CES-11

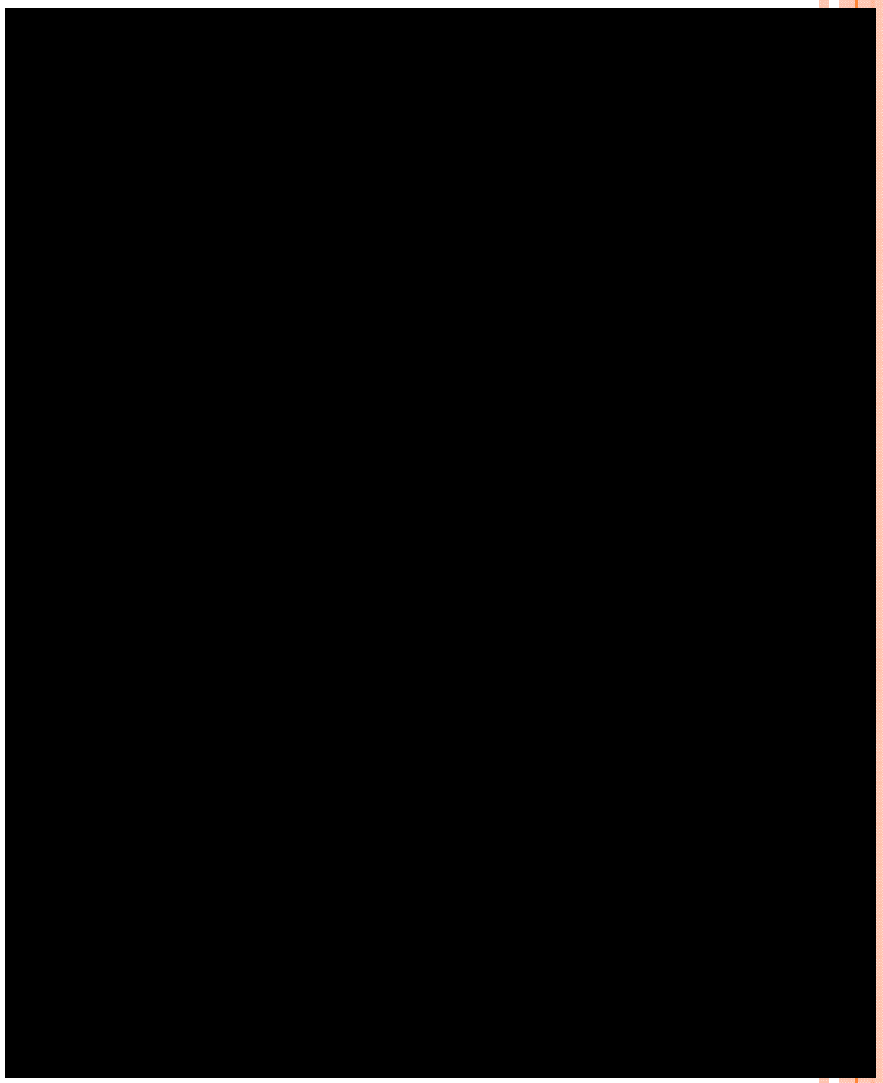
- Árvores
  - Conceito de árvore
  - Definição recursiva de árvore
  - Definições associadas a árvore
  - Representações de árvores
  - Ordenação dos nós de uma árvore

Conceito de árvore

- Tantos as pilhas como as filas são estruturas lineares, isto é, de uma única dimensão.
- Na sua implementação, as listas ligadas possibilitam maior flexibilidade que os vetores, mas mesmo assim **não permitem** a representação **hierárquica de dados**.
- Árvores (trees) são estruturas **hierárquicas**, formadas por vértices e arestas. Ao contrário das árvores naturais, são representadas de cima para baixo: a raiz está no topo e as folhas na base.

