GRAFOS

1 – Aspectos gerais

2 – Grafos orientados

3 – Problemas clássicos sobre grafos orientados

4 – Grafos não-orientados

5 – Problemas clássicos sobre grafos não-orientados

1

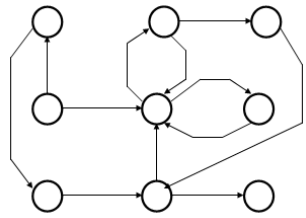
1 – ASPECTOS GERAIS

- **Grafo:** modelo de armazenamento de informações usado para representar uma dada relação entre alguns pares do universo de elementos armazenados
- **Vértice ou nó:** unidade destinada a guardar todas as informações de um elemento desse universo
- **Arco:** representa a existência da referida relação entre dois elementos desse universo

2

Forma natural de representação de grafos:

Alg



Legenda:

Círculo = Vértice
Seta = Arco

V: conjunto de vértices

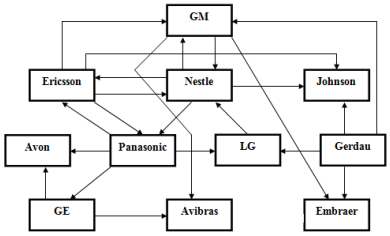
A: conjunto de arcos ligando vértices de **V**

3

Exemplos:

a) Fornecimento de produtos entre fábricas

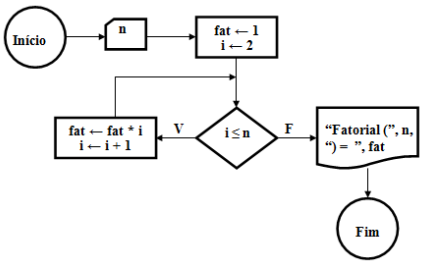
Objetos: fábricas
Relação entre fábricas: $\mathbf{F_i}$ fornece produtos para $\mathbf{F_j}$



4

b) Fluxogramas

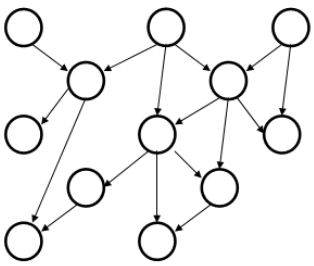
Objetos: blocos de um fluxograma
Relação entre blocos: o fluxo de controle vai de $\mathbf{B_i}$ para $\mathbf{B_j}$



5

c) Redes PERT-CPM

Objetos: Tarefas de um projeto
Relação entre tarefas: a tarefa $\mathbf{T_i}$ precisa terminar para que a tarefa $\mathbf{T_j}$ possa começar ($\mathbf{T_j}$ depende de $\mathbf{T_i}$)

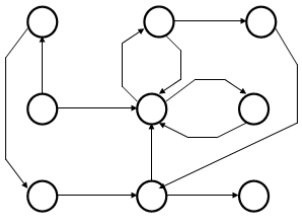


6

d) Conhecimento entre pessoas

Objetos: Pessoas

Relação entre pessoas: a pessoa $\mathbf{P_i}$ conhece a pessoa $\mathbf{P_j}$ de vista e de nome



7

Relação simétrica: a existência da relação de um vértice **v** para outro **w** implica na existência da relação de **w** para **v**

Na forma natural, costuma-se substituir os dois arcos orientados (setas), por um só arco não-orientado (linha)

8

- **Grafo orientado:** sua relação é não-simétrica; vide os quatro exemplos anteriores
  - Fornecimento de produtos entre fábricas
  - Fluxogramas
  - Redes PERT-CPM
  - Conhecimento entre pessoas
- **Grafo não-orientado:** sua relação é simétrica

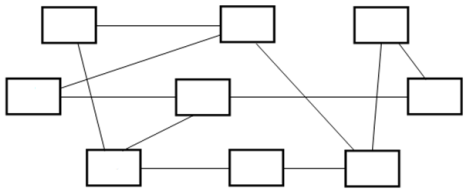
9

Exemplos de grafos não-orientados:

a) Mapa rodoviário de uma região

Objetos: cidades

Relação entre cidades: existe uma rodovia ligando $\mathbf{C_i}$ e $\mathbf{C_j}$



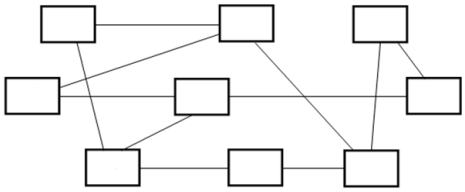
10

Exemplos de grafos não-orientados:

b) Interseção entre conjuntos

Objetos: conjuntos

Relação entre conjuntos: conjuntos $\mathbf{C_i}$ e $\mathbf{C_j}$ têm elementos em comum



11

2 – Grafos Orientados

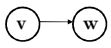
2.1 – Definições

- Um grafo orientado também é chamado de grafo **dirigido**, ou abreviadamente de **digrafo**
- Num grafo orientado, os arcos são **setas** (**linhas** ou **arestas orientadas**)

12

- Um arco é definido por um par orientado de vértices **(v, w)**, onde **v** é a **fonte** e **w** é o **destino** do arco

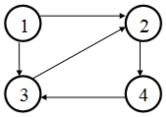
(v, w) = v→w



- Diz-se que o arco v→w **é de v para w** e que **w é adjacente a v**

13

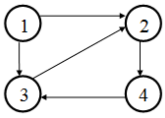
- **Caminho** em um digrafo é uma seqüência de vértices
  $v_1, v_2, \ldots, v_n$, tais que
  $v_1 \rightarrow v_2$, $v_2 \rightarrow v_3$, ... , $v_{n-1} \rightarrow v_n$ são arcos;
- Tal caminho é dito que vai de v_1 para v_n, passa por v_2, v_3, ..., v_{n-1} e termina em v_n.
- **Comprimento** de um caminho é o número de arcos desse caminho. Exemplo:



1, 2, 4: caminho de comprimento 2, de 1 a 4

14

- **Caminho simples:** caminho no qual todos os vértices são distintos, com a exceção possível do 1º e do último vértice
- **Ciclo:** caminho no qual o 1º e o último vértice são iguais.
- **Ciclo simples:** ciclo que também é um caminho simples. Exemplo:



3, 2, 4, 3: ciclo simples de comprimento 3

15

Informações em um grafo (orientado ou não):

- Podem estar contidas nos vértices e nos arcos.

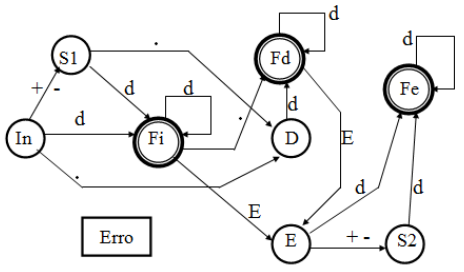
Exemplo: fornecimento de produtos entre fábricas

- **Nos vértices:** nome da fábrica; localização; número de empregados, etc...
- **Nos arcos:** qual o produto; quantidade de produtos fornecidos; custo de cada produto, etc.

16

Exemplo: Autômato finito reconhecedor de constantes numéricas na Linguagem C

- Reconhece constantes como: 13, +13, -13, 13., 1.25, .25, -.25, -32.43, 13E-15, 13.E-15, -13.25E+72, .75E5

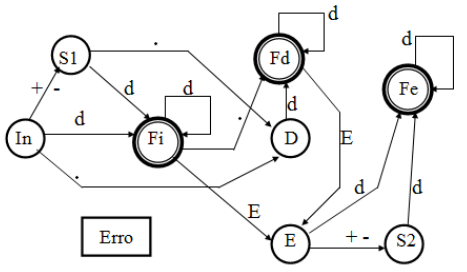


17

- **Vértices:** círculos representando estados do autômato

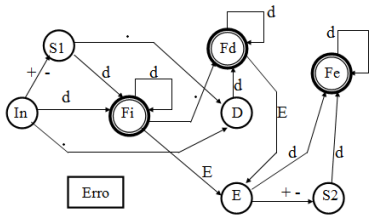
Estado final

Estado não-final



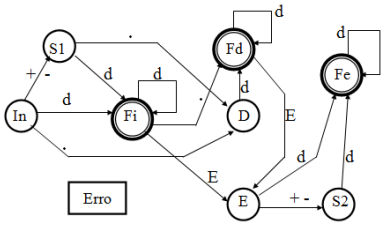
18

- Informações nos **vértices**: nome, se é estado inicial, central ou final
- Informação nos **arcos**: caractere(s) necessário(s) para transitar de um estado para outro.



