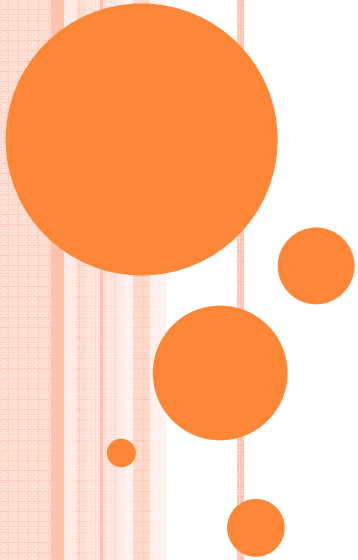


ALGORITMOS E ESTRUTURAS DE DADOS

CES-11

Prof. Paulo André Castro
pauloac@ita.br
Sala 110 – Prédio da Computação
www.comp.ita.br/~pauloac
IECE - ITA

CES-11

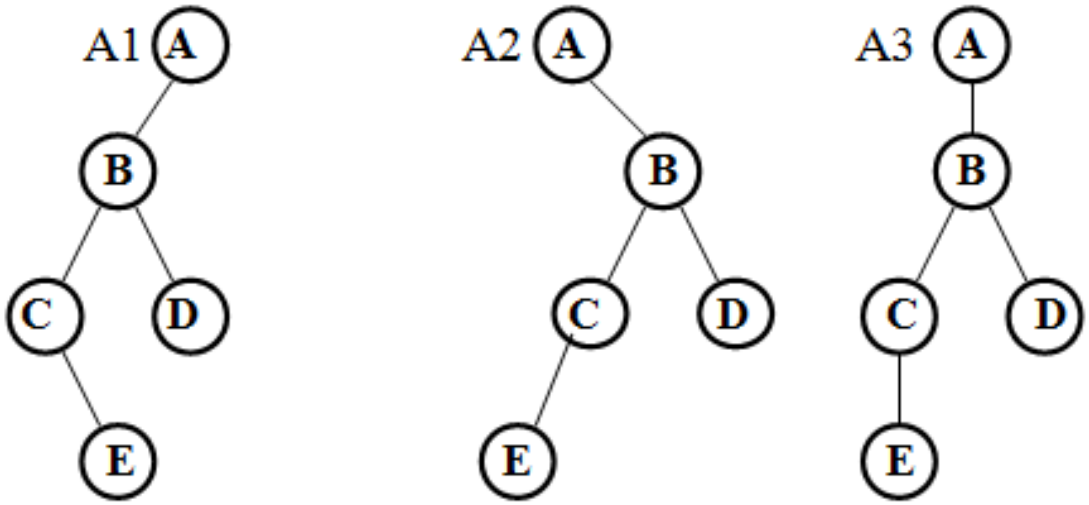
- Árvores binárias
- Árvores binárias de busca
  - Conceito
  - Operações

CES-11

- Árvores binárias
- Árvores binárias de busca
  - Conceito
  - Operações

ÁRVORES BINÁRIAS

- Uma árvore binária é:
  - uma árvore vazia;
  - ou uma árvore onde qualquer nó possui:
    - nenhum filho;
    - ou um filho esquerdo ou um filho direito;
    - ou os dois filhos citados.



A1 é binária? Sim

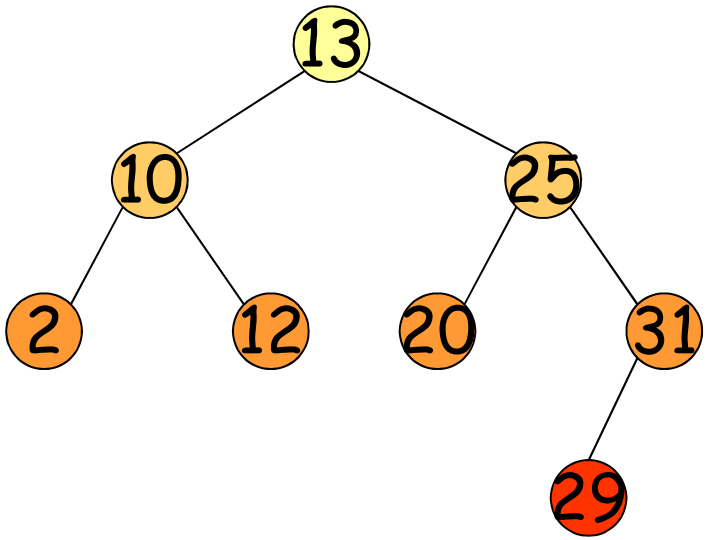
A2 é binária? Sim

A3 é binária? Não

No nó A, não há distinção entre filho esquerdo e direito...