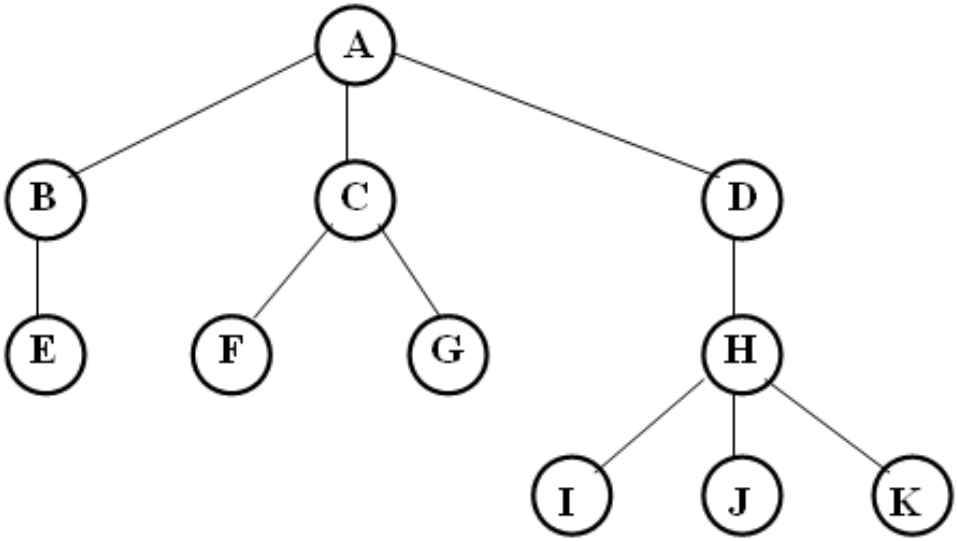
Conceito de árvore

- Cada nó tem um e apenas um pai (exceto a raiz)
- Cada nó tem zero ou mais filhos
- Um nó não pode ter um ancestral como filho
  - Caso contrário, surgiria um ciclo...
- Árvore é uma estrutura recursiva: cada filho é também uma árvore.



Conceito de árvore

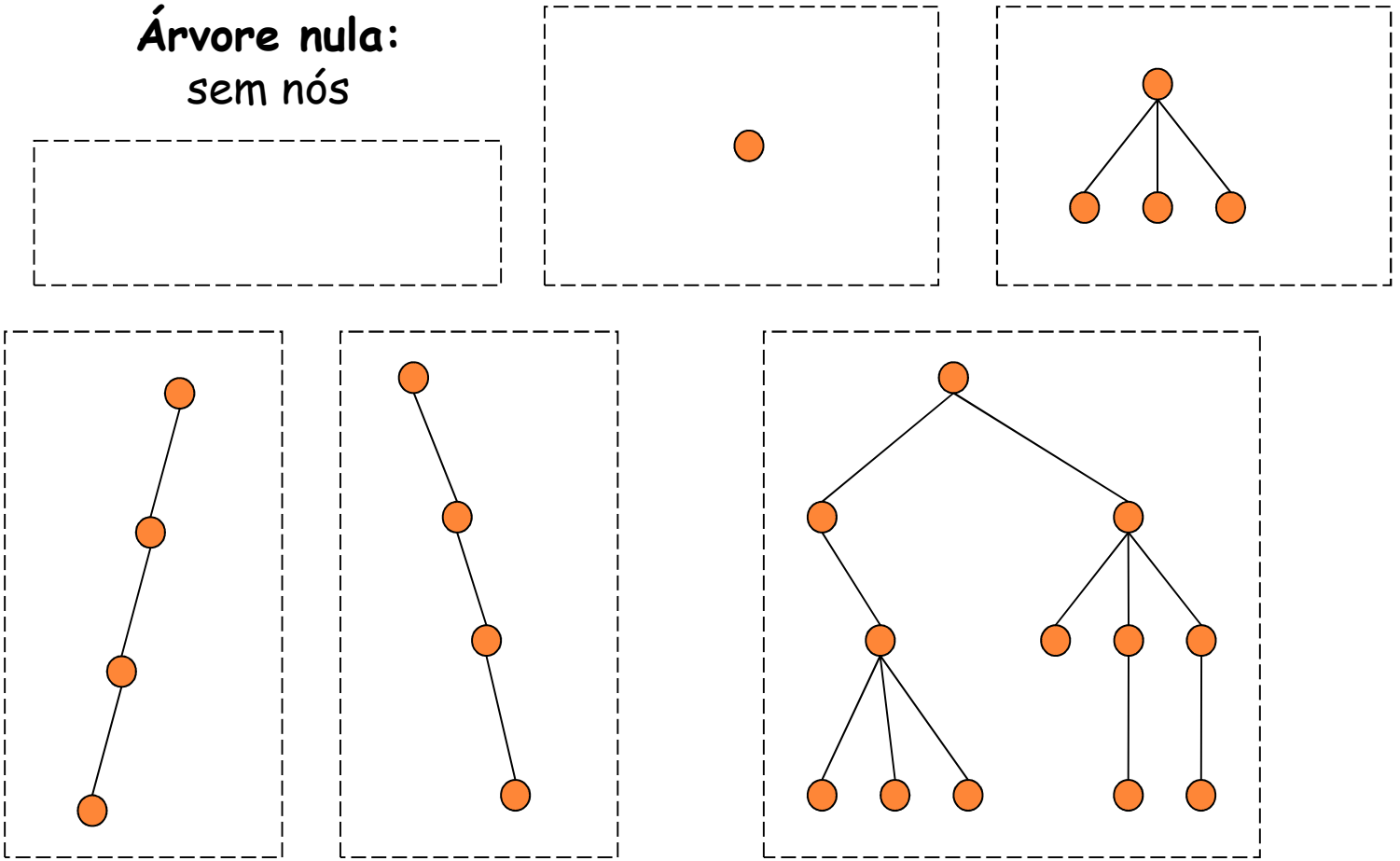
- Cada elemento:
  - Tem um único pai (exceto a raiz)
  - Pode ter vários filhos
  - Não pode ser pai de nenhum ancestral



