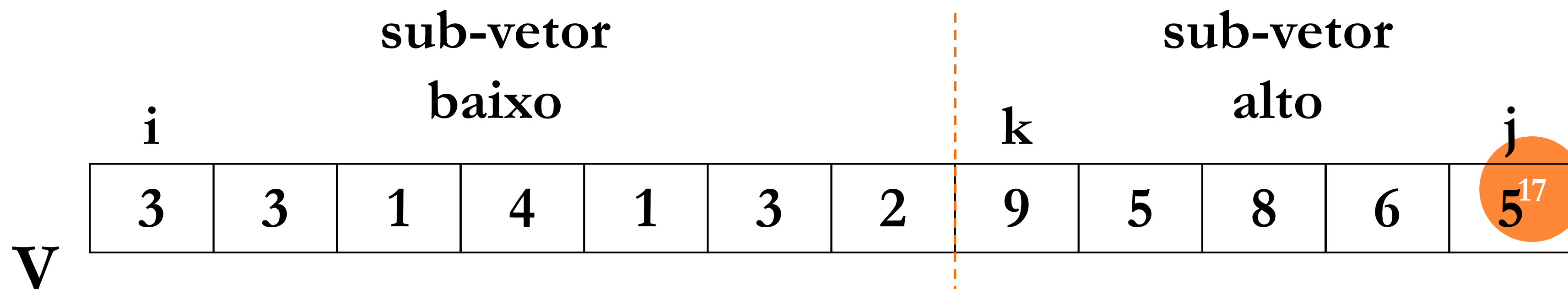
# 5.4.2 – Programação

```
void QuickSort
            (int i,int j,vetor V) {
  int pivot, pivind, k;
  pivind = Pivo(i, j, V);
  if (pivind != -1) {
      pivot = V[pivind];
      k = Particao (i, j, pivot, V);
      QuickSort (i, k-1, V);
      QuickSort (k, j, V);
  }
}
```

**QuickSort** atua entre os índices **i** e **j** do vetor **V**

**Pivo** retorna o índice do pivô no intervalo **[i, j]** do vetor **V**; retorna -1, caso o intervalo não tenha pivô (sem elementos distintos)

**Particao** divide o intervalo **[i, j]** do vetor **V** nos sub-vetores baixo e alto, retornando o índice do 1º elemento no sub-vetor alto



**Função Pivô:** retorna -1, se o vetor no trecho considerado não possui elementos distintos; caso contrário retorna o índice do maior entre os dois elementos distintos mais à esquerda.

```
int Pivo (int i,int j, vetor V) {
  int prim, k, indpiv; int achou;
  prim = V[i]; achou = FALSE;
  k = i+1; indpiv = -1;
  while (! achou && k <= j)
      if (V[k] == prim) k++;
      else {
            achou = TRUE;
            if (V[k] > prim) indpiv = k;
            else indpiv = i;
      }
  return indpiv;
}
```

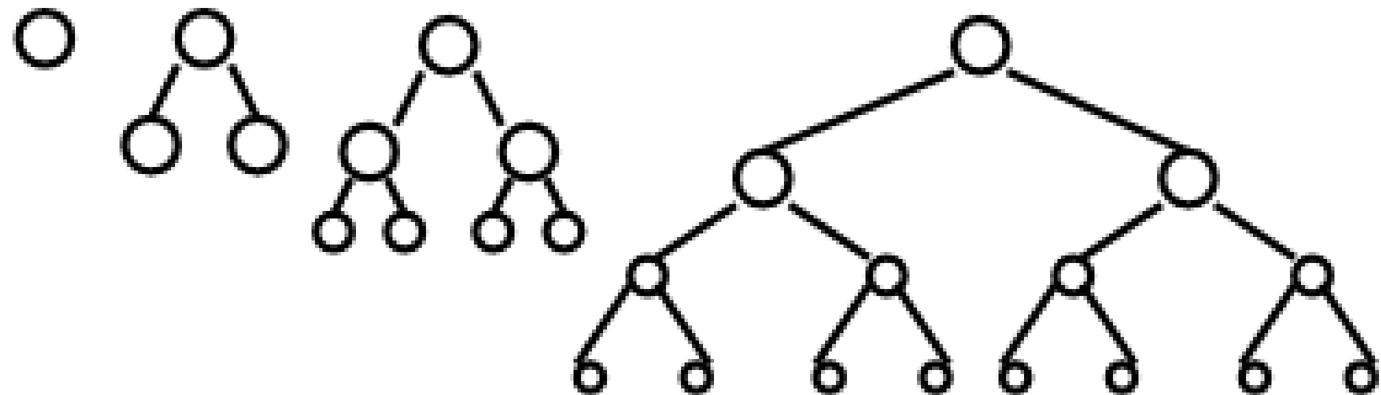
**Função Partição:** faz a permutação dos elementos do vetor e acha o ponto de partição nos dois subvetores:

```
int Particao (int i, int j,int piv; vetor V) {
  int left, right, aux;
  left = i; right = j;
  do {
      aux = V[left]; V[left] = V[right];
      V[right] = aux;
      while (V[left] < piv) left++;
      while (V[right] >= piv) right--;
  } while (left <= right);
   return left;
}
```

# O MÉTODO HEAP-SORT

**Definição de heap**

- **Árvore binária completa:** tem **todos** os nós possíveis em cada nível; exemplos:



nível 0: 1 nó
nível 1: 2 nós
nível 2: 4 nós
nível 3: 8 nós
:
nível i: $2^i$ nós

Nº total de nós de uma árvore completa:

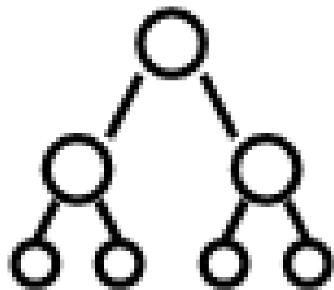
$$\sum_{i=0}^{h} 2^i \, nos = 2^{h+1} - 1$$

h: altura da árvore

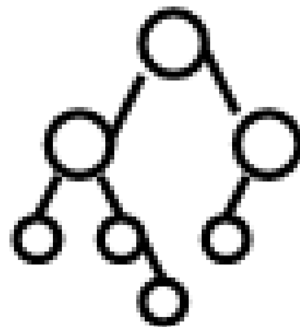
**Heap:** árvore binária completa ou a árvore binária:

- Que é completa pelos menos até o seu penúltimo nível e
- Na qual as folhas do último nível estão o **mais à esquerda** possível.