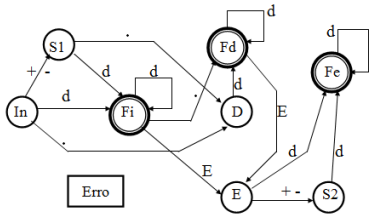
19

- **Arcos:** setas representando transições de estados
- Alfabeto para transições:
  Σ = {d, +, - , . , E} (d é um dígito qualquer)
- Existem transições de todos os estados para o estado **Erro** mas não estão desenhadas, para maior clareza



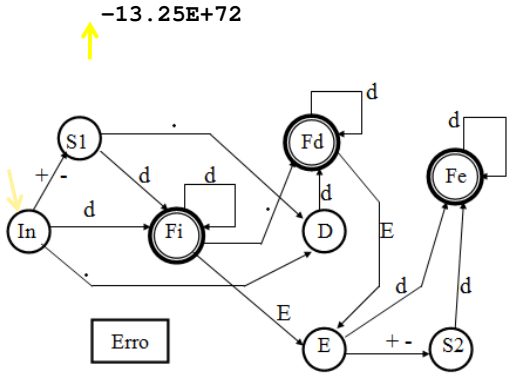
20

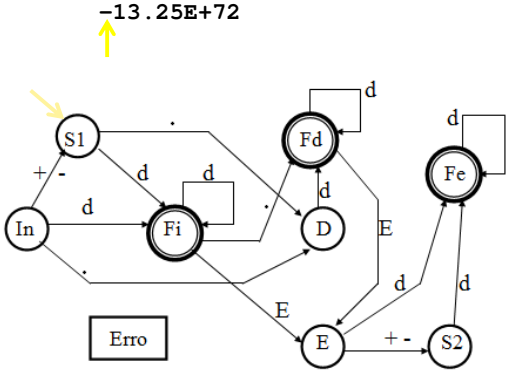
- Cada caractere da constante numérica provoca uma mudança de estado
- No início, o estado é o **In** (inicial)
- Se, no final da constante, o estado for do tipo **final**, ela é reconhecida; caso contrário, é rejeitada

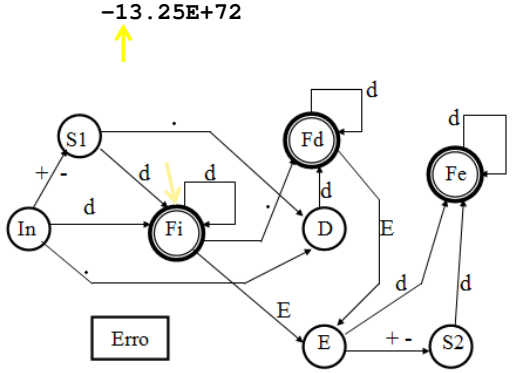


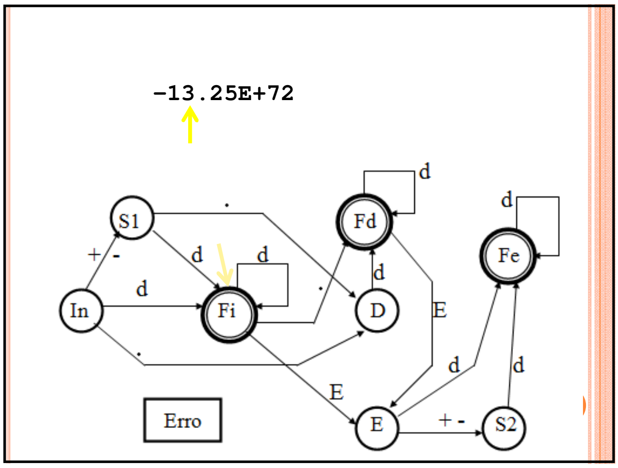
21

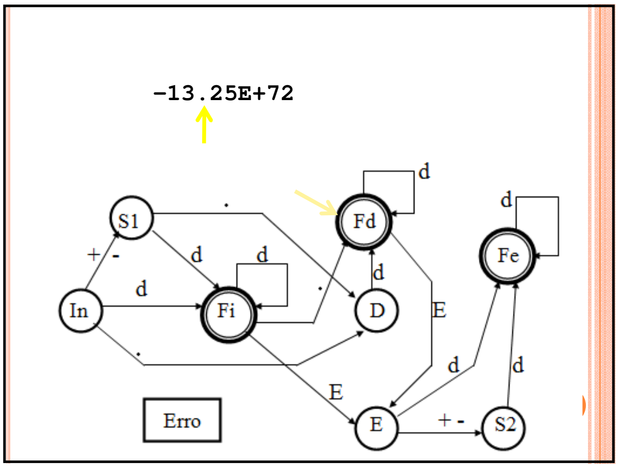
- **Simulação do teste da constante -13.25E+72**