- A raiz é o único nó que não possui ancestrais.
  - Ex: A
- As folhas são os nós sem filhos.
  - Ex: E, F, G, I, J, K

Conceito de árvore

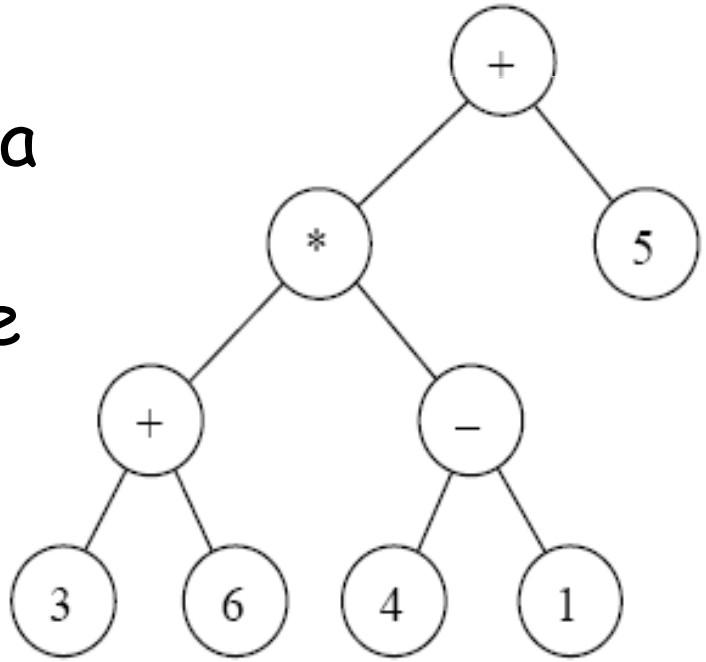
- Exemplos:



Conceito de árvore

- O número de filhos por nó e as informações armazenadas diferenciam os tipos de árvores.

- A árvore ao lado representa a expressão (3+6)*(4-1)+5: as folhas possuem valores e os nós intermediários, operadores matemáticos.