Árvores binárias

- Exemplo ordenação de nós numa árvore binária:
  - Por nível (largura): 13 10 25 2 12 20 31 29
  - Pré-ordem: 13 10 2 12 25 20 31 29
  - Pós-ordem: 2 12 10 20 29 31 25 13
  - Ordem-central: 2 10 12 13 20 25 29 31

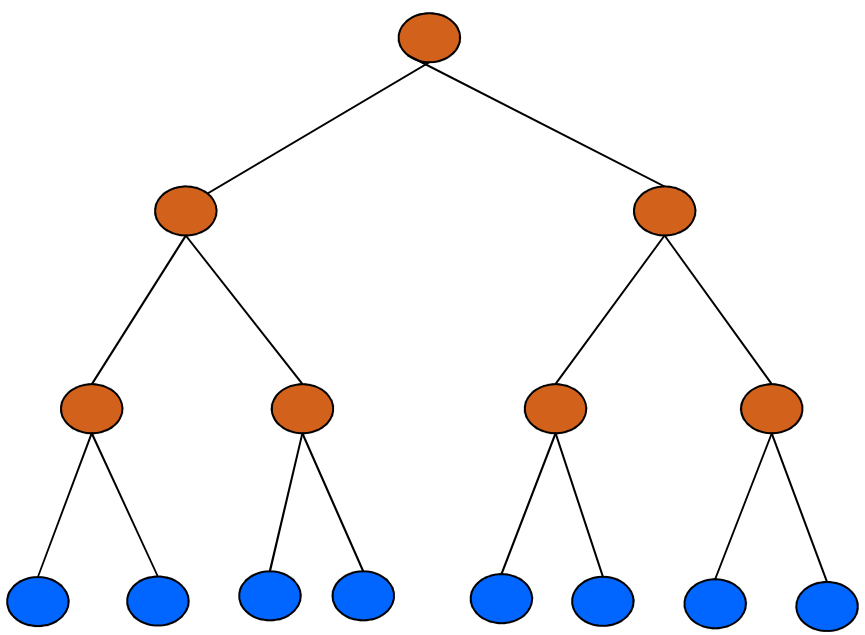


Árvores binárias

- Uma árvore binária é completa quando os nós internos têm exatamente dois filhos e as folhas têm a mesma distância da raiz.
- Uma árvore binária completa de altura h tem exatamente $2^h - 1$ nós internos e 2^h folhas.
- Numa árvore binária completa com n folhas, a distância da raiz até qualquer folha é $lg\ n$.
- Prove!!

Árvores binárias

- Seja a árvore binária completa:



h = 3 (altura)
n = 8 (folhas)