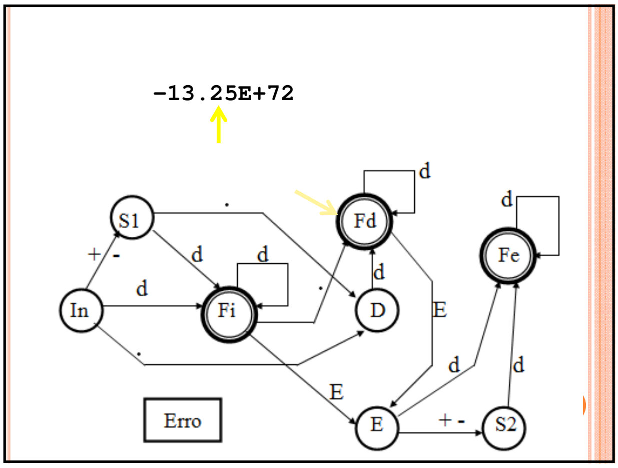


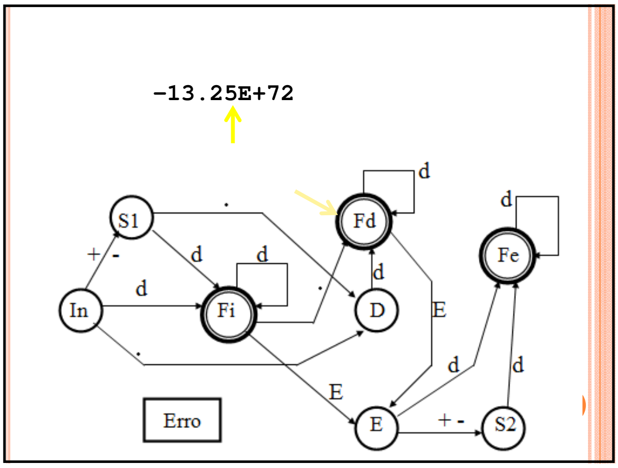


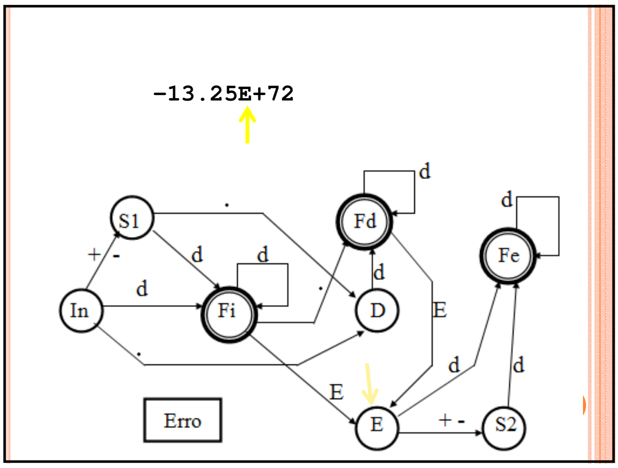


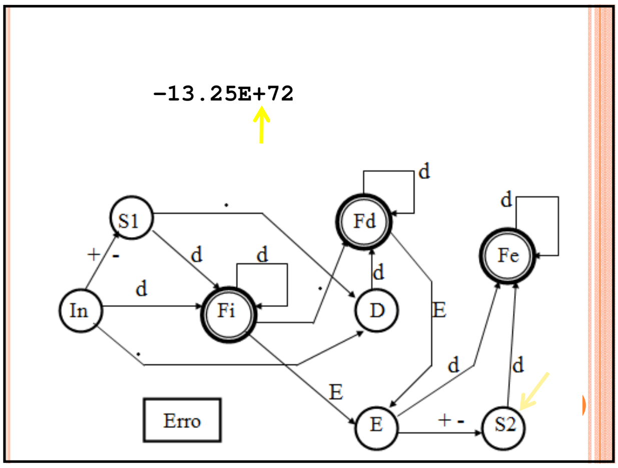

-13.25E+72
Erro

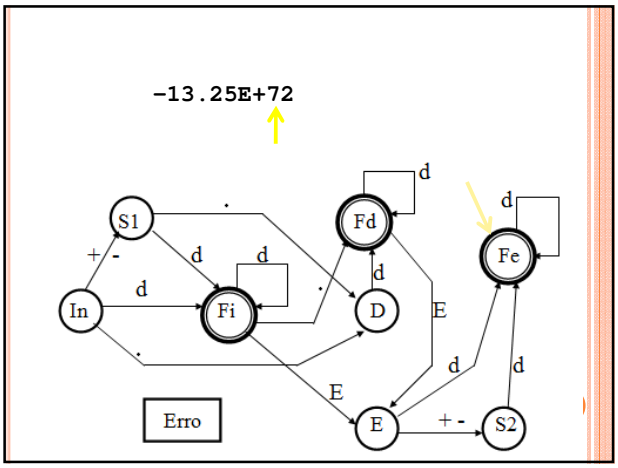

-13.25E+72
Erro

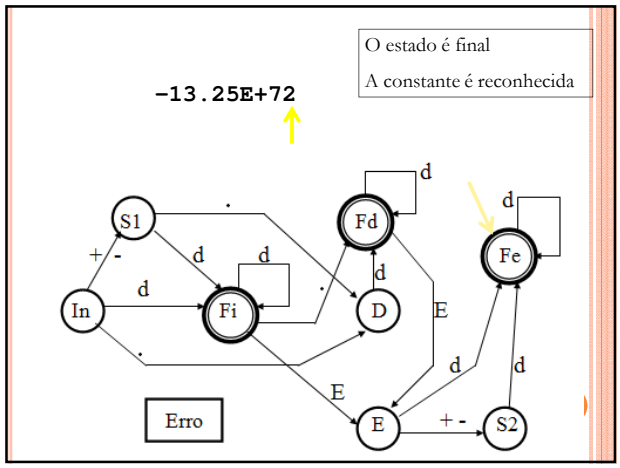

-13.25E+72
Erro


-13.25E+72
Erro


-13.25E+72
Erro

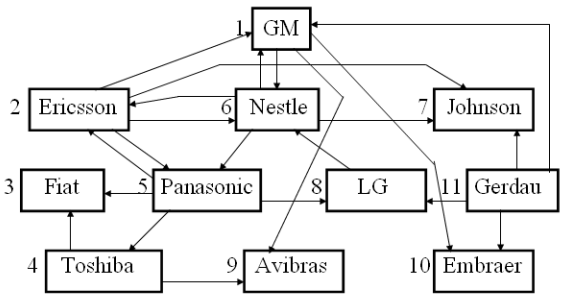

-13.25E+72
Erro





2.2 – Estruturas de dados para digrafos

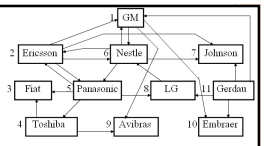
- Seja um grafo de fornecimento de produtos entre fábricas



a) Matriz de adjacências

Os elementos da matriz são do tipo lógico

Se elemento [i, j] = V, fábrica **i** fornece produto para fábrica j



	Fábrica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	GM						V			V	V	
2	Ericsson	V				V	V	V				
3	Fiat											
4	Toshiba			V						V		
5	Panasonic		V	V	V				V			
6	Nestle	V	V			V		V				
7	Johnson											
8	LG						V					
9	Avibras											
10	Embraer											
11	Gerdau	V						V	V		V	

Declarações para matriz de adjacências

```
struct celulavertice  {
    informacaovertice InfoVert;
    logic Adjacente [maxvert];
};
struct digrafo  {
    celulavertice Vetor [maxvert];
    int nvert;
};
digrafo Fornecimento;
```

	Fábrica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	GM						V			V	V	
2	Ericsson	V				V	V	V				
3	Fiat											
4	Toshiba			V						V		
5	Panasonic		V	V	V				V			
6	Nestle	V	V			V		V				
7	Johnson											
8	LG						V					
9	Avibras											
10	Embraer											
11	Gerdau	V						V	V		V	

Se houver informações nos arcos:

```
struct celulavertice  {
    informacaovertice InfoVert;
    informacaoarco Adjacente [maxvert];
};
struct digrafo  {
    celulavertice Vetor [maxvert];
    int nvert;
};
digrafo Fornecimento;
```

informacaoarco pode ser até uma complexa estrutura

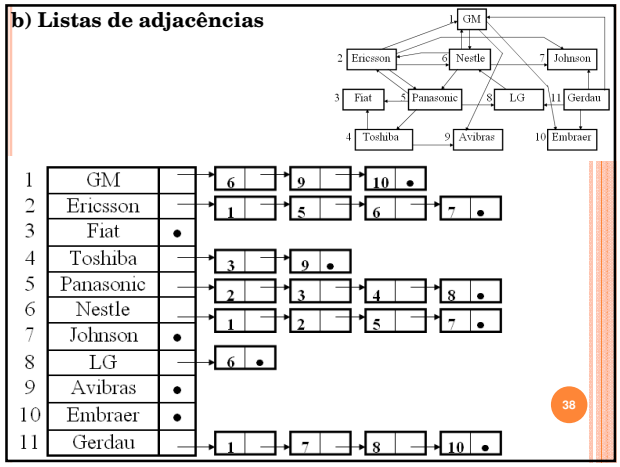
	Fábrica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	GM						V			V	V	
2	Ericsson	V				V	V	V				
3	Fiat											
4	Toshiba			V						V		
5	Panasonic		V	V	V				V			
6	Nestle	V	V			V		V				
7	Johnson											
8	LG						V					
9	Avibras											
10	Embraer											
11	Gerdau	V						V	V		V	

Características dessa estrutura:

- É rápido saber se **v→w** é um arco do grafo
- Gasta muita memória com grafos esparsos
- O preenchimento do grafo é demorado.

	Fábrica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	GM						V			V	V	
2	Ericsson	V				V	V	V				
3	Fiat											
4	Toshiba			V						V		
5	Panasonic		V	V	V				V			
6	Nestle	V	V			V		V				
7	Johnson											
8	LG						V					
9	Avibras											
10	Embraer											
11	Gerdau	V						V	V		V	

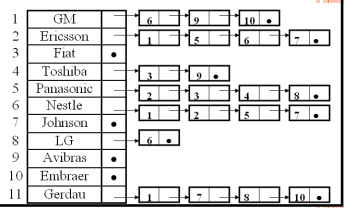
b) Listas de adjacências



38

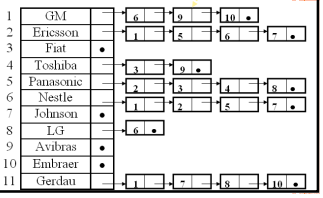
Declarações para listas de adjacências

```
struct celulaadj {int vertice; celulaadj *prox;};

struct celulavertice  {
  informacaovertice InfoVert; CélulaAdj *ListAdj;};

struct digrafo {
  celulavertice EspacoVertices [maxvert];
  int nvert;
};

digrafo Fornecimento;
```



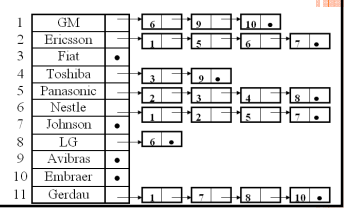
Se houver informações nos arcos:

```
struct celulaadj {int vertice; informacaoarco InfoArco;
  celulaadj *prox;};

struct celulavertice  {
  informacaovertice InfoVert; CélulaAdj *ListAdj;};

struct digrafo {
  celulavertice Vertices [maxvert];
  int nvert;
};

digrafo Fornecimento;
```



Características dessa estrutura:

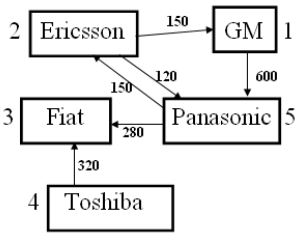
- Demora um pouco mais para saber se **v→w** é um arco do grafo
- Gasta menos memória para grafos esparsos
- A programação para preencher o grafo é mais complexa



2.3 – Armazenamento de um digrafo

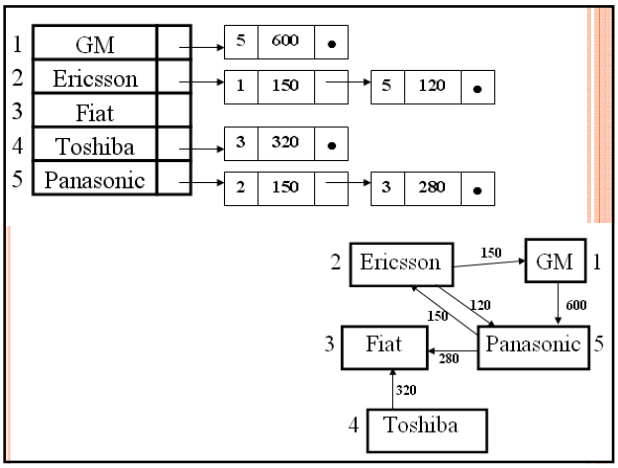
- Seja um digrafo de fornecimento de produtos entre fábricas