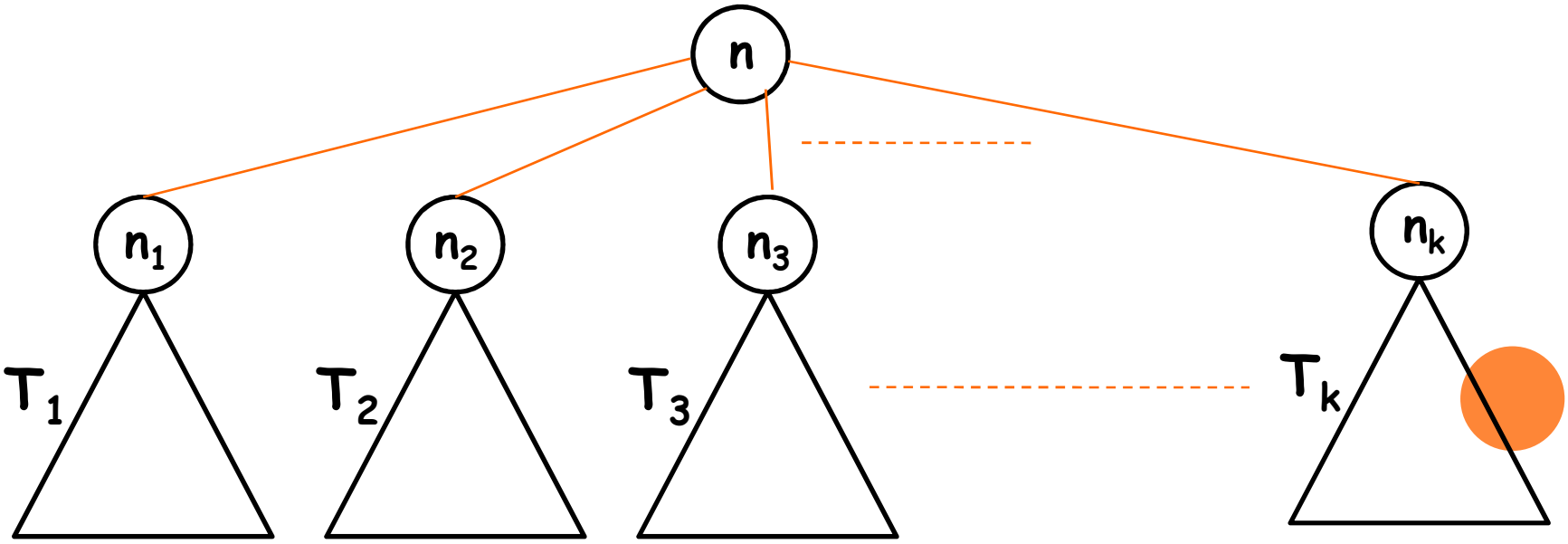


CES-11

- Árvores
  - Conceito de árvore
  - Definição recursiva de árvore
  - Definições
  - Representações de árvores
  - Ordenação dos nós de uma árvore

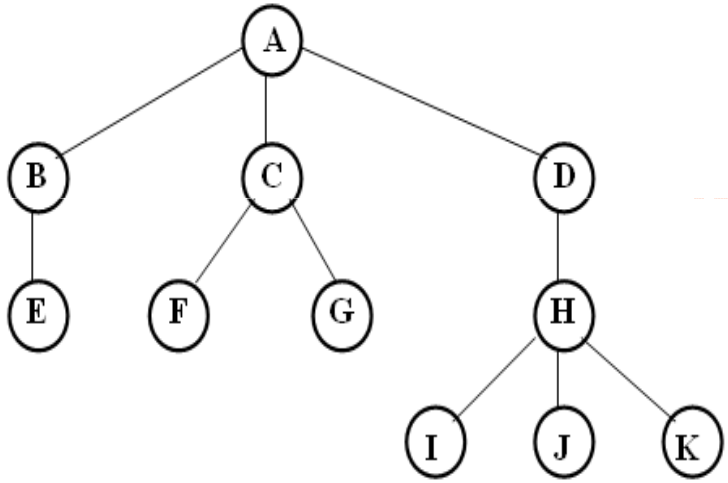
Definição recursiva de árvore

- Um único nó, por si mesmo, é também uma árvore sem filhos, onde ele é a raiz.
- Seja **n** um nó e $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, ... , $\mathbf{T_k}$, árvores de raízes $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, ..., $\mathbf{n_k}$, respectivamente. Pode-se construir uma nova árvore tornando **n** pai de $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, ..., $\mathbf{n_k}$.



DEFINIÇÃO RECURSIVA DE ÁRVORE

- Comprovação de que a figura abaixo é uma árvore:
  - I, J, K são árvores sem filhos
  - H é raiz de uma nova árvore
  - F e G são árvores sem filhos
  - C é raiz de uma nova árvore
  - E é uma árvore sem filhos
  - B é raiz de uma nova árvore
  - Como B, C e D são árvores, A é raiz de uma nova árvore