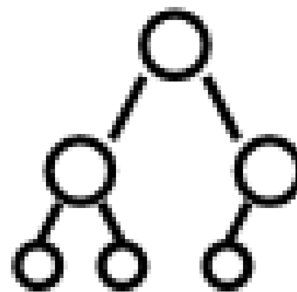
**Exemplos:**



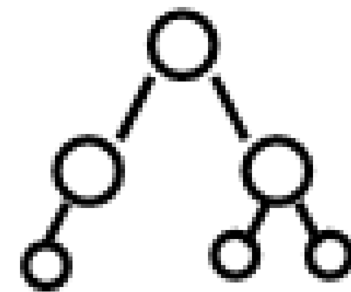
é heap



não é heap

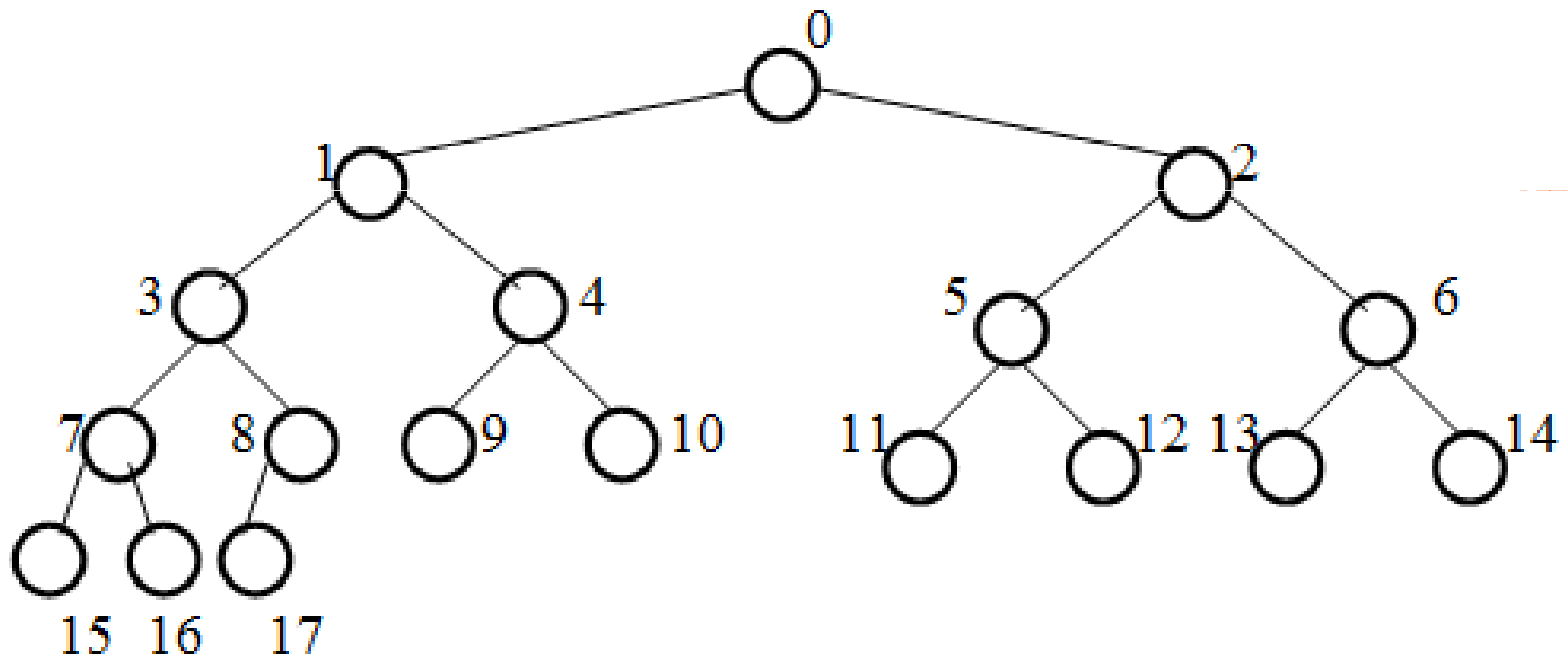


é heap



não é heap

- A estrutura de um heap é **única** para um número fixo de nós
- **Exemplo:** o **heap** abaixo com 18 nós é único

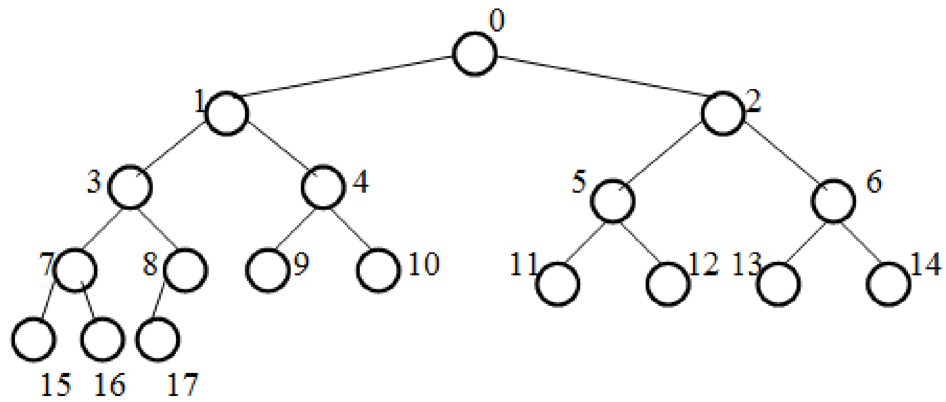


- Estrutura de dados para heap's: vetor de **n** inteiros

- **Declarações:**

```
typedef int vetor[200];
struct heap {vet elem; int n;};

heap H1, H2;
```

- **Observação:** os nós são os índices do vetor; exemplo a seguir



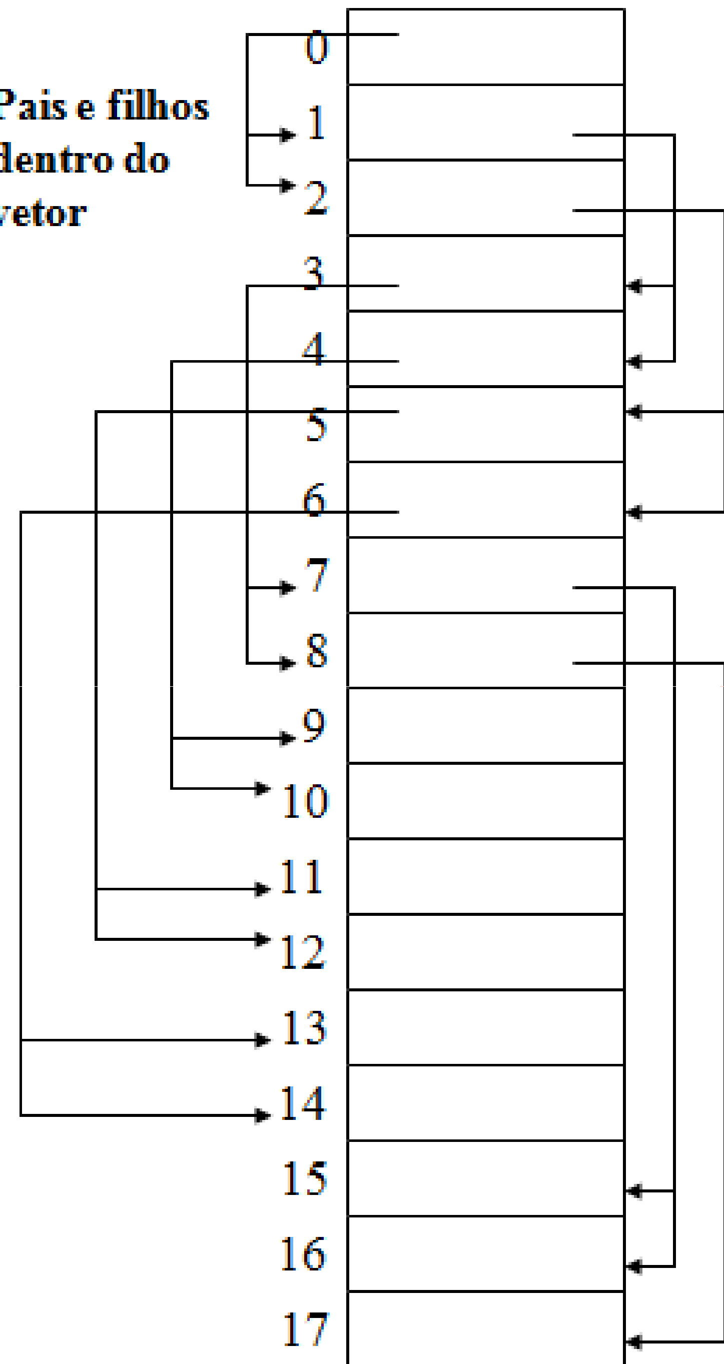

Propriedades dessa representação:

nó **i**: i$^{ésima}$ posição do vetor

nó **i** tem como filhos **2i + 1**, **2i + 2**

pai: $\lfloor (i-1) / 2 \rfloor$

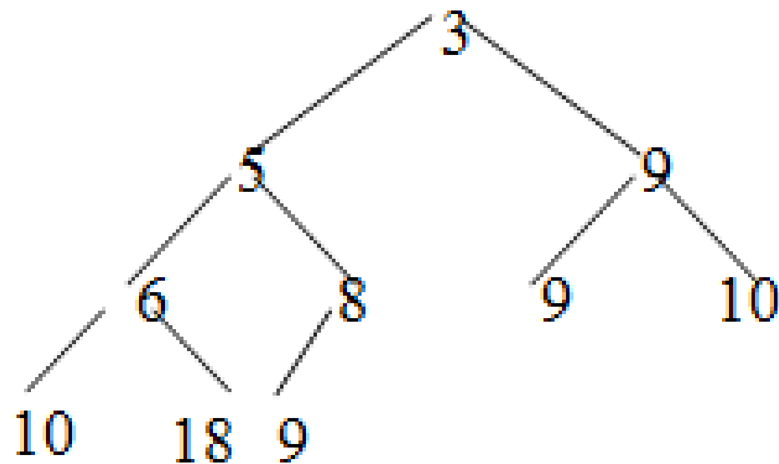
altura de um **heap** de **n** nós: $\lfloor \log_2 n \rfloor$