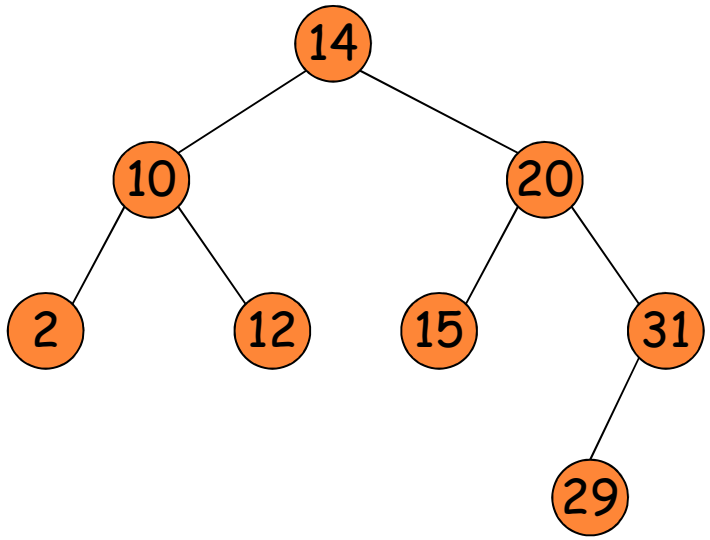
$n = 2^h \Leftrightarrow h = \lg n$

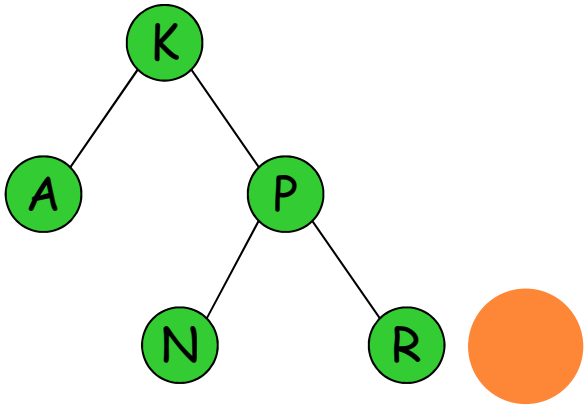
CES-11

- Árvores binárias
- Árvores binárias de busca
  - Conceito
  - Operações

Árvores binárias de busca

- Em cada nó de uma árvore binária de busca, os valores armazenados na sub-árvore esquerda são menores que o valor do próprio nó, e os valores armazenados na sub-árvore direita são maiores que o valor do próprio nó.



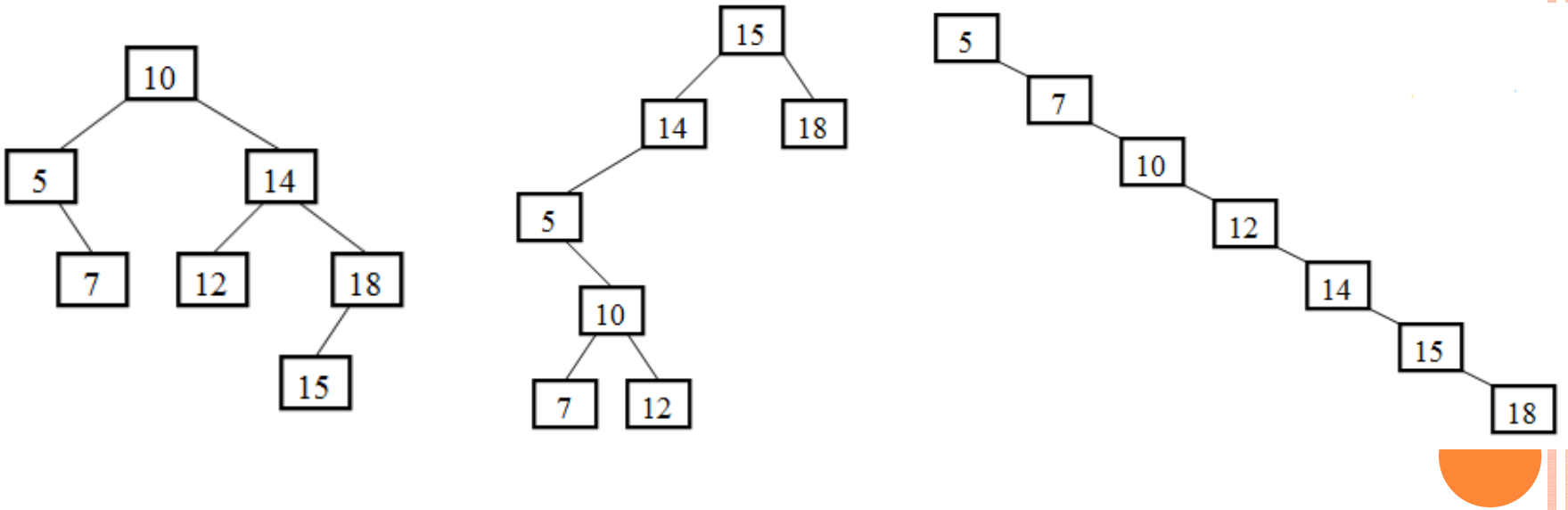


Árvores binárias de busca

- Uma utilização: implementar dicionários
  - Consiste em um conjunto de chaves ou elementos **distintos** (sem repetições)
  - De modo geral, cada chave tem uma informação associada
  - Operações comuns:
    - Busca de uma chave (teste de pertinência)
    - Inserção de uma chave
    - Eliminação de uma chave
    - Esvaziamento de um dicionário