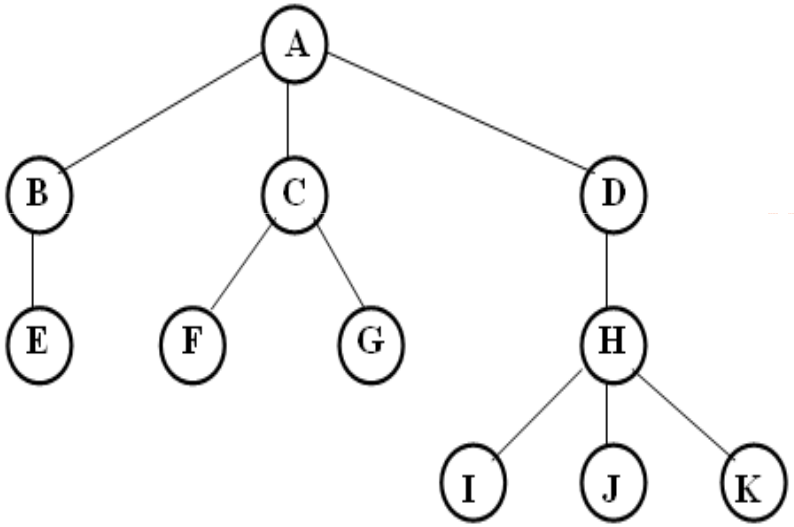


CES-11

- Árvores
  - Conceito de árvore
  - Definição recursiva de árvore
  - Definições
  - Representações de árvores
  - Ordenação dos nós de uma árvore

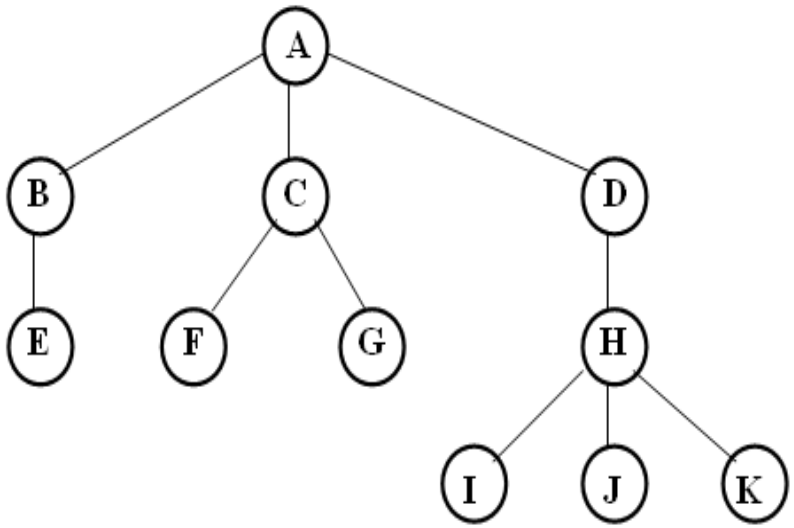
DEFINIÇÕES

- Filho esquerdo de um nó é o seu único filho ou o primeiro filho mais à esquerda.
  - B é o filho esquerdo de A
  - F é o filho esquerdo de C
  - H é o filho esquerdo de D



DEFINIÇÕES

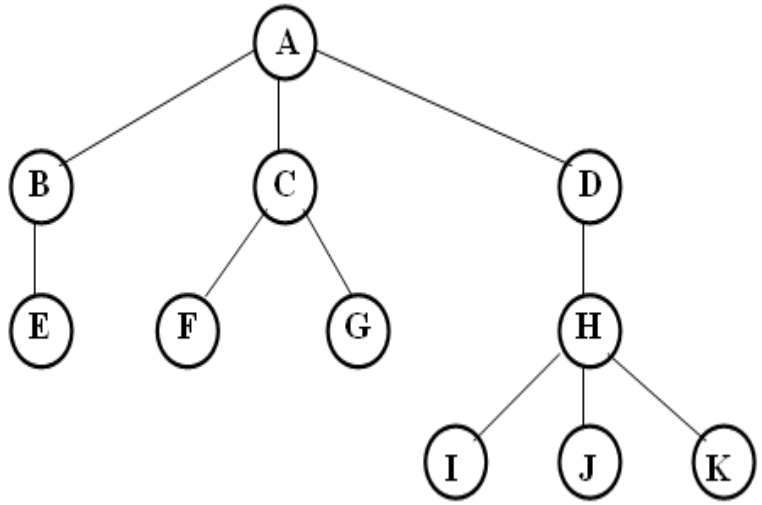
- Irmão direito de um nó é o irmão imediatamente à direita desse nó.
- Nó sem irmão direito é chamado de caçula.
  - C é o irmão direito de B
  - K é o irmão direito de J
  - H, G, K são caçulas
  - E é primogênito e caçula



DEFINIÇÕES

- Caminho de um nó n_1 a outro n_k: sequência de nós n_1, n_2, n_3, . . . n_{k-1}, n_k tais que n_i é pai de n_{i+1}, com $1 \leq i \leq k$.
  - Ex: A, AB, ABE, AC, B, ACG, CF, ADHJ, ADHK, DH, DHI, etc.