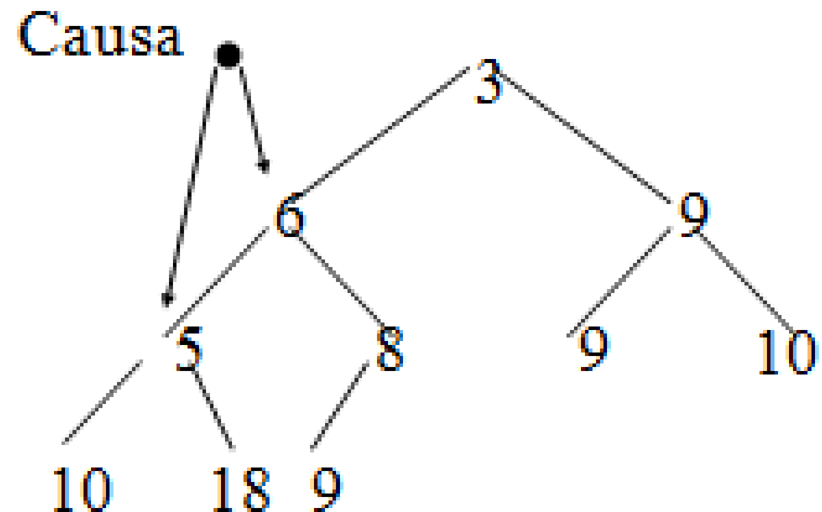


## 5.5.2 – Fila de prioridades

**a) Definição:** é um heap em que o valor de um nó é sempre menor ou igual aos de seus eventuais filhos

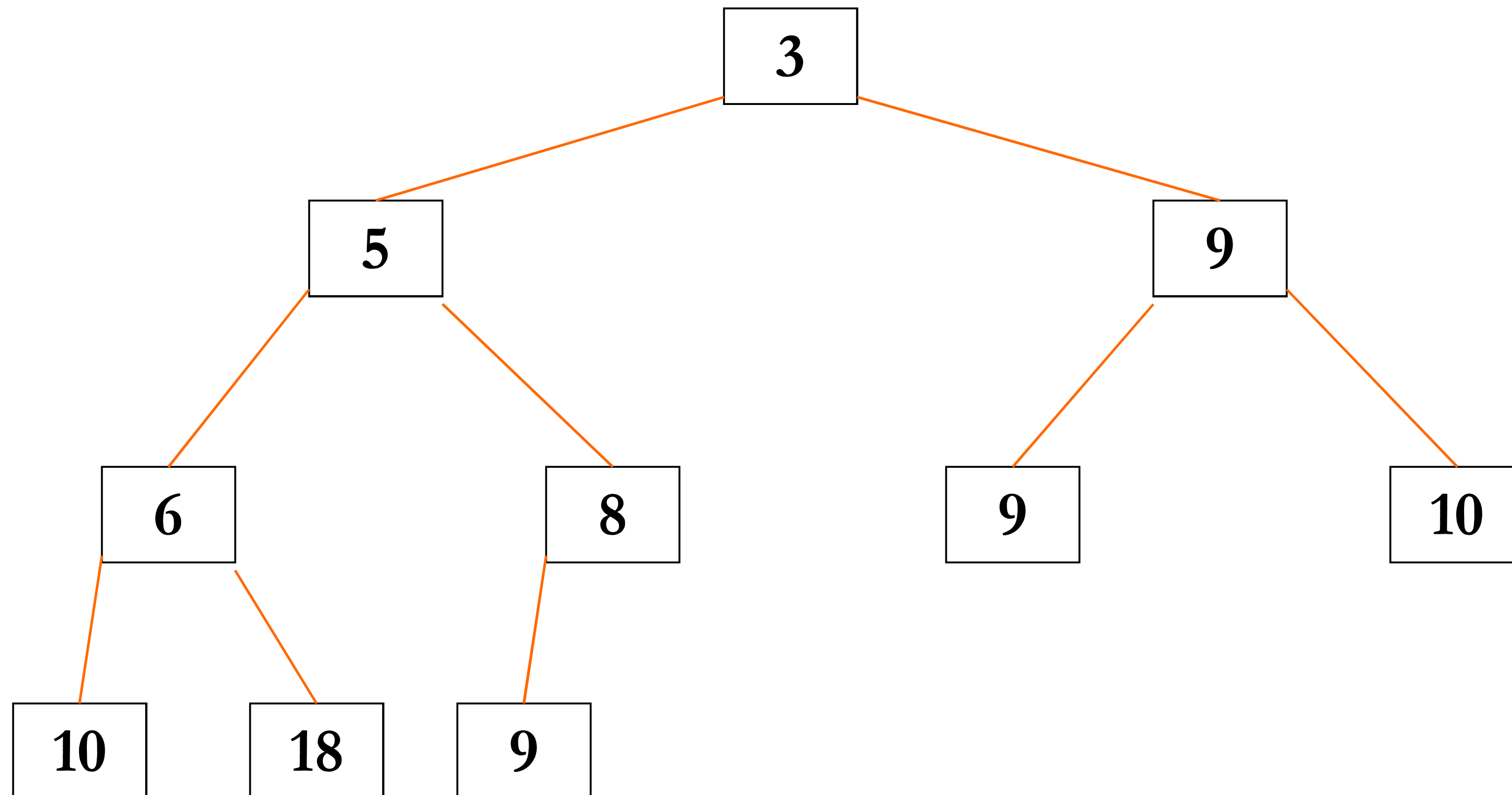
**Exemplos:**



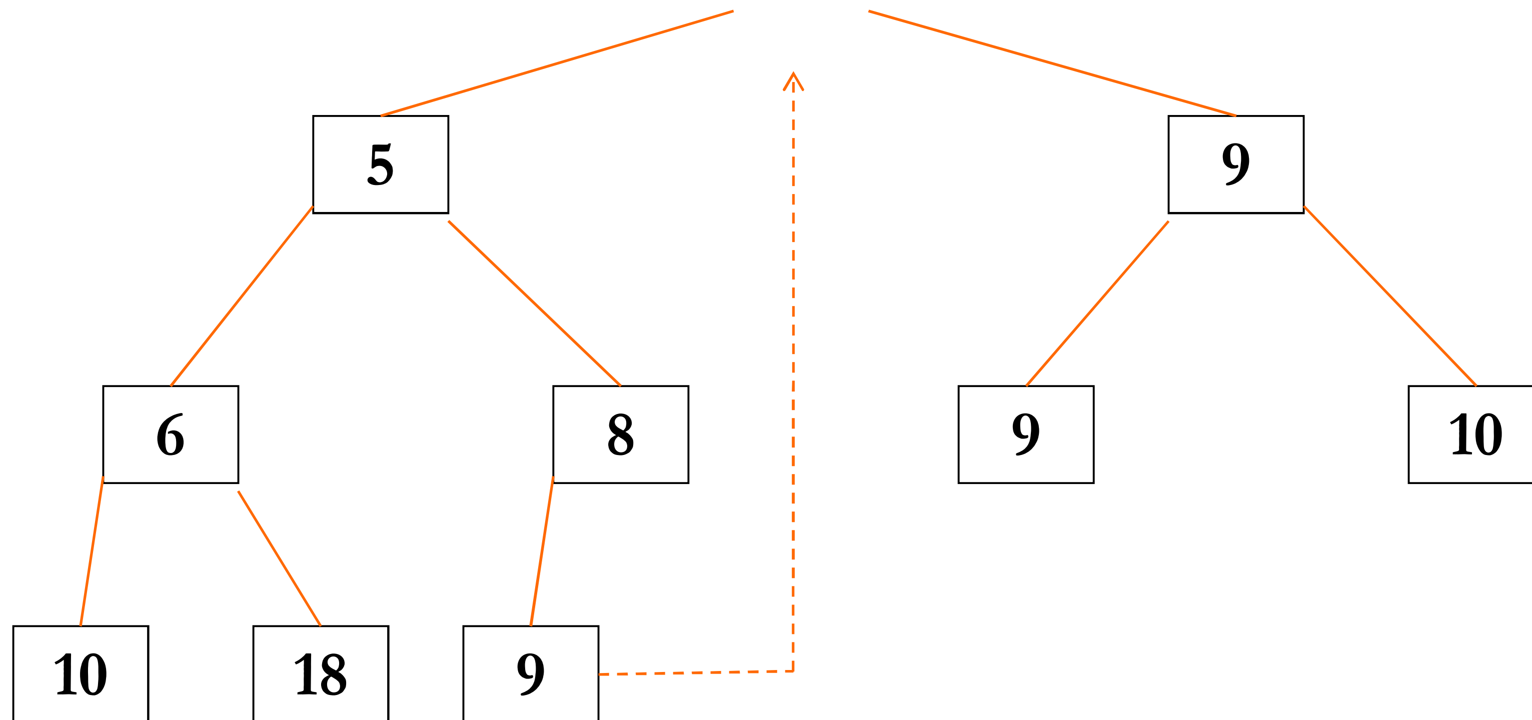