ÁRVORES BINÁRIAS DE BUSCA

- Exemplo:
  - Seja o conjunto C = {5, 7, 10, 12, 14, 15, 18}
  - Há várias árvores binárias de busca possíveis:



CES-11

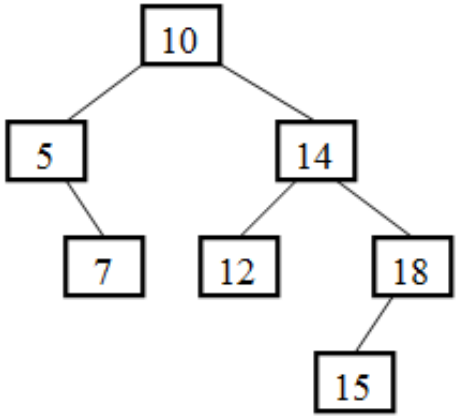
- Árvores binárias
- Árvores binárias de busca
  - Conceito
  - Operações

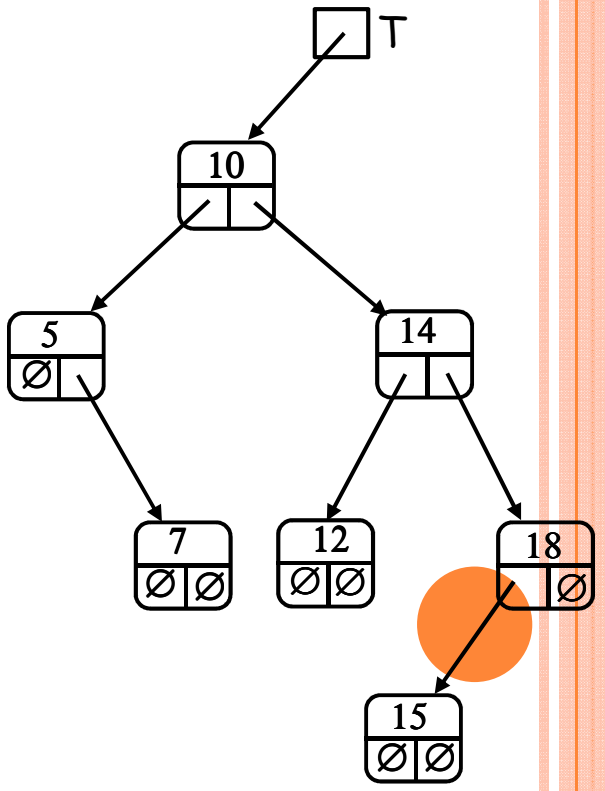
OPERAÇÕES

- Declaração

```
struct Celula  {
       int elem;
       Celula *fesq, *fdir;
};
typedef Celula *Dicionario;

Dicionario T = NULL;
```





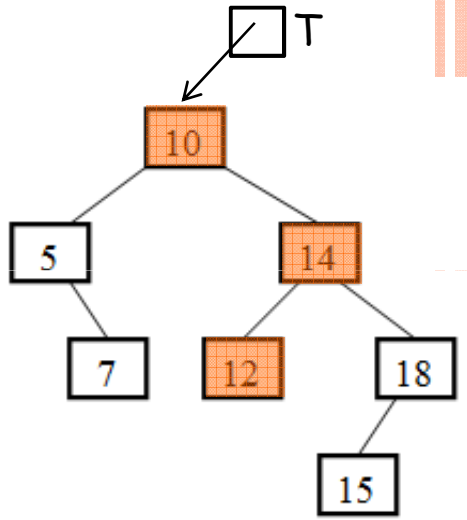
Operações

- Operação membro(x,dic)
  - Algoritmo de busca é simples e direto
  - Repetição que começa na raiz:
    - Compare com o valor armazenado no nó.
    - Se for igual, a busca chegou ao fim.
    - Se for menor, vá para a sub-árvore esquerda.
    - Se for maior, vá para a sub-árvore direita.
    - Se não houver como continuar, o valor não está na árvore.