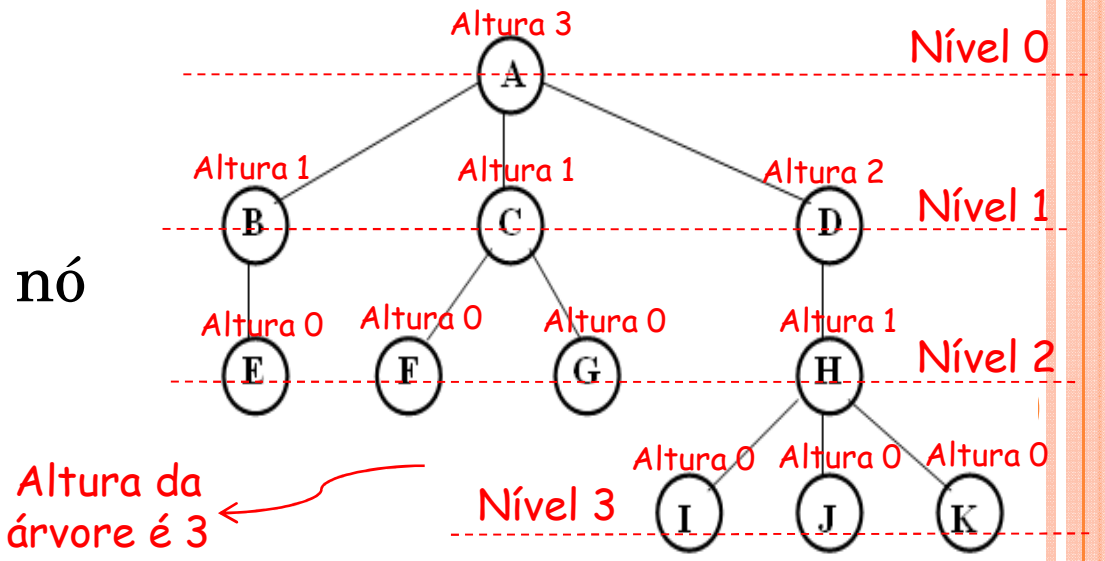
- O comprimento de um caminho é a sua quantidade de arestas.
  - Ex: A = 0, AB = 1, DHI = 2
  - É o número de nós menos 1



DEFINIÇÕES

- Cada nó pode ser alcançado a partir da raiz através de uma sequência única de arestas, chamada de caminho.
- O nível (ou profundidade) de um nó é o comprimento do caminho da raiz até esse nó.
- Altura de um nó é o comprimento do mais longo caminho desse nó a alguma folha.

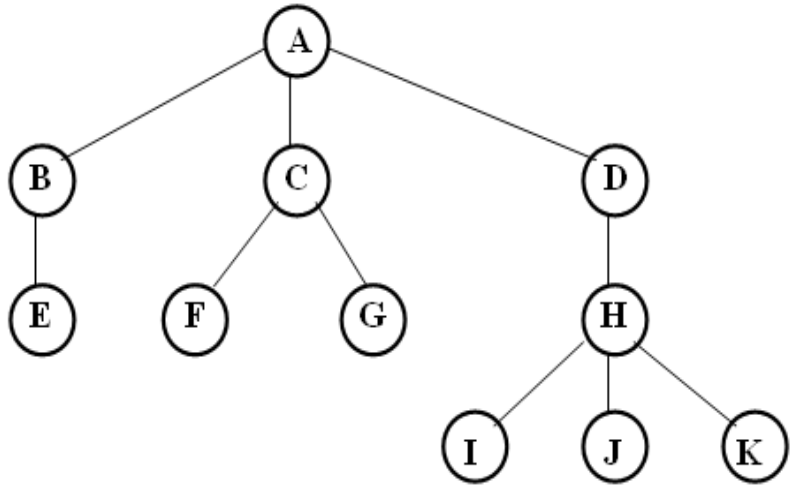
- A altura de uma árvore não vazia é o nível máximo de um nó nessa árvore.