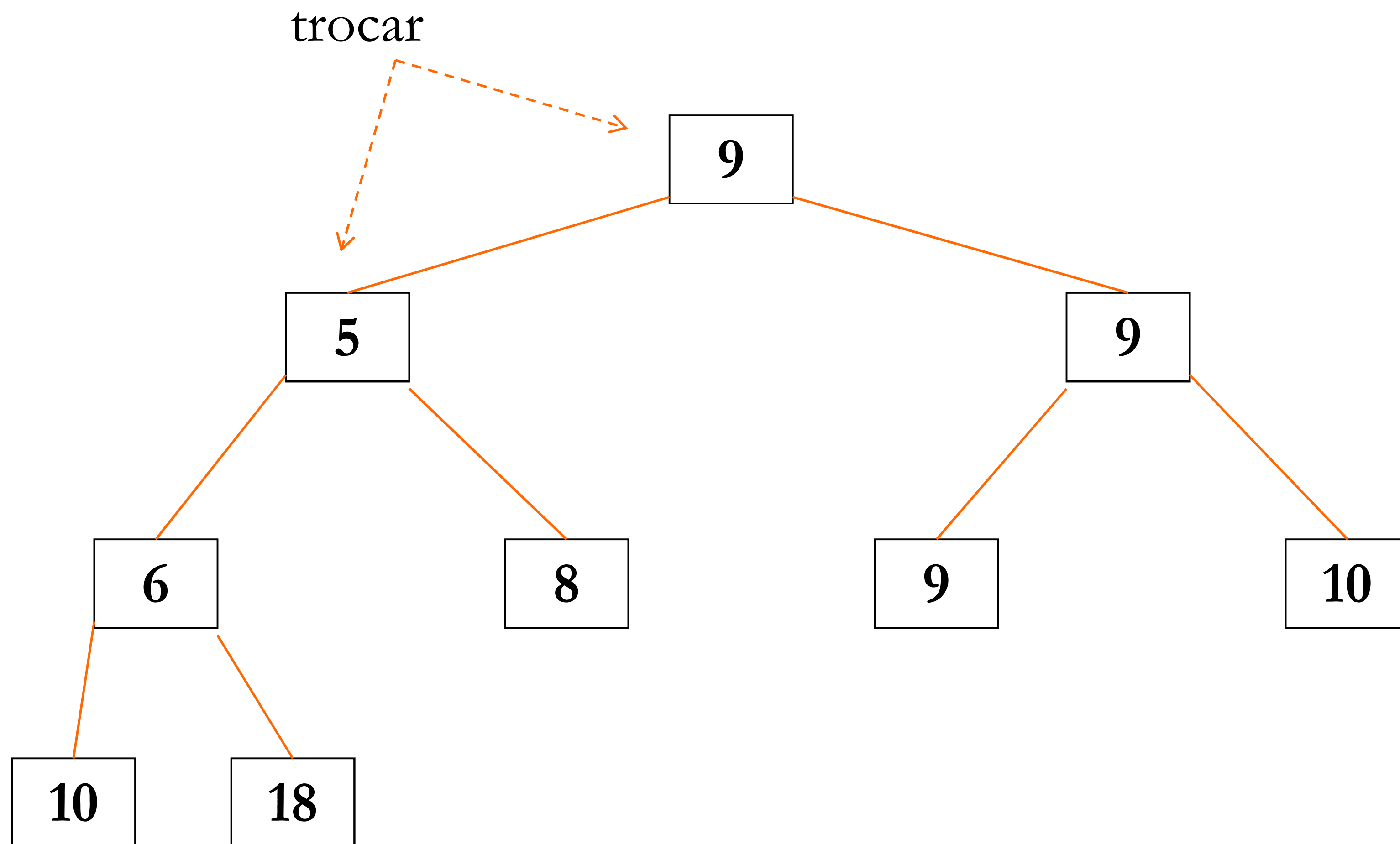
**b)** Operação de **deletar o elemento mínimo** duma fila de prioridades:

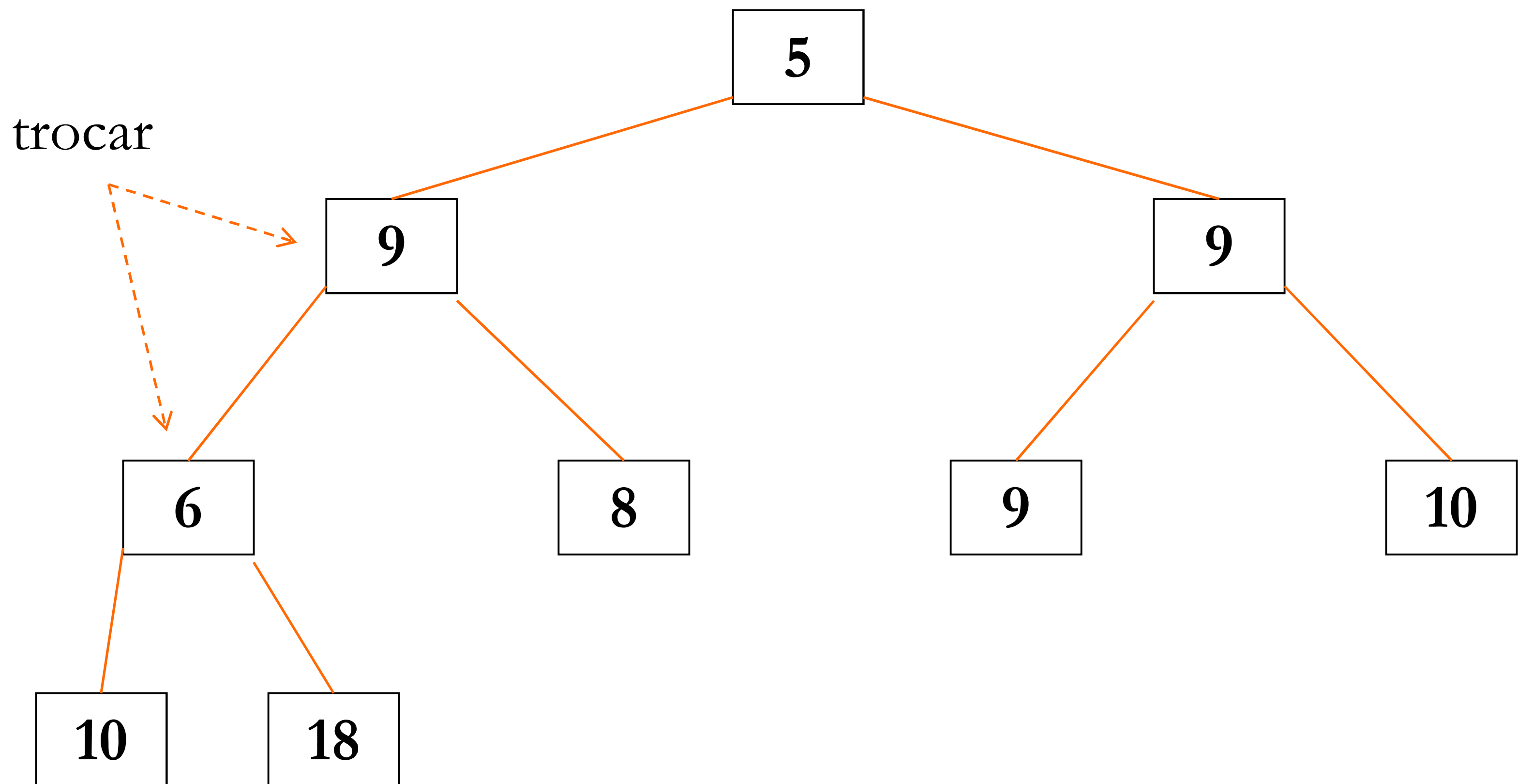
Inicialmente:



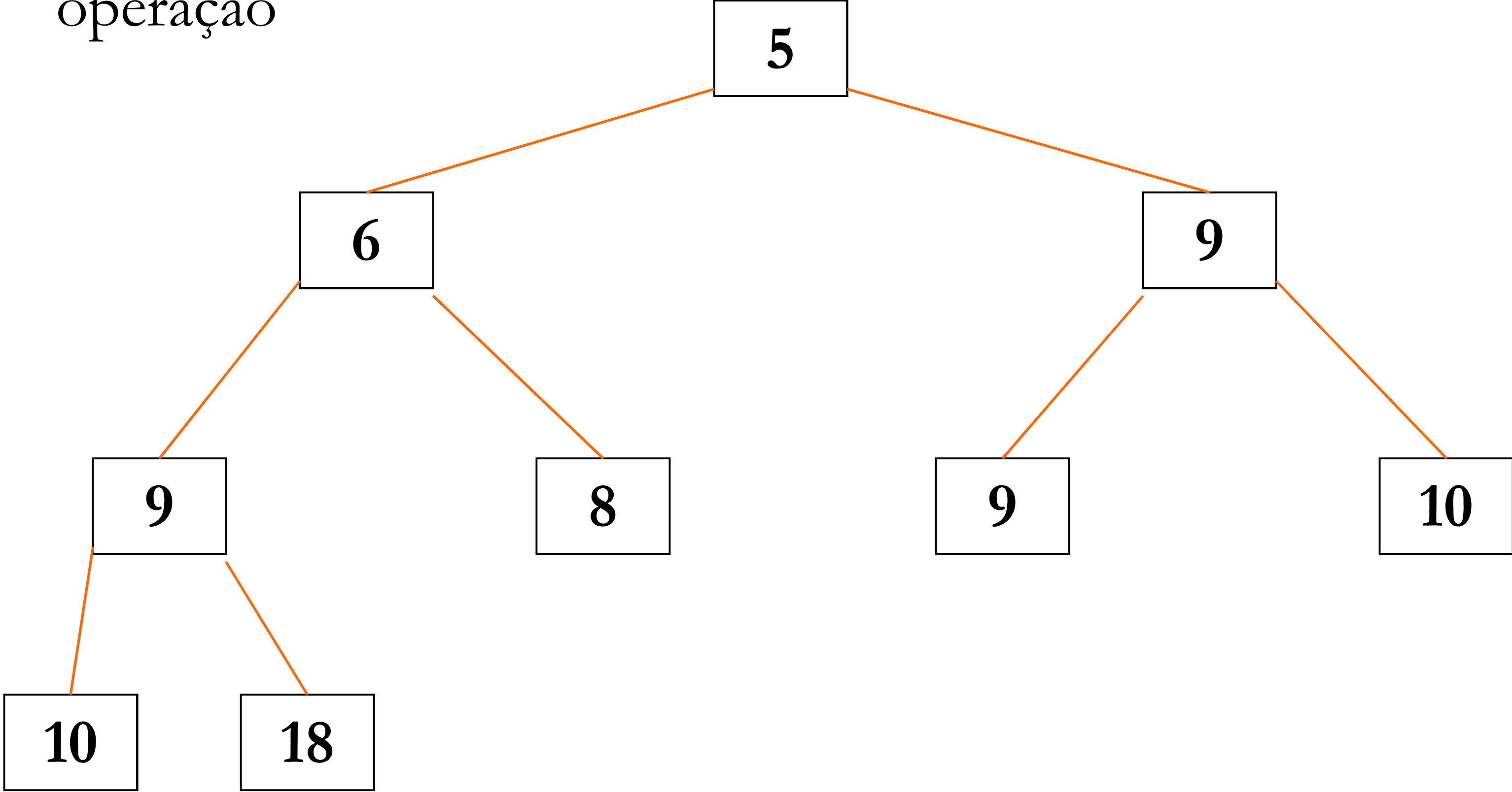
Retira-se a raiz e coloca-se ali o último elemento