Nos arcos: custo do fornecimento/mês em R$1000,00

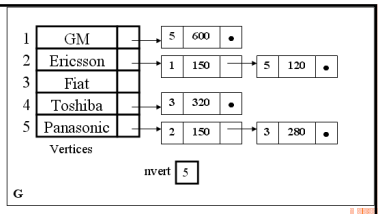


Adotada a estrutura com listas de adjacências

42



Estrutura de dados:

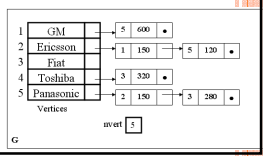



```
struct celulaadj {
  int vertice, custo;
  celulaadj *prox;
};
struct celulavertice {
  char nome[20];
  celulaadj *listadj;
};
struct digrafo {
  int nvert;
  celulavertice *Vertices;
};
digrafo G;
```

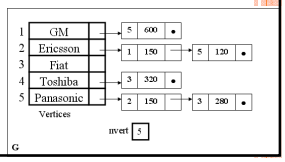
44

```
/*          Funcao  LerGrafo: le e armazena um digrafo na
  variavel global G     */

void LerGrafo () {
  int i, j, n;
  celulaadj *p;

  /*  Alocacao do vetor de vertices   */

  printf("Leitura do Grafo:");
  printf("Numero de fabricas:");
  scanf("%d",&G.nvert);
  G.Vertices = malloc ((G.nvert+1) *
       sizeof(celulavertice));
}
```

Não usa o elemento índice zero

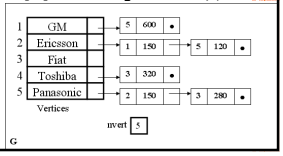



```
  /*  Leitura do nome das fabricas    */

  for (i = 1; i <= G.nvert; i++) {
       printf("Nome da fabrica", i, ": ");
       scanf("%s", G.Vertices[i].nome);
       G.Vertices[i].listadj = NULL;
  }
```




```
  /*  Leitura dos fornecimentos e seus custos    */

  for (i = 1; i <= G.nvert; i++) {
       printf("Numero de fornecimentos de %s:",
                              G.Vertices[i].nome);
       scanf("%d",&n);
       if (n > 0) {
          for (j = 1; j <= n; j++) {
             printf ("%d.o) n.o da fabrica e custo: ",j);
             p = G.Vertices[i].listadj;
             G.Vertices[i].listadj =
                           malloc (sizeof (celulaadj));
             G.Vertices[i].listadj->prox = p;
             scanf("%d",&G.Vertices[i].listadj->vertice);
             scanf("%d",&G.Vertices[i].listadj->custo);
          }
       }
  }
}
```

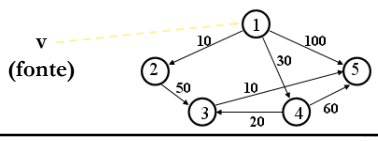
As células de adjacências são inseridas no início de cada lista



3 – Problemas Clássicos sobre Grafos Orientados

3.1 – Caminhos de menores custos

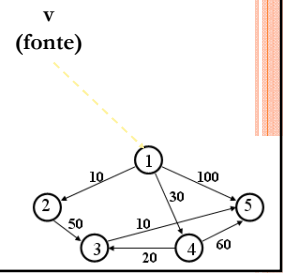
- Seja um digrafo **G = {V, A}** em que cada arco de **A** possui uma informação inteira positiva chamada **custo**
- Seja **v** um vértice de **V** que recebe o nome de **fonte**



- Determinar o custo do caminho **mais barato** da fonte para todos os outros vértices de **V**
- **Custo de um caminho:** soma dos custos dos arcos desse caminho

Caminhos de 1 a 3:
1-2-3 (custo 60)
1-4-3 (custo 50)

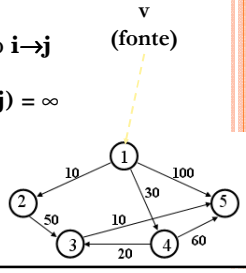
Caminhos de 1 a 5:
1-5 (custo 100)
1-2-3-5 (custo 70)
1-4-5 (custo 90)
1-4-3-5 (custo 60)



Solução: Algoritmo de Dijkstra

- O grafo é **G = (V, A)**
- O conjunto de vértices é **V = {1, 2, ... ,n}**
- A fonte é o vértice **1**
- **C(i, j):** custo associado ao arco **i→j**
- Se o arco **i→j** não existe, **C(i, j)** = ∞

Esse algoritmo e o conceito de custos podem ser aplicados em grafos não-orientados

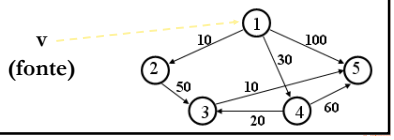


Vetor D: destinado a guarda os caminhos mais baratos e seus custos; no início D[i] guarda:

Caminho [1-i] e C (1, i)

Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-3	1-4	1-5
Custo	10	∞	30	100
Definitivo	não	não	não	não



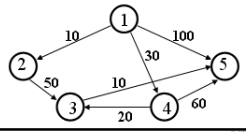
Simulação:

Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-3	1-4	1-5
Custo	10	∞	30	100
Definitivo	sim	não	não	não

Menor custo: 10

D[2] é definitivo



Vetor D

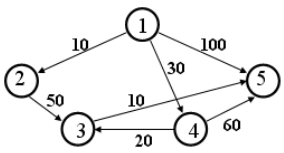
	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-3	1-4	1-5
Custo	10	∞	30	100
Definitivo	sim	não	não	não

Novos caminhos:

Custo (1-3) = ∞
Custo (1-2-3) = Custo (1-2) + C (2, 3)
= 10 + 50 = 60 (menor)

Custo (1, 4) = 30 (menor)
Custo (1-2-4) = Custo (1-2) + C (2, 4)
= 10 + ∞ = ∞

Custo (1, 5) = 100 (menor)
Custo (1-2-5) = Custo (1-2) + C (2, 5)
= 10 + ∞ = ∞



Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-3	1-4	1-5
Custo	10	∞	30	100
Definitivo	sim	não	não	não

Menor entre os não definitivos:
Caminho de 1 para 4. onde
Custo(1-2-4) > Custo(1-4)
Outros caminhos possíveis, onde C é um caminho qualquer:
Custo(1-2-C-4)=Custo(1,2)+Custo(2-C-4) ≥ Custo(1,2,4) >Custo(1,4)
Custo(1-3-C-4) =Custo(1,3)+Custo(3-C-4) > Custo(1,4)
Custo(1-5-C-4) =Custo(1,5)+Custo(5-C-4) > Custo(1,4)
Logo o caminho de menor custo possível entre 1 e 4 é: 1-4

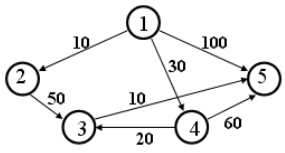
54

Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-2-3	1-4	1-5
Custo	10	60	30	100
Definitivo	sim	não	sim	não

Menor custo: 30

D[4] é definitivo



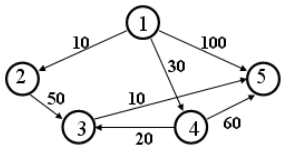
Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-2-3	1-4	1-5
Custo	10	60	30	100
Definitivo	sim	não	sim	não

Novos caminhos:

Custo (1-2-3) = 60
Custo (1-4-3) = Custo (1-4) + C (4, 3)
= 30 + 20 = 50 (menor)

Custo (1, 5) = 100
Custo (1-4-5) = Custo (1-4) + C (4, 5)
= 30 + 60 = 90 (menor)

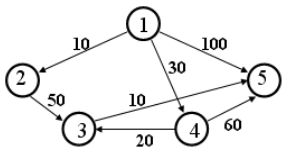


Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-4-3	1-4	1-4-5
Custo	10	50	30	90
Definitivo	sim	sim	sim	não

Menor custo: 50

D[3] é definitivo

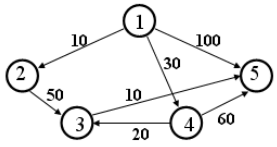


Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-4-3	1-4	1-4-5
Custo	10	50	30	90
Definitivo	sim	sim	sim	não

Novos caminhos:

Custo (1-4-5) = 90
Custo (1-4-3-5) = Custo (1-4-3) + C (3, 5)
= 50 + 10 = 60 (menor)

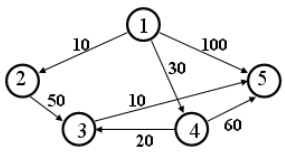


Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-4-3	1-4	1-4-3-5
Custo	10	50	30	60
Definitivo	sim	sim	sim	sim

Menor custo: 60

D[5] é definitivo



Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-4-3	1-4	1-4-3-5
Custo	10	50	30	60
Definitivo	Sim	sim	sim	sim

Declarações para o vetor D:

```
struct infovert {
       int custo;
       char definitivo;
       caminho cam;
};

infovert *D;
```