DEFINIÇÕES

- Se há um caminho de n_i para n_j, então n_i é <u>ancestral</u> de n_j e n_j é <u>descendente</u> de n_i.
- Um nó é ancestral e descendente de si mesmo.
- <u>Ancestral próprio</u> ou <u>descendente próprio</u> de um nó é um ancestral ou descendente, respectivamente, diferente desse nó.

- Na árvore ao lado:
  - Ancestrais próprios de J: A, D, H
  - Descendentes próprios de D: H, I, J, K

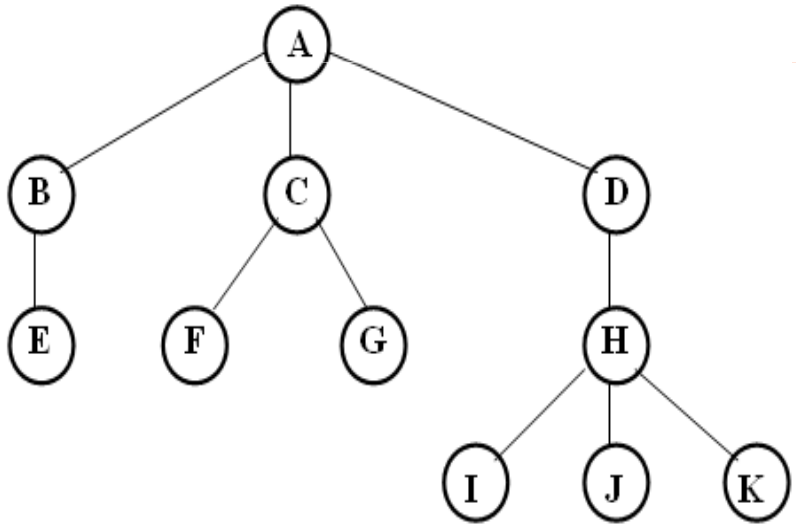


Definições

- Podemos redefinir raiz e folha com os conceitos de ancestral e descendente próprios:
  - Raiz: nó que não possui ancestral próprio
  - Folha: nó que não possui descendente próprio (também chamado nó terminal)
- O grau de um nó é o número de seus filhos.
  - É o número de sub-árvores disjuntas desse nó
  - As folhas têm grau nulo
- O grau de uma árvore é o máximo entre os graus de seus nós.

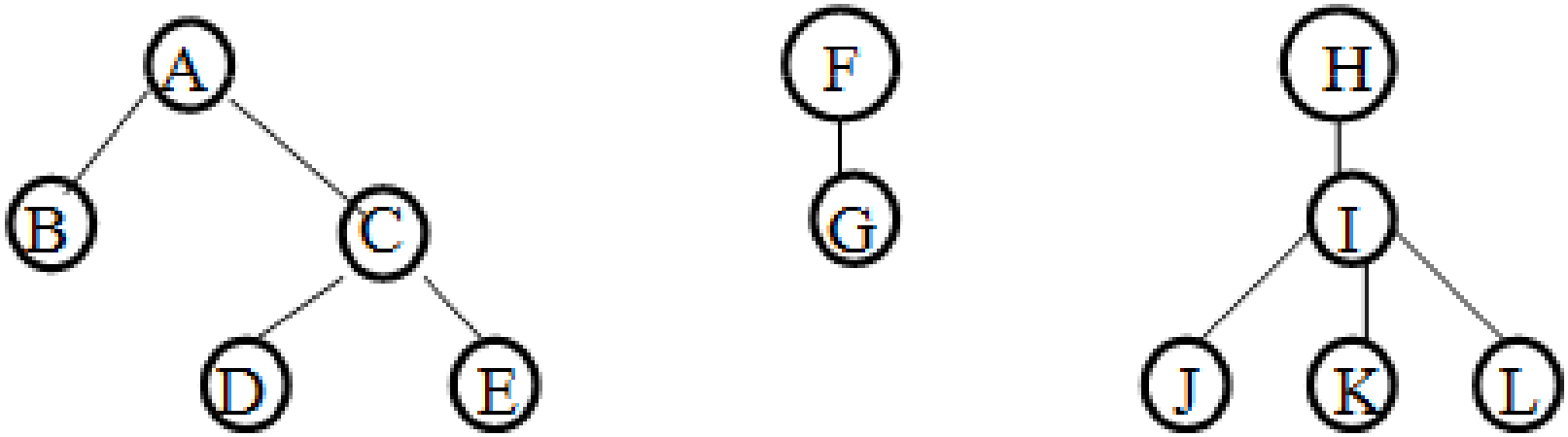
Definições

- Um nó que não é folha é chamado de nó interno ou nó não-terminal.
- Irmãos: filhos de um mesmo nó.
- Exemplos na árvore ao lado
  - Grau de C? 2
  - Grau de G? 0
  - Grau da árvore? 3
  - Quais os irmãos de B? C e D
  - Quais os irmãos de E? Não há
  - Quais os nós não-terminais? A, B, C, D e H