trocar
9
5
9
6
8
9
10
10
18

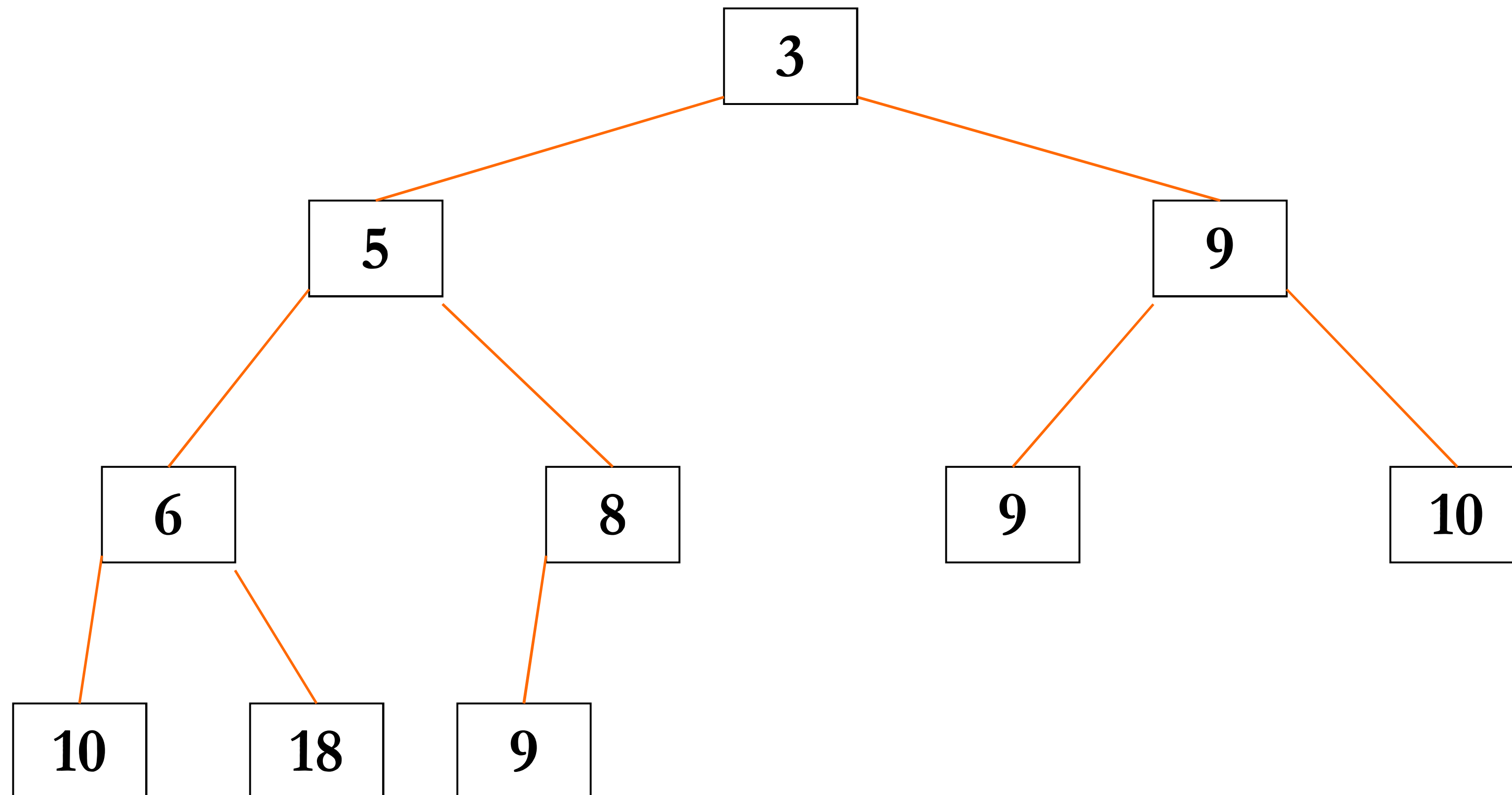

trocar
5
9
9
6
8
9
10
10
18

fim da operação

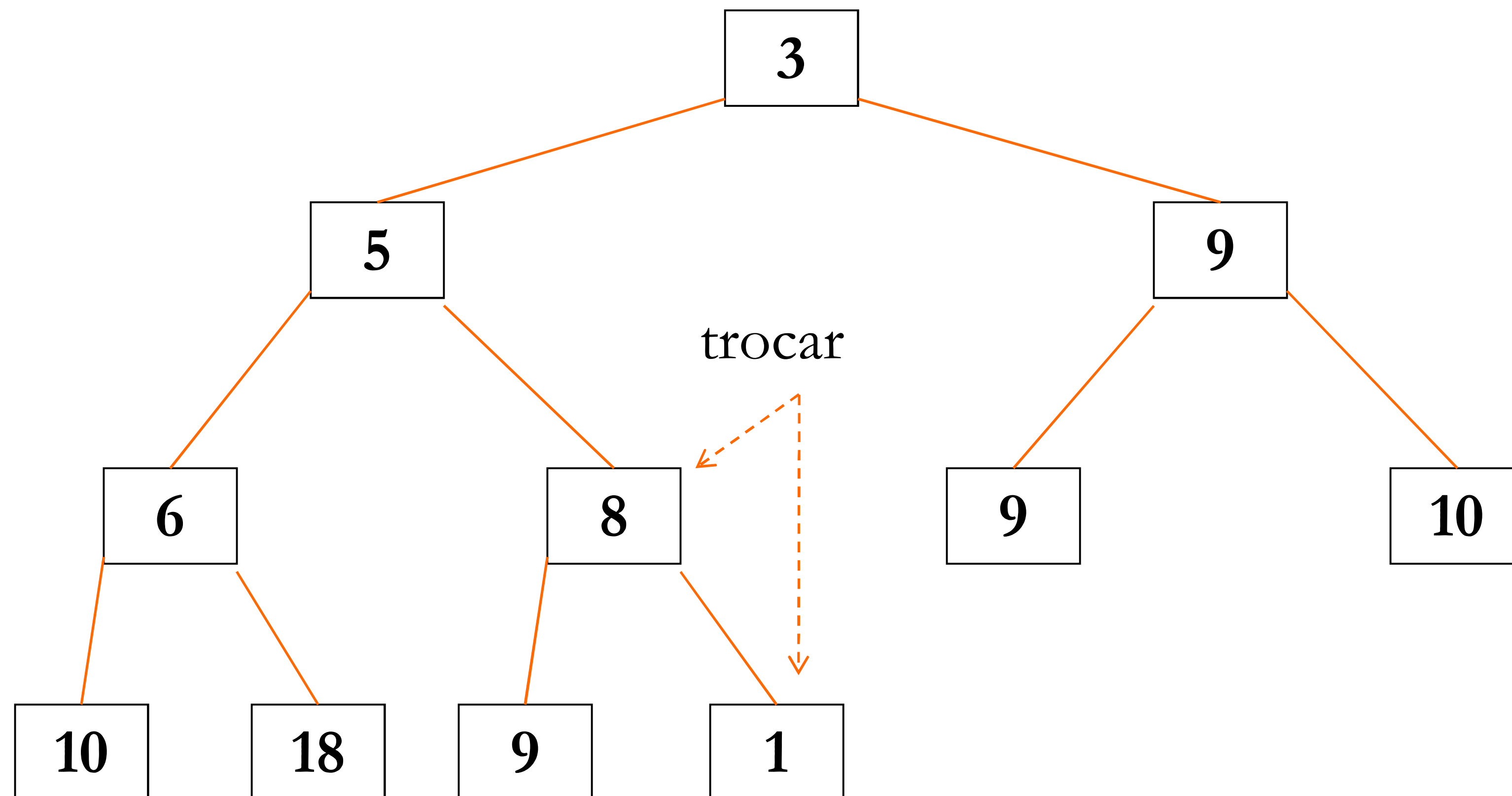