OPERAÇÕES

- Operação membro(x,dic)

```
logic membro (int x, Dicionario dic) {
        if (dic == NULL)
                return FALSE;
        else if (x == dic->elem)
                return TRUE;
        else if (x < dic->elem)
                return membro(x, dic->fesq);
        else
                return membro(x, dic->fdir);
}
```

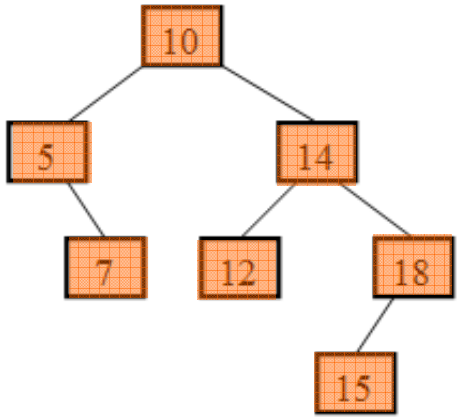


  - Exemplo: membro(13,T)
  - Pior caso: tempo proporcional à altura da árvore

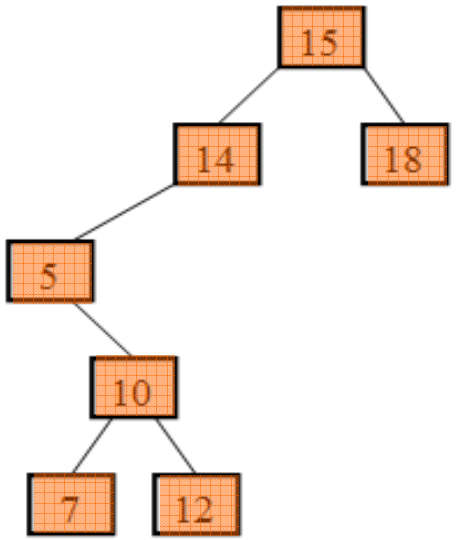
OPERAÇÕES

- Operação inserir(x,&dic)
  - Insere o elemento **x** no dicionário **dic**
  - A **sequência** de inserções determina o **formato** final da árvore

10, 14, 5, 12, 7, 18, 15



15, 14, 5, 18, 10, 12, 7



OPERAÇÕES

- Operação inserir(x,&dic)

```
void inserir (int x, Dicionario *dic)  {
   if (*dic == NULL) {
      *dic = (Celula *) malloc (sizeof(Celula));
      (*dic)->elem = x;
      (*dic)->fesq = NULL;
      (*dic)->fdir = NULL;
   }
   else if (x < (*dic)->elem)
      inserir (x, &(*dic)->fesq);
   else if (x > (*dic)->elem)
      inserir (x, &(*dic)->fdir);
}
```