Caminho é lista de vértices:

```
typedef noh *posicao;
struct noh {
       vertice elem;
       posicao prox;
};
struct caminho {
       posicao inic, fim;
};
```

60

Vetor D

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-4-3	1-4	1-4-3-5
Custo	10	50	30	60
Definitivo	Sim	sim	sim	sim

Caminho é lista de vértices:

```
typedef noh *posicao;
struct noh {
       vertice elem;
       posicao prox;
};
struct caminho {
       posicao inic, fim;
};
```

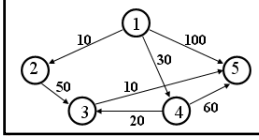
Caminho – operadores:

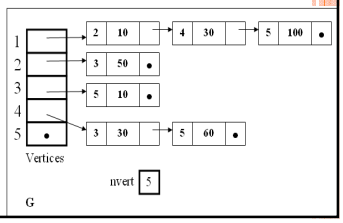
```
void InicCaminho (caminho *cam);
posicao Primeira (caminho cam);
posicao Proximo (posicao p);
posicao Fim (caminho cam);
void InserirNoFinal (int v,caminho *c)
int CustoArco(int, int, digrafo);
void EscreverCaminho (caminho);
void CopiarCaminho (caminho *destino,
                    caminho origem);
void EsvaziarCaminho (caminho *);
```

61

Algoritmo de Dijkstra:

```
void Dijkstra (Grafo *G) {
  infovert *D; int i, novocusto;
  celulaadj *p; vertice w, v;
  Inicializar vetor D;
  Calcular vetor D definitivo;
  Escrever vetor D;
}
```

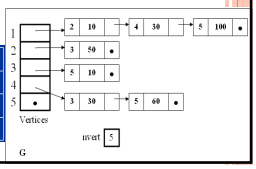




Inicializar vetor D:

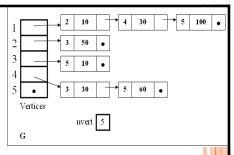
```
D = malloc ((G->nvert + 1) * sizeof(infovert));
for (i = 2; i <= G->nvert; i++) {
     D[i].custo = infinito;
     D[i].definitivo = FALSE;
     InicCaminho (&D[i].cam);
     InserirNoFinal (1, &D[i].cam);
     InserirNoFinal (i, &D[i].cam);
}
for (p = G->Vertices[1]; p != NULL; p = p->prox) {
     D[p->vert].custo = p->custo;
}
```

	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-3	1-4	1-5
Custo	10	∞	30	100
Definitivo	não	não	não	não



Calcular vetor D definitivo:

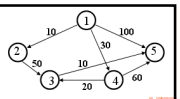
```
for (i = 2; i <= G->nvert; i++) {
     w = Minimo (D, G->nvert);
     D[w].definitivo = TRUE;
     for (v = 2; v <= G->nvert; v++)
          if (D[v].definitivo == FALSE) {
               novocusto = D[w].custo +
                                CustoArco (w, v, G);
               if (novocusto < D[v].custo) {
                    D[v].custo = novocusto;
                    CopiarCaminho
                         (&D[v].cam, D[w].cam);
                    InserirNoFinal (v, &D[v].cam);
               }
          }
}
```



	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-3	1-4	1-5
Custo	10	∞	30	100
Definitivo	não	não	não	não

Escrever vetor D:

```
for (i = 2; i <= G->nvert; i++) {
     printf("Caminho (1, %d): ",i);
     printf("Custo = %d Vertices:", D[i].custo);
     EscreverCaminho (D[i].cam);
}
```



	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
Caminho	1-2	1-4-3	1-4	1-4-3-5
Custo	10	50	30	60
Definitivo	sim	sim	sim	sim

Saída para o grafo acima:

```
Caminhos mais baratos ao vertice 1:

Caminho (1, 2):  Custo = 10;  Vertices:   1   2
Caminho (1, 3):  Custo = 50;  Vertices:   1   4   3
Caminho (1, 4):  Custo = 30;  Vertices:   1   4
Caminho (1, 5):  Custo = 60;  Vertices:   1   4   3   5
```

65

Aplicações de caminhos de menores custos:

- Escolha da melhor rota para transitar numa malha rodoviária ou para viagens aéreas
  - Aparelhos GPS, sites de informações sobre mapas, etc.

66

3.2 – Busca em profundidade

a) Conceito e metodologia

- Busca em profundidade é um método de **travessia de grafos** (orientados ou não)
- É esqueleto para a solução de muitos problemas relacionados com grafos (orientados ou não)

67

- **Travessia de grafos:** visitação sistemática de todos os nós de um grafo, usando os arcos para transitar
  - **Busca em profundidade:** generalização de pré, pós e ordem central para árvores
  - **Busca em largura:** generalização da ordem de nível para árvores (será apresentada para os grafos não-orientados)

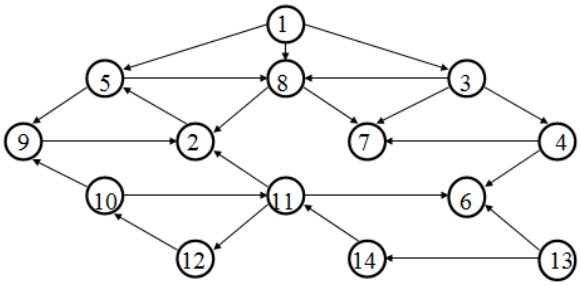
68

Método para digrafos: Seja **G** um digrafo

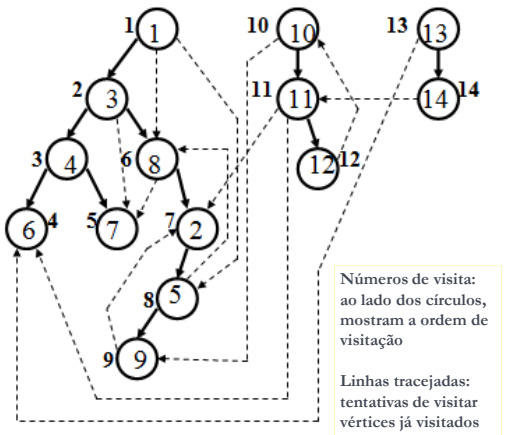
1. Assinalar todos os vértices de **G** como **não-visitados**
2. Seja **v** um vértice de **G** selecionado como vértice inicial; Marcar **v** como **visitado**
3. Visitar cada vértice **w** adjacente a **v**, não visitado
4. Ao visitar um vértice **w**, marcá-lo como **visitado** e visitar cada vértice não visitado, adjacente a **w** (recursividade)
5. A busca em **v** é encerrada quando todos os vértices **w** adjacentes a **v** tiverem sido visitados
6. Se alguns vértices permanecerem não visitados, selecionar um deles como inicial, e aplicar-lhe os passos de 2 a 6

69

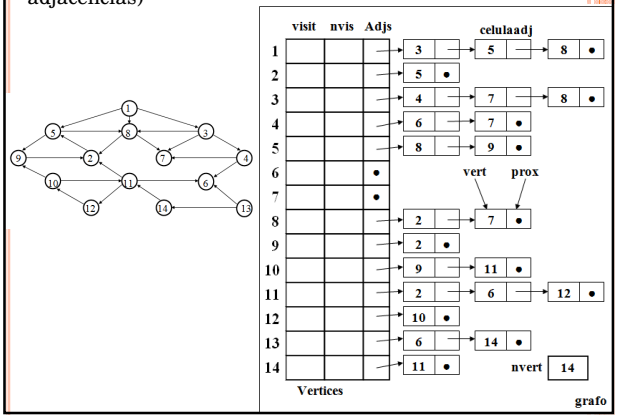
Exemplo: seja o digrafo:



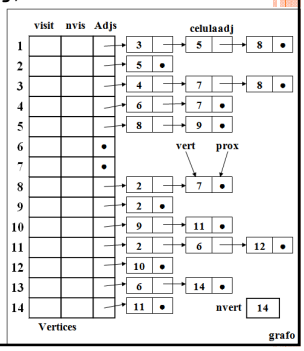
70



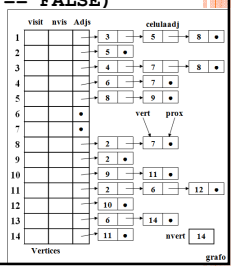
b) Programação e estrutura de dados (listas de adjacências)