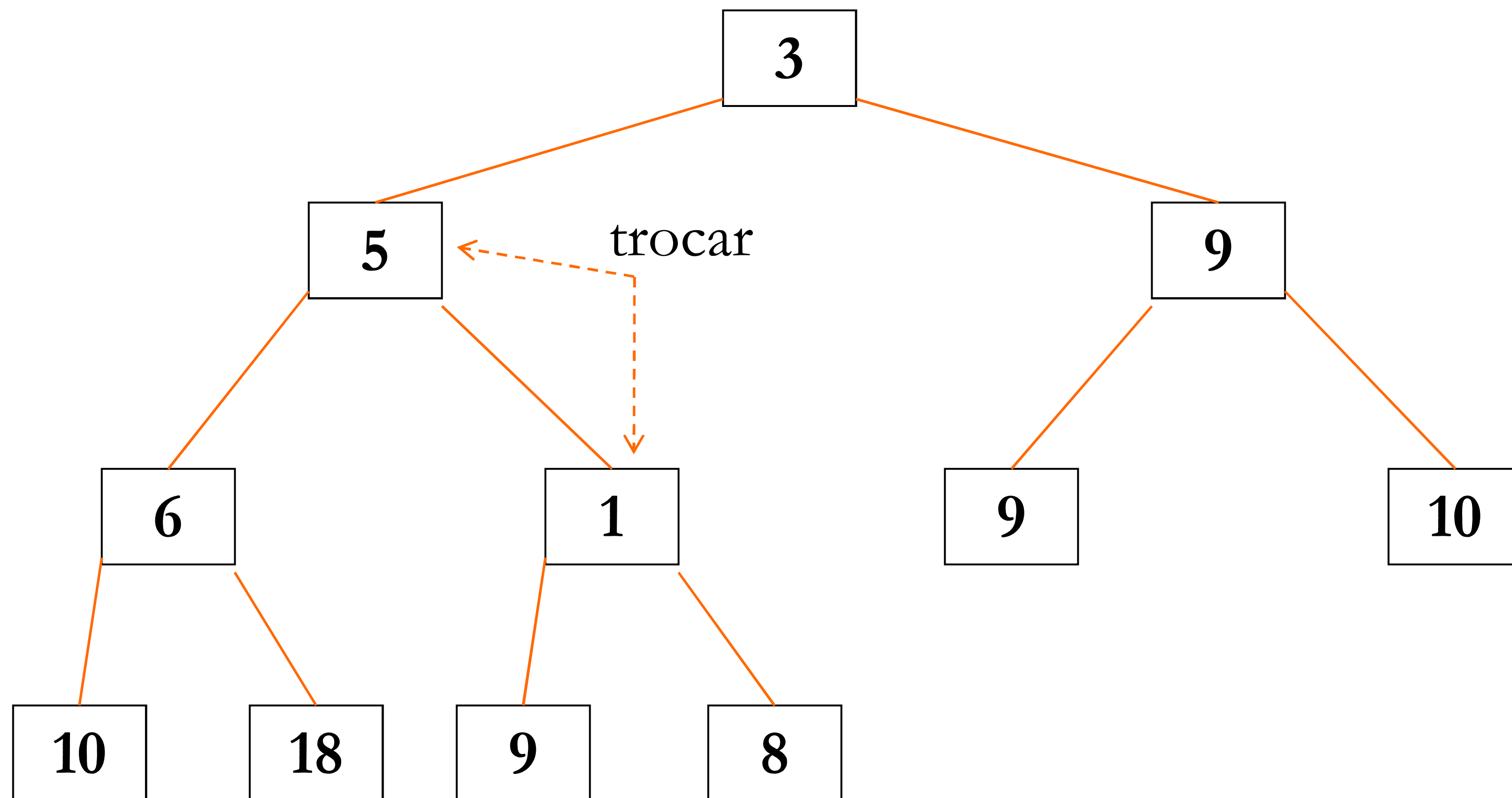
**c)** Operação de **inserir um elemento** numa fila de prioridades:

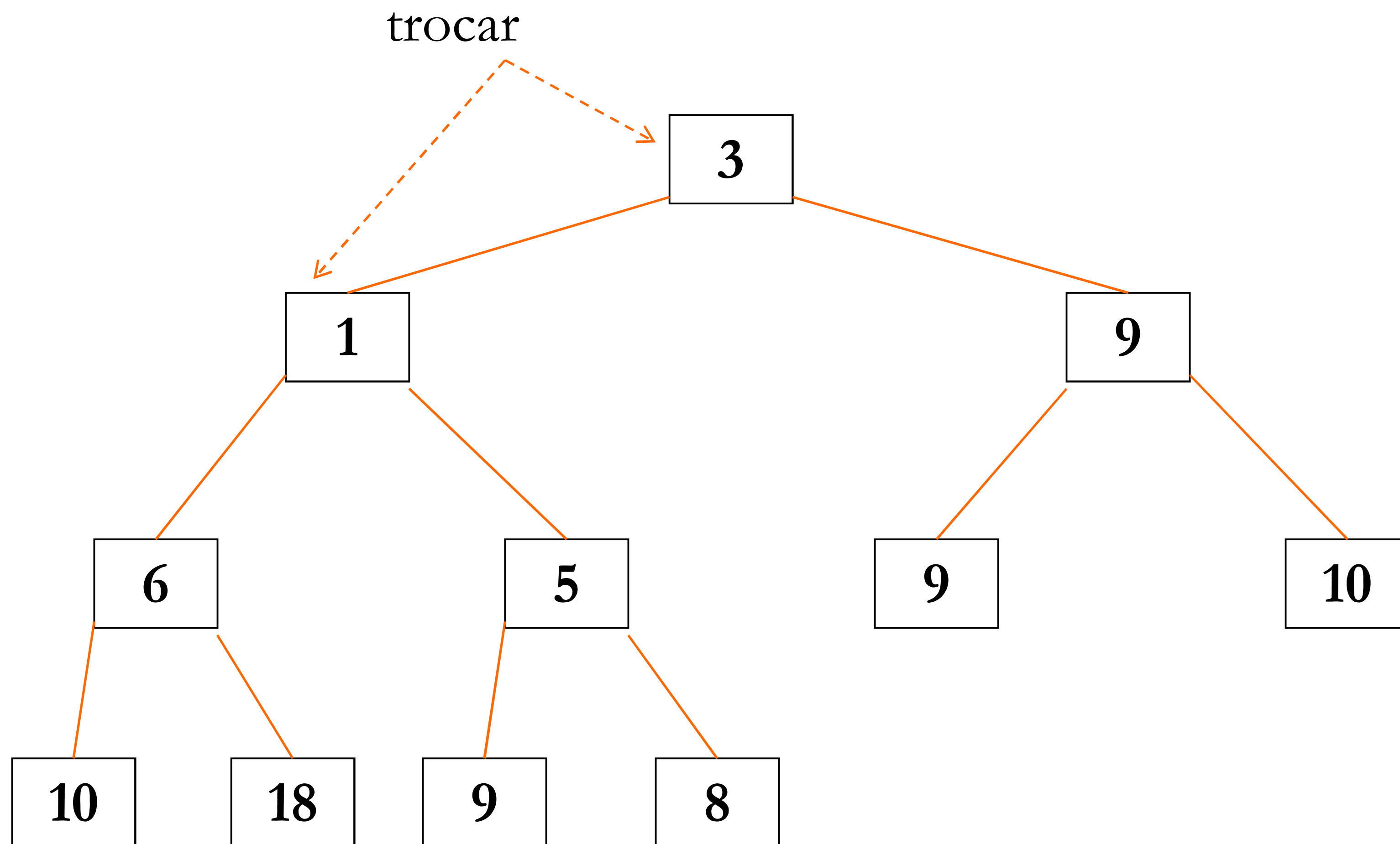
Seja a inserção do **1**:



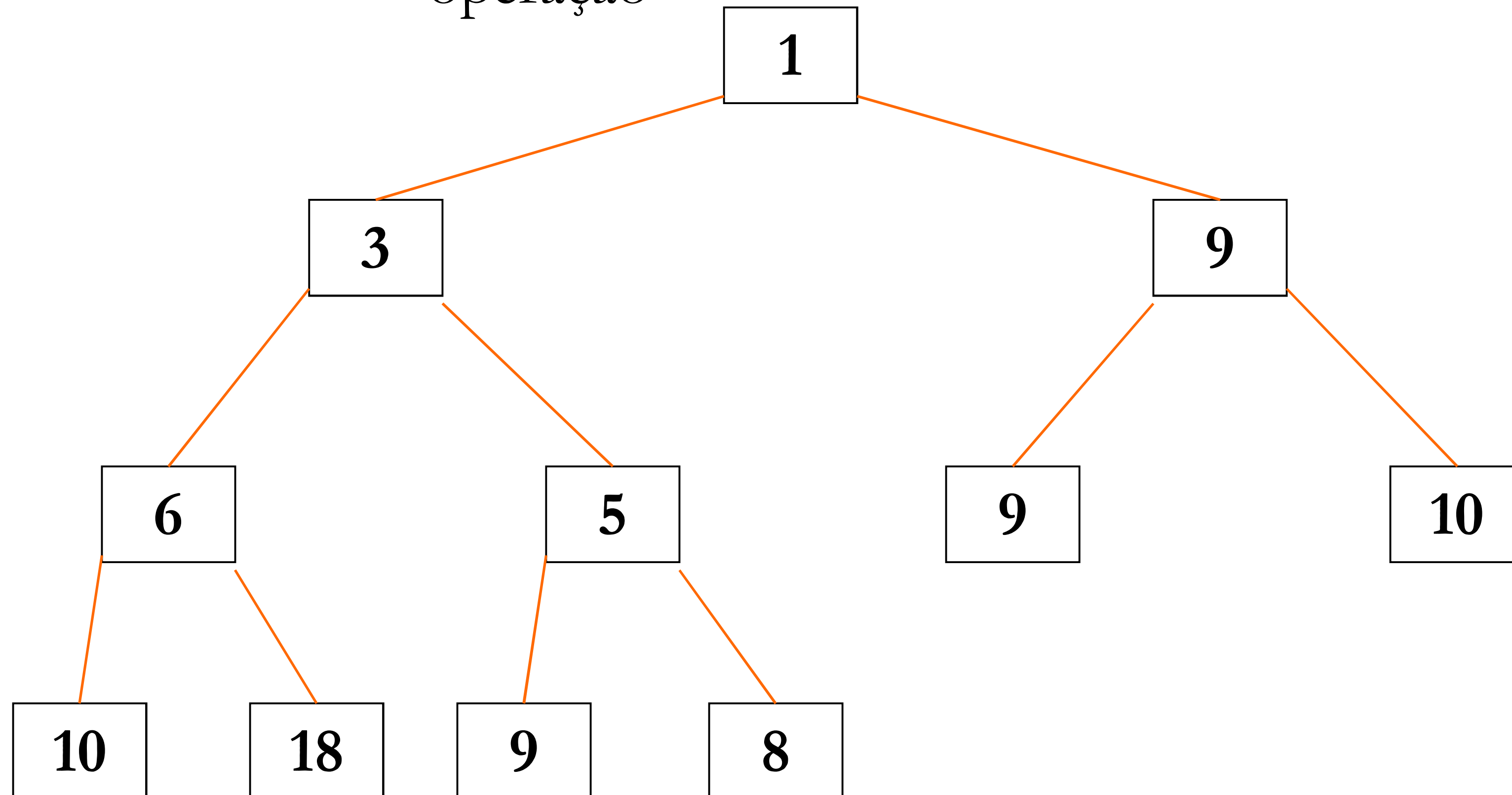
Coloca-se o elemento a ser inserido na última posição




3
5
trocar
9
6
1
9
10
10
18
9
8


trocar
3
1
9
6
5
9
10
10
18
9
8

fim da operação



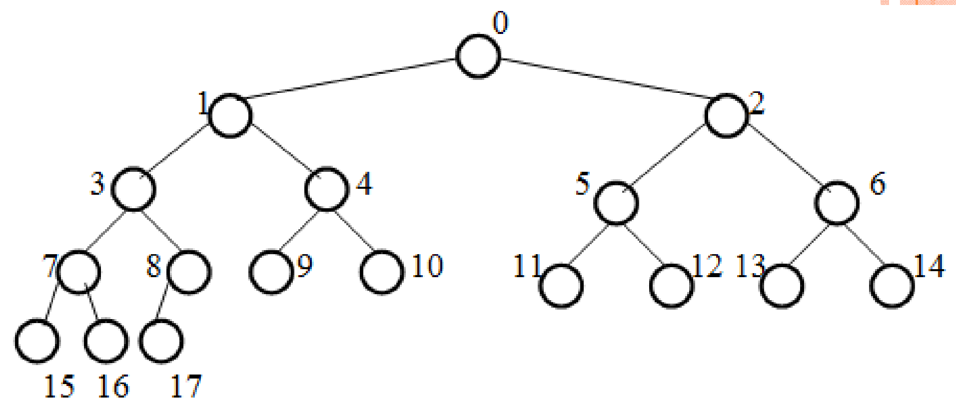
## 5.5.3 – Programação do Heap-Sort

- O método consiste em duas partes principais:

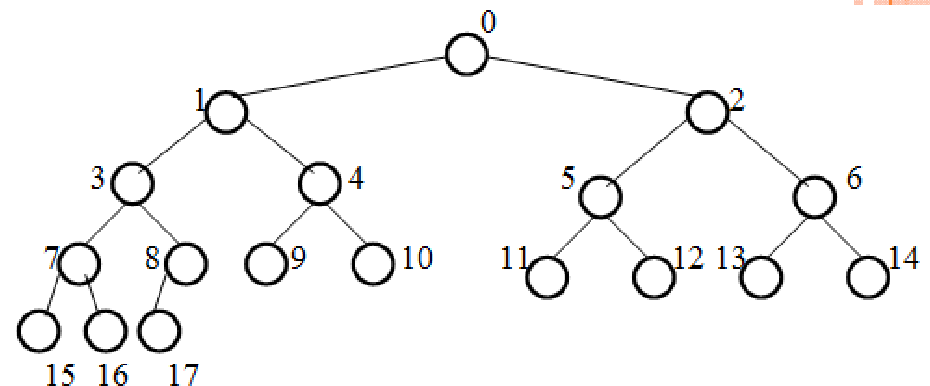
1. Inserir elemento por elemento do vetor numa fila de prioridades
2. Retirar pela raiz todos os elementos da fila de prioridades, retornando-os ao vetor

```
void HeapSort (int n, vetor V) {
  int i; heap H;

  iniciar(&H);
  for (i = 0; i < n; i++)
      Inserir (V[i], &H);
  for (i = 0; i < n; i++)
      V[i] = DeletaMin (&H);
}

void iniciar (heap *H) {
  H->n = 0;
}
```

```c
void Inserir (int x; heap *H) {
  int i, temp;
  if (H->n >= 200)
      printf("Insercao em heap cheio");
  else {
      (H->n)++; i = H->n - 1; H->elem[i] = x;
      while (i > 0 && H->elem[i] <
                                  H->elem[(i-1)/2]) {
          temp = H->elem[i];
          H->elem[i] = H->elem[(i-1)/2];
          H->elem[(i-1)/2] = temp; i = (i-1)/2;
      }
  }
}
```

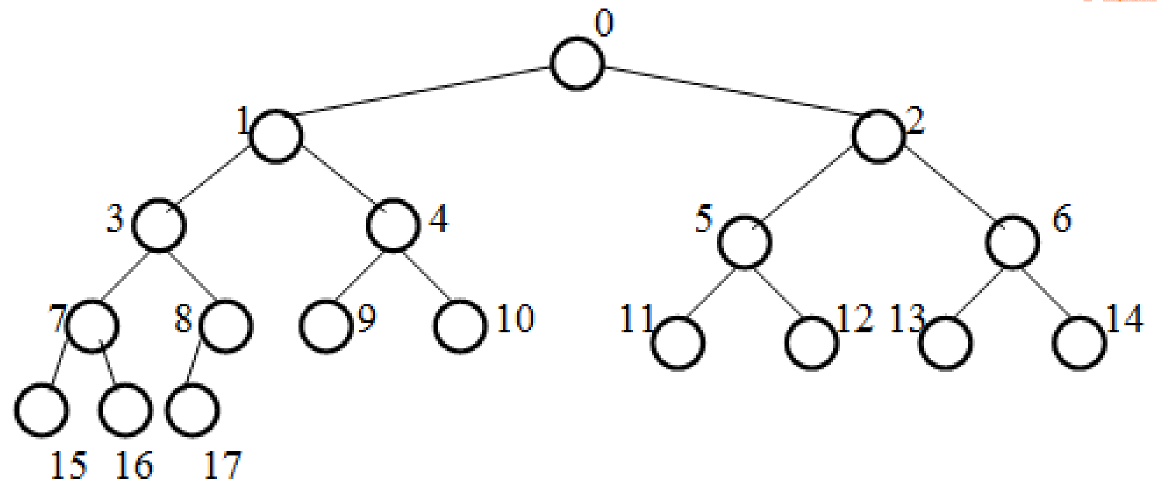


```
int DeletaMin (heap *H) {
  int i, j, temp, ret; int parou;
  if (H->n == 0) {
       printf ("Delecao em heap vazio"); return -1;}
  else {
       ret = H->elem[0]; H->elem[0] = H->elem[H->n - 1];
       (H->n)--; parou = FALSE; i = 0;
       while (! parou && 2*i+1 <= H->n - 1) {
          if (2*i+1 == H->n - 1 ||
               H->elem[2*i+1] < H->elem[2*i+2])
               j = 2*i+1;
          else j = 2*i+2;
          if (H->elem[i] > H->elem[j]) {
             temp = H->elem[i]; H->elem[i] = H->elem[j];
              H->elem[j] = temp; i = j;
           }
          else parou = TRUE;
       }
       return ret;
  }
}
```