Como o elemento não existe, um novo nó é criado

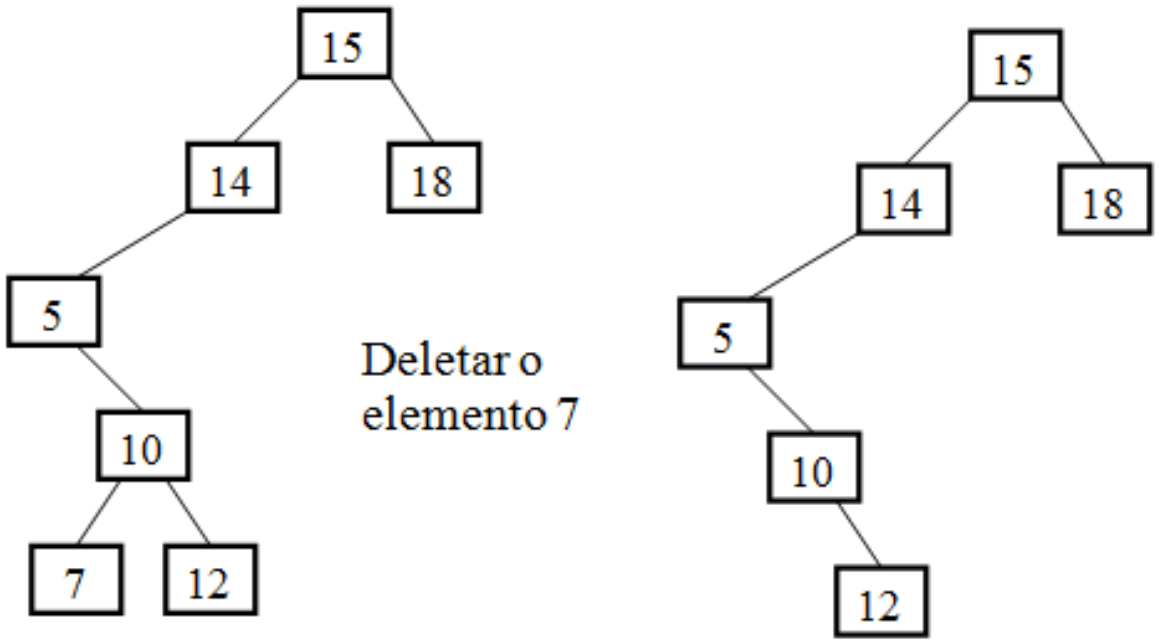
Chamada recursiva

E quando x é igual a (*dic)->elem?

Não faz nada!