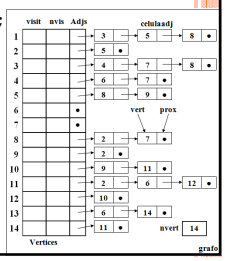
```
struct celulaadj {
  vertice vert; celulaadj *prox;
};
typedef celulaadj *listadj;
struct celulavert {
  logic visit; int nvis;
  listadj adjs;
};
typedef int vertice;
struct Grafo {
  int nvert;
  celulavert *Vertices;
};

Grafo G; int cont;
```




```
void Travessia (Grafo *G)  {
  vertice v;
  for (v = 1; v <= G->nvert; v++)
      G->Vertices[v].visit = FALSE;
  cont = 0;
  for (v = 1; v <= G->nvert; v++)
      if  (G->Vertices[v].visit == FALSE)
            BuscaProf (v, G);
}
```



```
void BuscaProf (vertice v, Grafo *G)  {
  celulaadj *p;
  G->Vertices[v].visit = TRUE;  cont++;
  G->Vertices[v].nvis = cont;
  p = G->Vertices[v].adjs;
  while (p != NULL)  {
      if (G->Vertices[p->vert].visit == FALSE)
            BuscaProf(p->vert, G);
      p = p->prox;
  }
}
```

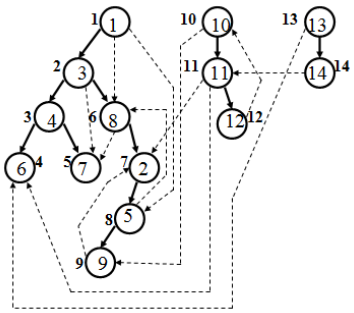


c) Floresta da busca em profundidade

Os arcos com **linha cheia** levam a vértices não-visitados

São chamados **arcos de árvore**

Formam a **floresta da busca em profundidade**



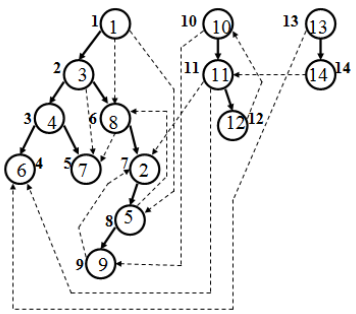
Outros tipos de arcos (linha tracejada):

Arcos de volta, arcos para frente e arcos cruzantes

Arcos de volta: vão de um vértice a seu ancestral na floresta

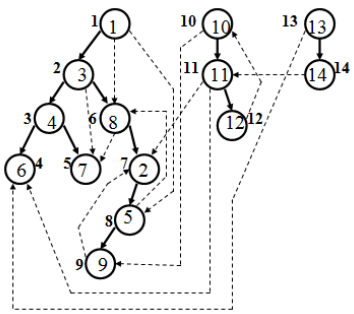
Um arco de um vértice para si mesmo é também um arco de volta

Exemplos: 5→8, 9→2, 12→10



Arcos para frente: arcos ***não de árvore***, que vão de um vértice a um seu descendente próprio

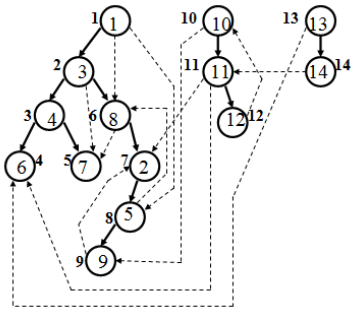
Exemplos: 1→8, 1→5, 3→7



Arcos cruzantes: vão de um vértice a outro que não seja seu ancestral nem descendente na floresta

Vão sempre da direita para a esquerda

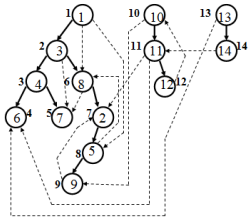
Exemplos: 8→7, 11→6, 14→11, 13→6, 11→2, 10→9



Características: se **v→w** é

- Arco de árvore ou arco para frente: nvis (v) < nvis (w)
- Arco de volta: nvis (v) ≥ nvis (w)
- Arco cruzante: nvis (v) > nvis (w)

Tal floresta e tal classificação de arcos são usados para resolver muitos problemas sobre grafos.



3.3 – Digrafos acíclicos (dga's)

a) Aspectos gerais

- Dga é um digrafo sem ciclos
- Dga é um caso particular de digrafos e árvore é um caso particular de dga's

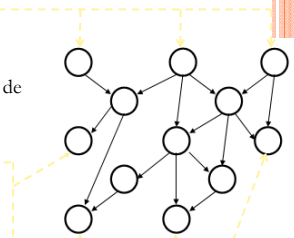
81

- **Ponto de partida** em um dga: vértice não adjacente de nenhum outro vértice.
- **Ponto final** em um dga: vértice sem adjacentes.
- Um dga tem um ou mais pontos de partida e um ou mais pontos finais.
- **Exemplo:**
  Redes PERT-CPM

Pontos de partida

Pontos finais

Uma tarefa não pode começar enquanto aquelas das quais ela depende não terminarem



82

- **Exemplo:** expressões aritméticas com sub-expressões repetidas

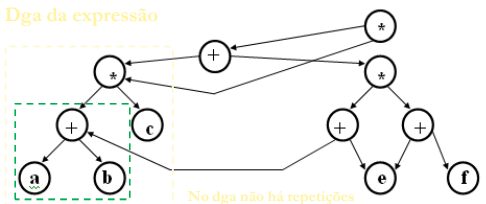
Seja a expressão:

repetições

```
((a+b)*c  + ((a+b)+e ) * (e+f)) * ((a+b)*c)
```

repetições

Dga da expressão



No dga não há repetições

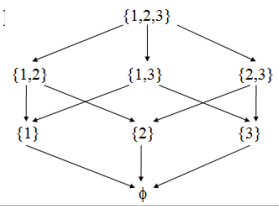
83

- **Exemplo:** Seja **Conj = {1, 2, 3}** e seja **P (Conj)** o conjunto potência de **Conj**

P (Conj) = {ϕ, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}

Seja a relação **ω** = (Contém e tem exatamente 1 elemento a mais que), relação essa definida em P (Conj).

P (Conj) e **ω** pelo seguinte dga:



84

b) Teste de aciclicidade

- Certas aplicações exigem que o digrafo seja acíclico
- É necessário verificar se o digrafo lido é um dga, para garantir a consistência dos dados de entrada
- Pode-se usar a **busca em profundidade** como esqueleto para sua solução
- Se um **arco de volta** for encontrado durante a busca, então o grafo **não é acíclico**

85

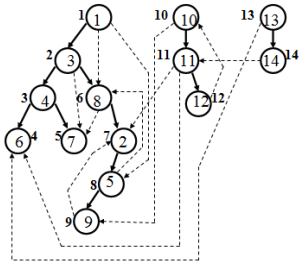
Para fazer este teste, basta:

- Manter uma pilha com todos os ancestrais do vértice que está sendo visitado, incluindo ele próprio
- Partindo dele, para visitar seus adjacentes, se um deles, já visitado, pertencer a tal pilha, existe o **arco de volta** e o grafo não é acíclico
- Quando todos os seus adjacentes já tiverem sido visitados, deve-se retirá-lo da pilha de ancestrais

86

Exemplo:

- Ao visitar o vértice **5**, estarão na pilha seus ancestrais **1**, **3**, **8**, **2** e **5**
- Adjacentes de **5**: **8** e **9**
- Na tentativa de visitar o **8**, encontra-se o **arco de volta**
- O digrafo não é um **dga**
- A seguir um algoritmo para o teste de aciclicidade



87

```
/*  Variaveis globais  */

int cont; pilha P; logic aciclico;

void Travessia (Grafo *G)  {
  vertice v;
  InicPilha (&P); aciclico = TRUE:
  for (v = 1; v <= G->nvert; v++)
      G->Vertices[v].visit = FALSE;
  cont = 0;
  for (v = 1; v <= G->nvert; v++)
      if  (G->Vertices[v].visit == FALSE)
            BuscaProf (v, G);
}
```

O algoritmo usa como **esqueleto** o algoritmo da **busca em profundidade** (em **negrito** os enxertos)

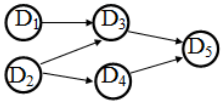
88

```
void BuscaProf (vertice v, Grafo *G)  {
  celulaadj *p;
  G->Vertices[v].visit = TRUE;  cont++;
  G->Vertices[v].nvis = cont;
  Empilhar (v, &P);
  p = G->Vertices[v].adjs;
  while (p != NULL)  {
      if (G->Vertices[p->vert].visit == FALSE)
            BuscaProf(p->vert, G);
      else if (Procurar (p->vert, P) == TRUE)
            aciclico = FALSE;
      p = p->prox;
  }
  Desempilhar (&P);
}
```

89

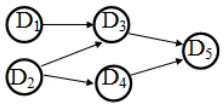
c) Ordenação topológica

- Um grande projeto costuma ser dividido numa coleção de tarefas, algumas das quais são **pré-requisitos** de outras.
- **Exemplo:** disciplinas D_1,D_2,D_3,D_4 e D_5 de um curso