# Observações:

- O método Heap-Sort é **O(n log n)** no **caso médio** e no **pior caso**
  - Altura de um **heap** de **n** nós: $\lfloor \log_2 n \rfloor$
- No caso médio, **Quick-Sort** leva alguma **vantagem** sobre **Heap-Sort**
- Há um gasto maior de **memória** devido à variável **H**



# O Método Merge-Sort

- **Merge: fundir** num só dois vetores ordenados, **mantendo a ordem**.
- Mas, se inicialmente o vetor está **desordenado**, como fazer fusão?

**Idéia recursiva:** Caso o vetor tenha **dois ou mais** elementos:

- **Dividir** o vetor ao meio, obtendo a metade da **esquerda** e a metade da **direita**;
- **Ordenar** cada uma dessas metades pelo **Merge-Sort**;
- **Fundir** as duas metades ordenadas.

- **Fundir dois vetores ordenados:** percorrê-los com **cursores**, comparando os elementos da posição dos mesmos; o menor é copiado num vetor temporário.

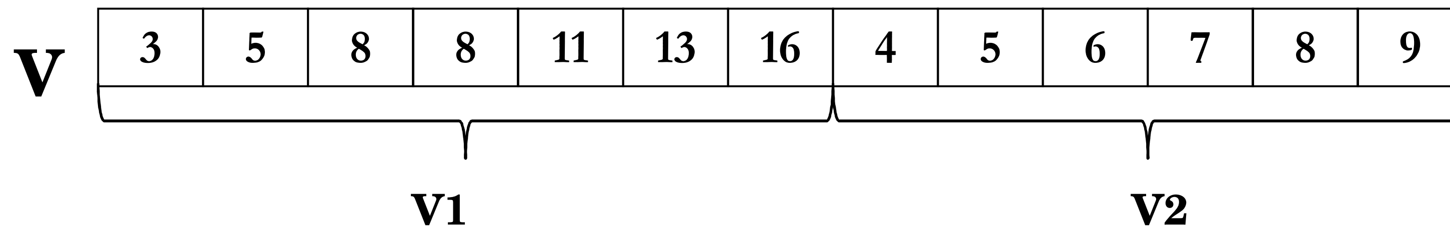
- **Exemplo:** Fusão dos seguintes vetores:

**V1: 3, 5, 8, 8, 11, 13, 16** e **V2: 4, 5, 6, 7, 8, 9**

V1 3 5 8 8 11 13 16

V2 4 5 6 7 8 9

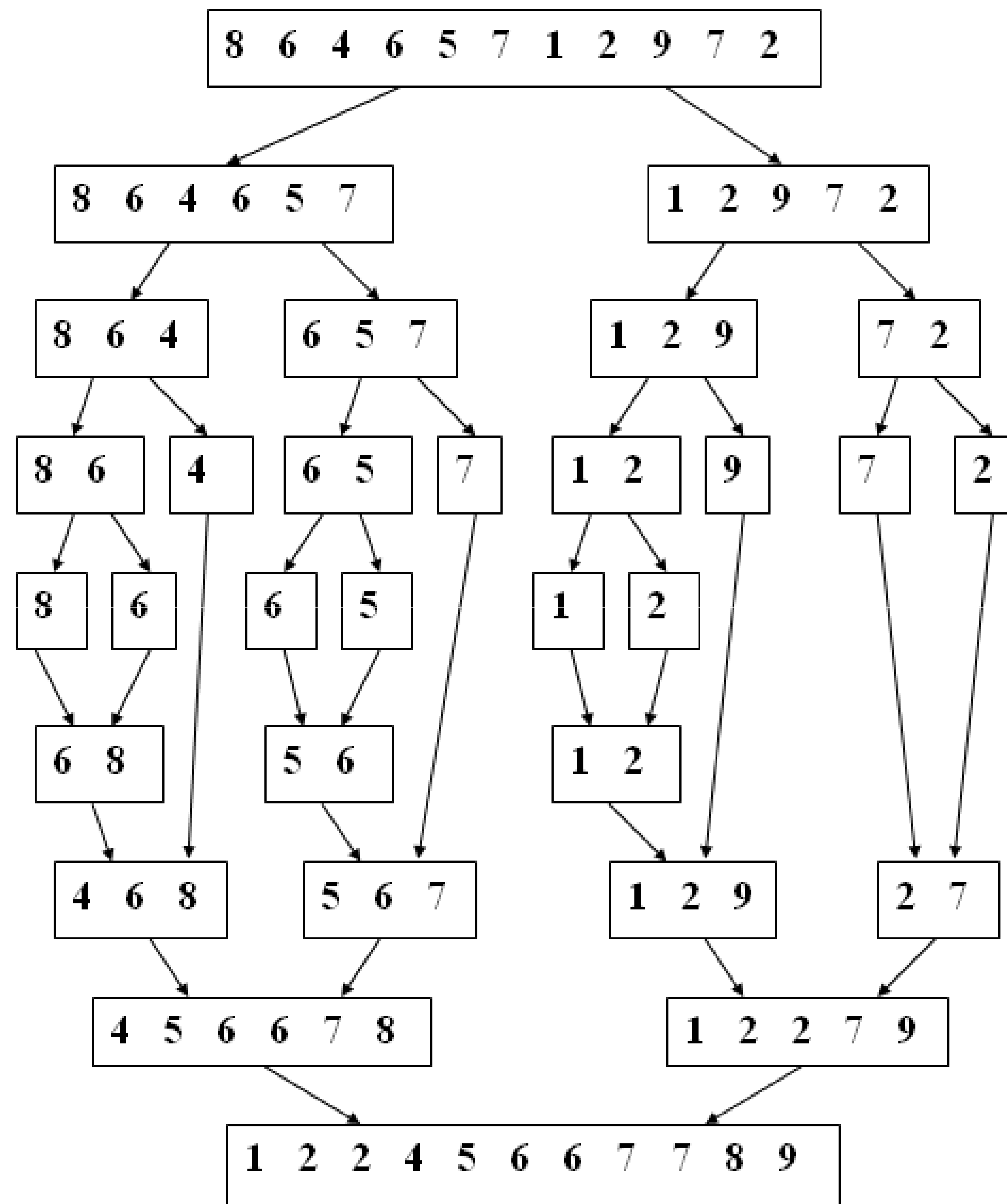
V 3 4 5 5 6 7 8 8 8 9 11 13 16



```
void MergeSort (int first,int last, vetor V) {
  int med;

  if (first < last) {
      med = (first + last)/2;
      MergeSort (first, med, V);
      MergeSort (med+1, last, V);
      Merge (first, last, V);
  }
}
```

- A seguir, ilustração do método Merge-Sort para o vetor:

**8, 6, 4, 6, 5, 7, 1, 2, 9, 7, 2**


8 6 4 6 5 7 1 2 9 7 2
8 6 4 6 5 7
1 2 9 7 2
8 6 4
6 5 7
1 2 9
7 2
8 6
4
6 5
7
1 2
9
7
2
8
6
6
5
1
2
6 8
5 6
1 2
4 6 8
5 6 7
1 2 9
2 7
4 5 6 6 7 8
1 2 2 7 9
1 2 2 4 5 6 6 7 7 8 9

```
void Merge (int first, last; vetor V) {
  int med, i, j, k; vetor T;
  med = (first + last)/2;
  i = 0; j = first; k = med + 1;
  while (j <= med && k <= last) {
      if (V[j] < V[k]) {T[i] = V[j]; j++;}
      else {T[i] = V[k]; k++;}
      i++;
  }
  while (j <= med) {T[i] = V[j]; j++; i++;}
  while (k <= last) {T[i] = V[k]; k++; i++;}
  for (j = first, i = 0; j <= last; j++, i++)
          V[j] = T[i];
}
```

Merge é O(n) e MergeSort é O(n log n)