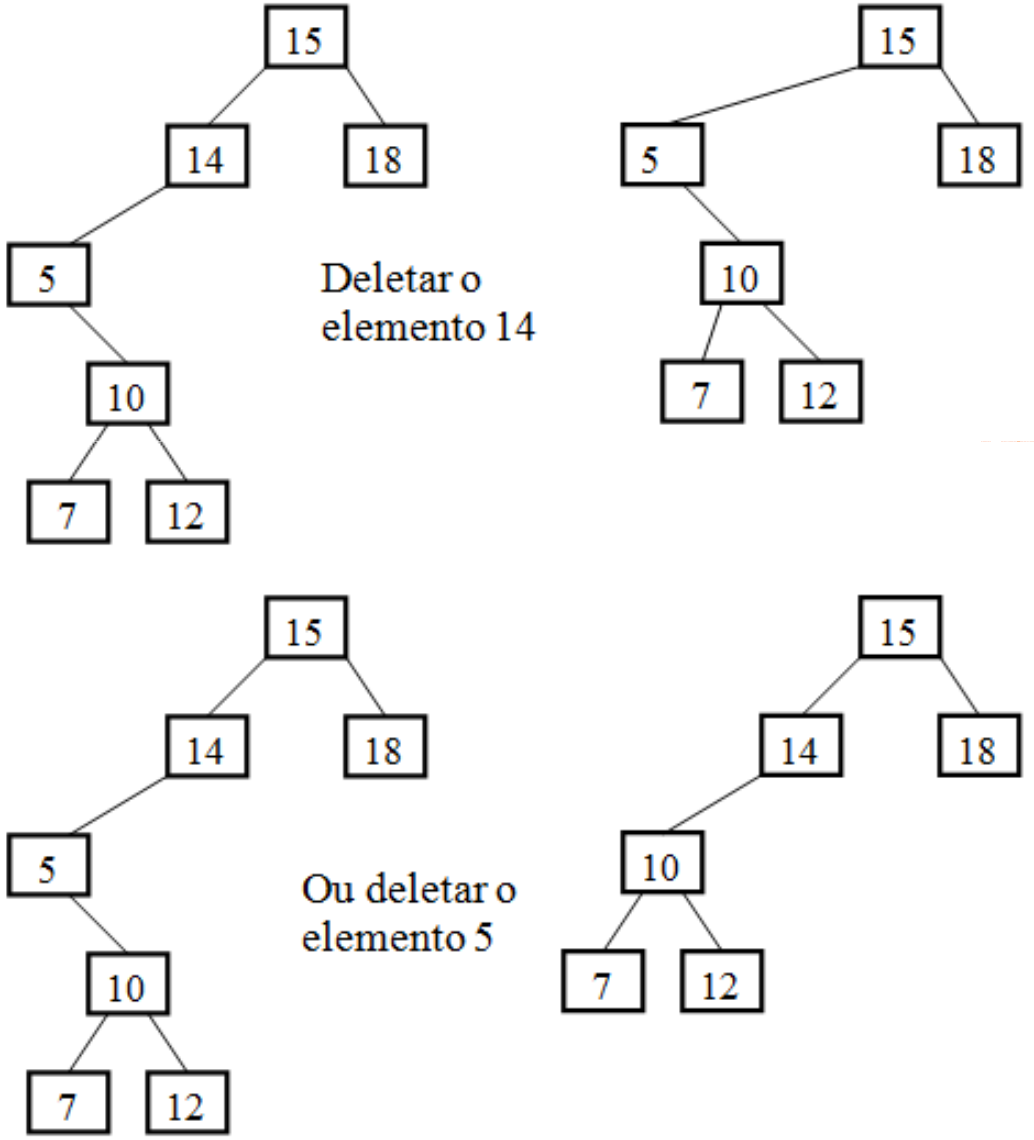
OPERAÇÕES

- Operação eliminar(x,&dic)
  - **Caso 1: Eliminar uma folha**
  - Basta apagá-la da estrutura



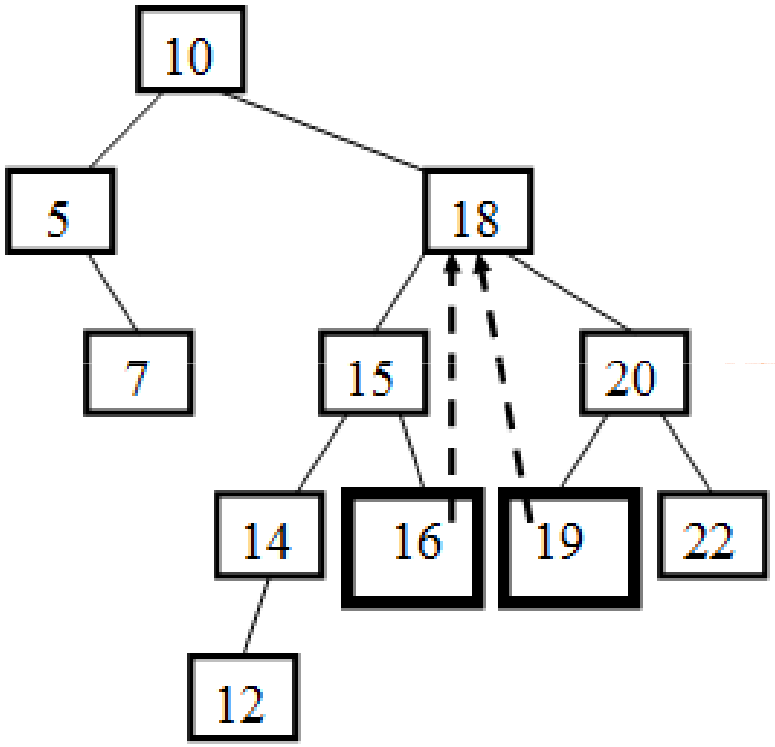
OPERAÇÕES

- Operação eliminar(x,&dic)
  - **Caso 2: Eliminar nó com um único filho**
  - Basta fazer esse filho ocupar a sua posição original



OPERAÇÕES

- Operação eliminar(x,&dic)
  - **Caso 3: Eliminar nó com os dois filhos**
  - Um elemento deve ocupar o nó do elemento a ser eliminado.
  - Duas opções:
    - Maior elemento da sub-árvore esquerda desse nó
    - Menor elemento da sub-árvore direita desse nó

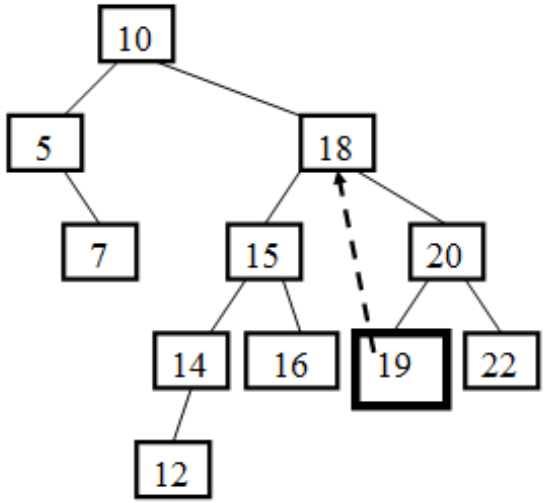


Por convenção, será o escolhido

OPERAÇÕES

- Operação eliminar(x,&dic)
  - Utiliza-se o operador **eliminarMin (&dic)**
    - Esse operador elimina o menor elemento de dic, retornando o seu valor