90

- **Ordenação topológica:** processo de ordenar linearmente os vértices de um dga, de forma que
  - Se há um arco do vértice **i** para o vértice **j**, então **i** aparece antes de **j** na ordenação.
- **Exemplo:** (D_1, D_2, D_3, D_4, D_5) e (D_2, D_4, D_1, D_3, D_5) são ordenações topológicas do dga abaixo

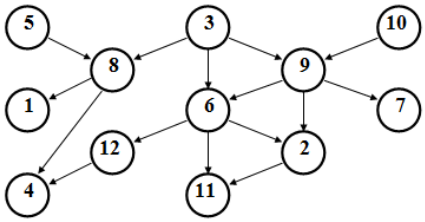


91

- Essa ordenação pode ser feita, usando como esqueleto a **busca em profundidade**
- No final da chamada da rotina **BuscaProf**, empilha-se o vértice argumento
- No final da rotina **Travessia**, enquanto houver elementos na pilha, retira-se o vértice do topo da pilha, imprimindo-o

92

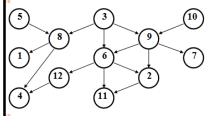
- **Exemplo:** seja um dga com numeração aleatória dos vértices:

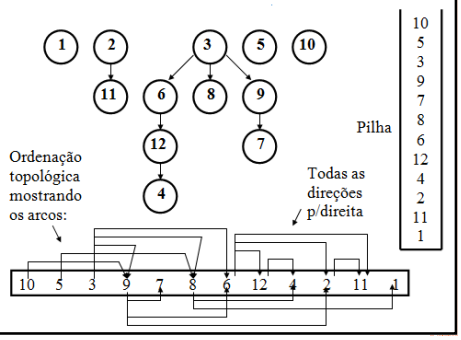


Opta-se por iniciar uma busca pelo vértice de menor número

93

Floresta da busca em profundidade (só com os arcos de árvore):





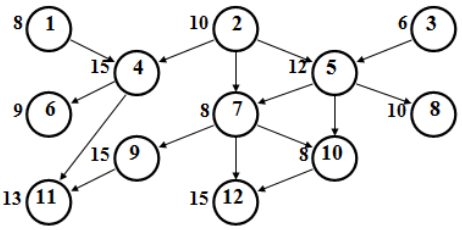
Esta é uma das muitas possíveis ordenações topológicas

- Ordenação topológica ajuda estabelecer uma ordem de execução das tarefas de um grande projeto
- Isso é crítico quando apenas um pequeno número de tarefas pode ser executado simultaneamente
- É o caso de um curso com módulos semestrais, com cinco ou seis disciplinas por módulos
- Faz-se um grafo de pré-requisitos das disciplinas e uma ordenação topológica mais sofisticada, para obter a simultaneidade requerida

95

d) Caminho crítico um dga

- Seja o seguinte dga:



Os vértices são **tarefas** de um projeto

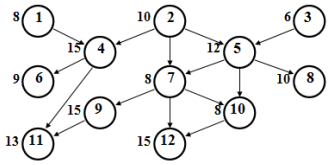
A **duração** de cada tarefa aparece ao lado do vértice

Num arco, o **destino** não começa antes do término da **fonte**

96

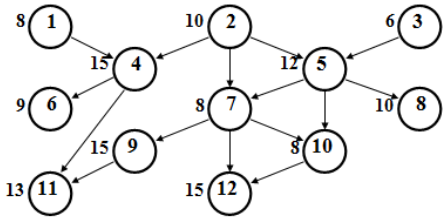
Problemas:

- Qual o **tempo mínimo** para que o projeto seja feito?
- Quais as tarefas que não podem sofrer qualquer aumento no tempo de execução, para que esse tempo mínimo não aumente?
- A seqüência formada pelas referidas tarefas é chamada de **caminho crítico** (pode haver mais de um)



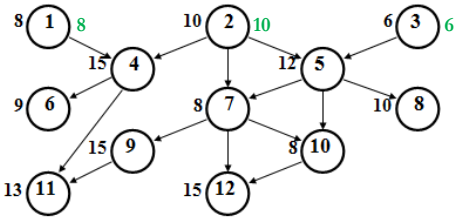
97

- É útil calcular o **tempo mínimo de término** (**TMT**) de cada vértice
- O tempo mínimo procurado é o maior de todos os **TMT's das tarefas finais**.
- **Tarefas finais** são aquelas que não tem adjacentes



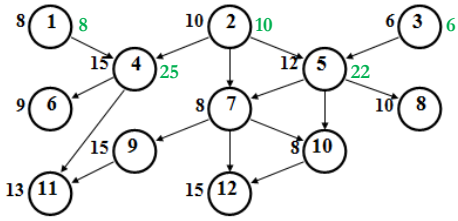
98

- TMT's das tarefas de partida **1**, **2** e **3** são imediatos:
  - É a duração delas: **8**, **10** e **6**



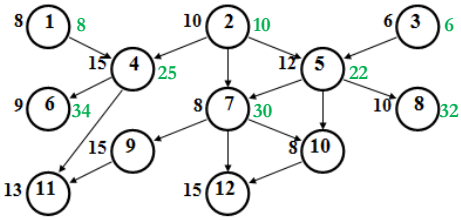
99

- O TMT das tarefas dependentes apenas de **1**, **2** e **3** já pode ser calculado:
  - TMT (4) = max (TMT (1), TMT (2)) + Duração (4) = 25
  - TMT (5) = max (TMT (2), TMT (3)) + Duração (5) = 22



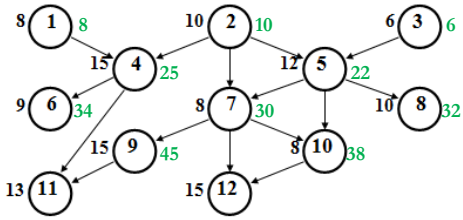
100

- Assim prosseguindo:
  - TMT (6) = TMT (4) + Duração (6) = 34
  - TMT (7) = max (TMT (2), TMT (5)) + Duração (7) = 30
  - TMT (8) = TMT (5) + Duração (8) = 32



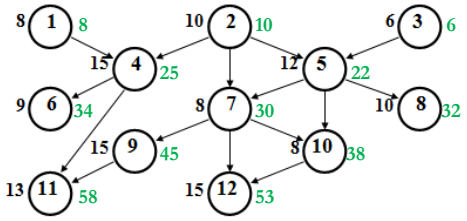
101

- Assim prosseguindo:
  - TMT (9) = TMT (7) + Duração (9) = 45
  - TMT (10) = max (TMT (5), TMT (7))+Duração (10) = 38



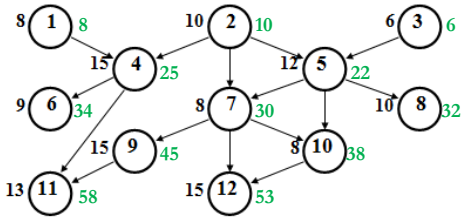
102

- Finalmente:
  - TMT (11) = max (TMT (4), TMT (9))+Duração (11) = 58
  - TMT (12) = max (TMT (7), TMT (10))+Duração (12) = 53



103

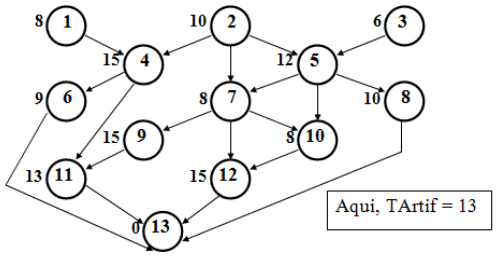
- Tarefas finais: **6**, **8**, **11** e **12**
  - TMT (Projeto) =
    = max (TMT (6), TMT (8), TMT (11), TMT (12))
    = max (34, 32, 58, 53) = 58



104

Algoritmo recursivo para o cálculo do TMT do projeto:

- Primeiramente introduz-se uma tarefa final artificial **TArtif** de duração zero:

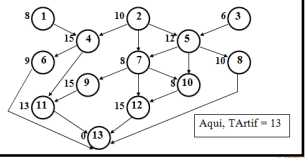


Algoritmo:

```
int Termino (Tarefa T) {
  int maior, aux; Tarefa X;
  maior = 0;
  para (cada tarefa X da qual T é adjacente) {
       if(X.tmt não foi calculado)
            aux = Termino (X);
       else aux = X.tmt;
       if(aux > maior) maior = aux;
  }
  T.tmt = maior + T.duracao;
  return T.tmt;
}
```

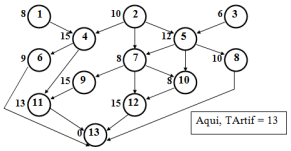
O tempo mínimo para a execução do projeto é calculado invocando **Termino (TArtif)**

É útil manter para cada tarefa, uma lista das tarefas das quais ela é adjacente, além da lista das adjacentes a ela (grafo reverso)

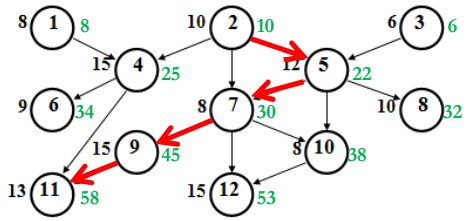


As tarefas do caminho crítico são assim escolhidas:

- A primeira delas é a de maior TMT entre as finais, excluindo **TArtif**
- Para cada tarefa T acrescentada ao caminho crítico, a próxima é aquela de maior TMT dentre as que T é adjacente
- A última a ser acrescentada é uma que não é adjacente de nenhuma outra.



Exemplo: caminho crítico do grafo ilustrativo



108

3.4 – Componentes fortemente conexos (CFC's)

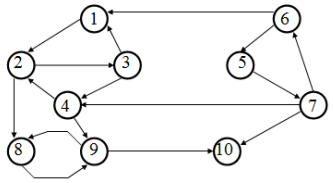
a) Conceito

- **CFC** de um digrafo G = {V, A} é um sub-grafo de G contendo:
  - Um conjunto máximo de vértices de V, no qual há um caminho de qualquer desses vértices para qualquer outro do conjunto
  - Todos os arcos de A que ligam somente vértices desse conjunto
- Um CFC pode ser composto de apenas um vértice

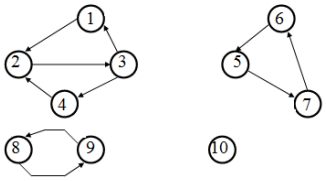
109

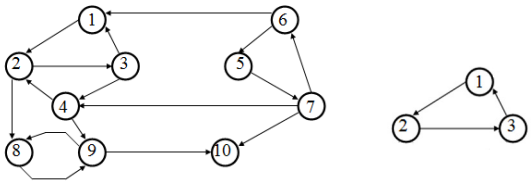
- **Exemplo:**

Seja G = {V, A}
o seguinte digrafo:



Eis seus CFC's:

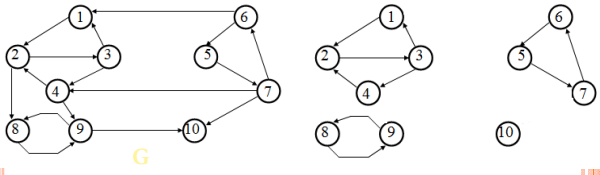




O sub-grafo **G' = {{1, 2, 3}, {1→2, 2→3, 3→1}}** não é um CFC, pois **{1, 2, 3}** não é máximo

Há caminho de **4** para **1**, **2** e **3** e também desses para **4**

111



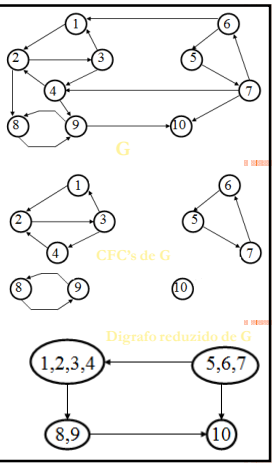
- Qualquer vértice de **G** está em algum de seus CFC's
- Alguns arcos de **G** podem não estar em nenhum de seus CFC's; tais arcos são chamados **arcos que cruzam componentes**

112

Digrafo reduzido de um digrafo é aquele:

- Em que cada vértice é o conjunto de vértices de um dos **CFC's** desse digrafo
- Cujos arcos são unificações de seus **arcos que cruzam componentes**

Digrafos reduzidos são sempre acíclicos.



b) Aplicações de CFC's

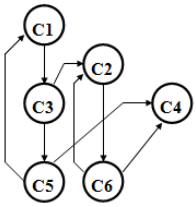
- **Divisão** de problemas sobre digrafos em **subproblemas**, um para cada CFC
- Estudo de privacidade em sistemas de comunicação
- Análise do fluxo de controle para a validação de programas
- Computer-aided design (CAD)
- Análise de circuitos eletrônicos – classes de equivalência
- Paralelização de laços seqüenciais

114

Exemplo: Paralelização de laços seqüenciais

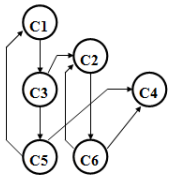
- Seja o seguinte laço em C e o grafo de dependências entre seus comandos:

```
      for (i = 1; i <= n; i++) {
C1:         A[i] = B[i] + C[i];
C2:         D[i] = E[i] + F[i];
C3:         E[i+1] = A[i] + G[i];
C4:         H[i] = F[i] + B[i];
C5:         B[i+1] = E[i+1] + M[i];
C6:         F[i+1] = D[i] + N[i];
      }
```



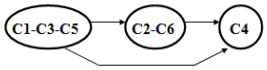
115

```
      for (i = 1; i <= n; i++) {
C1:         A[i] = B[i] + C[i];
C2:         D[i] = E[i] + F[i];
C3:         E[i+1] = A[i] + G[i];
C4:         H[i] = F[i] + B[i];
C5:         B[i+1] = E[i+1] + M[i];
C6:         F[i+1] = D[i] + N[i];
      }
```



- CFC's (só os vértices) e digrafo reduzido:

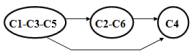
1º: C1-C3-C5
2º: C2-C6
3º: C4



116

- O laço original pode ser decomposto em tantos laços quantos forem os CFC's:

```
      for (i = 1; i <= n; i++) {
C1:         A[i] = B[i] + C[i];
C3:         E[i+1] = A[i] + G[i];
C5:         B[i+1] = E[i+1] + M[i];
      }

      for (i = 1; i <= n; i++) {
C2:         D[i] = E[i] + F[i];
C6:         F[i+1] = D[i] + N[i];
      }

      for (i = 1; i <= n; i++) {
C4:         H[i] = F[i] + B[i];
      }
```



Em muitos casos é mais fácil aplicar técnicas de paralelização em laços menores do que em laços maiores

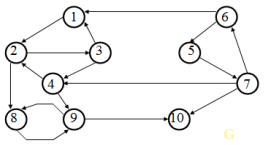
117

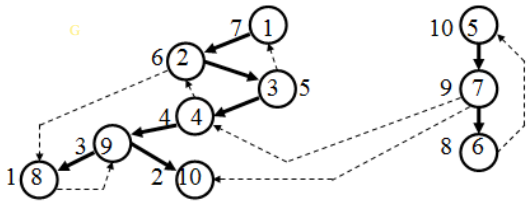
c) Algoritmo para determinar os CFC's de um digrafo

- Será apresentado o Algoritmo de S.R. Kosaraju.
- Faz duas buscas em profundidade no digrafo
- Dividido em quatro passos
- O algoritmo não será provado, apenas ilustrado. Maiores informações e prova em: *A. V. Aho, J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1975*

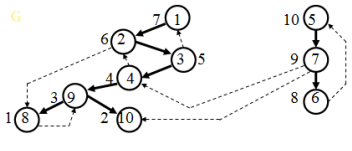
118

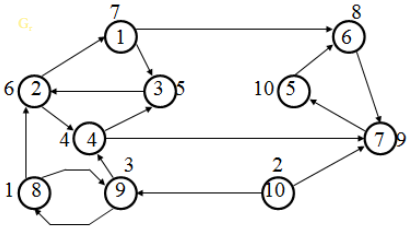
Passo 1: Fazer uma busca em profundidade em **G**, numerando os vértices no final da chamada recursiva de cada um. Exemplo:





Passo 2: Construir um novo digrafo G_r, obtido a partir de **G**, invertendo-se a direção de todos os seus arcos (grafo reverso). Exemplo:

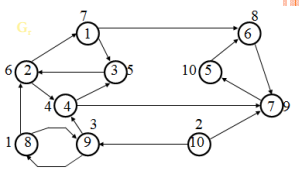


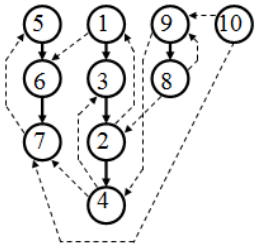


Manter a numeração obtida no passo 1

120

Passo 3: Fazer uma busca em profundidade em G_r, começando do vértice numerado no passo 1 com o número mais alto. Exemplo:

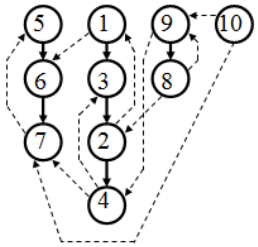




Se a busca não visitar todos os vértices de G_r, começar novamente do vértice não visitado de numeração mais alta

121

Passo 4: Cada árvore na floresta da busca em profundidade em G_r, resultante do Passo 3 contém os vértices de um **CFC** de **G**. Exemplo:



Os vértices dos CFC's são:

1°: 5, 6, 7
2°: 1, 3, 2, 4
3°: 9, 8
4°: 10

122