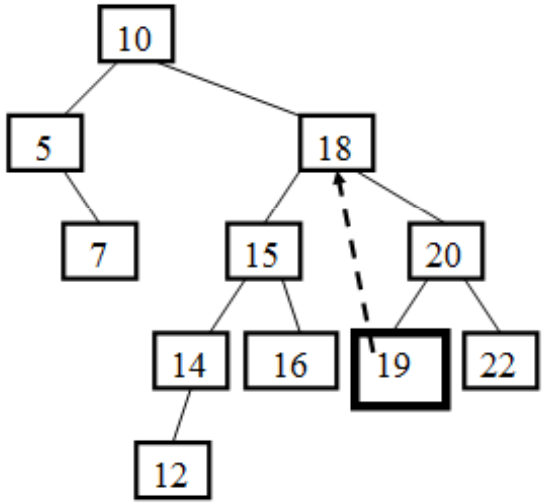
- No exemplo:
  - Aplica-se esse operador à sub-árvore direita do nó **18**
  - O valor retornado **19** é armazenado no nó que continha o **18**



OPERAÇÕES

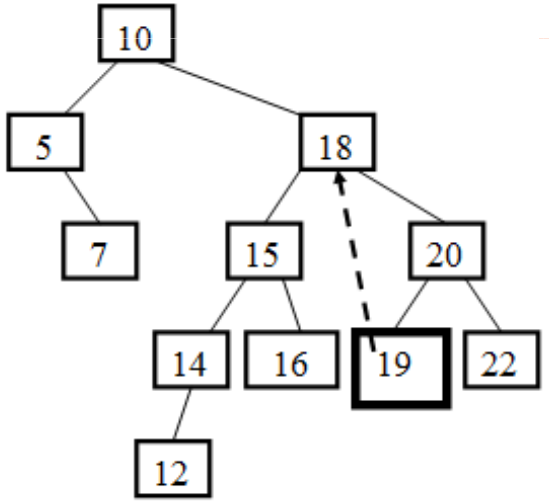
- Operador eliminarMin(&dic)

```
//Elimina noh minimo, (noh mais a esquerda)
int eliminarMin (Dicionario *dic) {
    Celula *p;
    int ret;
    if ((*dic)->fesq == NULL) {
        ret = (*dic)->elem;
        p = *dic;
        *dic = (*dic)->fdir;
        free(p);
    }
    else ret = eliminarMin (&(*dic)->fesq);
    return ret;
}
```



OPERAÇÃO ELIMINAR(X,&DIC)

```
void eliminar (int x, Dicionario *dic) {
   Celula *p;
   if (*dic != NULL) {
      if (x < (*dic)->elem)
           eliminar (x, &(*dic)->fesq); //elimina na sub-arvore esq.
      else if (x > (*dic)->elem)
           eliminar(x, &(*dic)->fdir); //elimina na sub-arvore dir.
      //se não é maior nem menor....(*dic)->elem==x
      else if ((*dic)->fesq == NULL && (*dic)->fdir == NULL) {
          free (*dic);  //elimina noh folha
          *dic = NULL;
      }
      else if ((*dic)->fesq == NULL){
           p = *dic;  //elimina noh com filho dir.
          *dic = (*dic)->fdir;
           free (p);
      }
      else if ((*dic)->fdir == NULL){
          p = (*dic); //elimina noh com filho esq.
          *dic = (*dic)->fesq;
          free (p);
      }
      else  //elimina noh com filho esq. e filho direito
          (*dic)->elem = eliminarMin (&(*dic)->fdir);
   }
}
```



Operações

- Nessas operações, manteve-se a ordenação própria de uma árvore binária de busca: a chave do pai é maior que a do filho esquerdo e menor que a do filho direito.
- No entanto, não foi possível garantir seu balanceamento.
- Seria desejável que a altura dessa árvore continuasse proporcional ao logaritmo do número de nós: assim, as operações seriam mais eficientes.
- Há diversos algoritmos para balanceamentos de árvores...

Fim