DEFINIÇÕES

- Um conjunto de árvores é chamado de floresta.
- Exemplo:

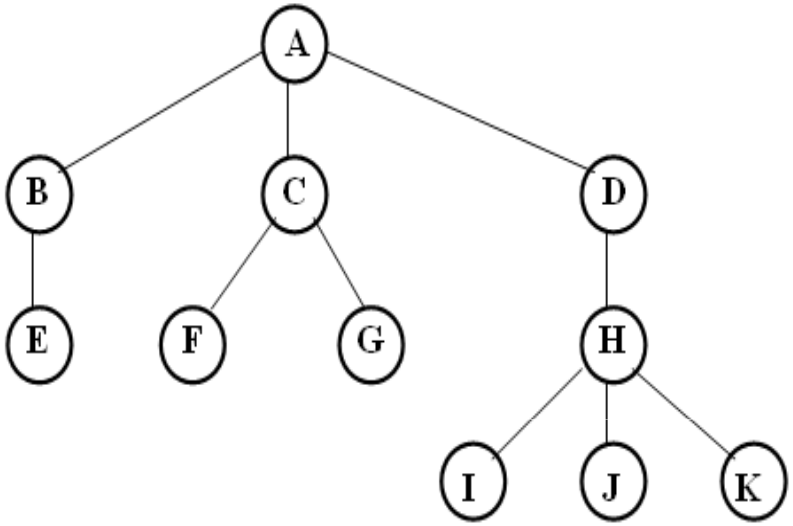


CES-11

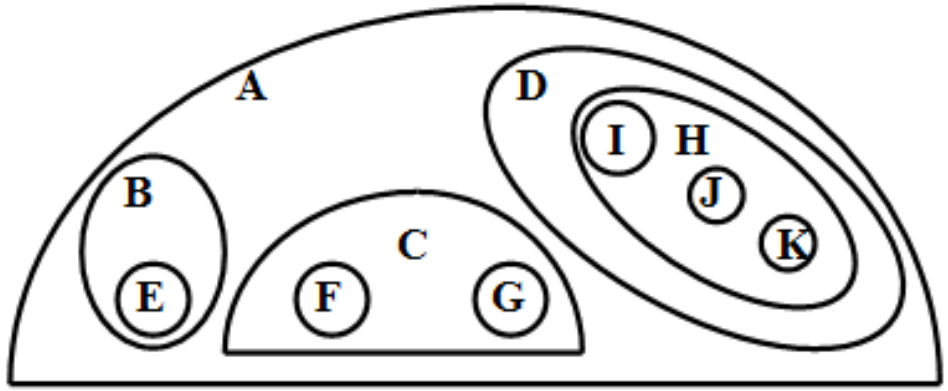
- Árvores
  - Conceito de árvore
  - Definição recursiva de árvore
  - Definições
  - Representações de árvores
  - Ordenação dos nós de uma árvore

Representações de árvores

a) Forma convencional



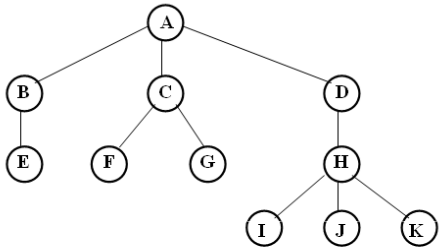
b) Diagrama de conjuntos



REPRESENTAÇÕES DE ÁRVORES

c) Forma parentética

Coloca-se entre parêntesis a raiz, seguida das formas parentéticas de suas sub-árvores, ordenadas da esquerda para a direita



(A (B (E)) (C (F) (G)) (D (H (I) (J) (K))))

- Identificação recursiva de uma forma parentética:
  - Sendo c um caractere genérico, (c) é uma forma parentética correta.
  - Se α_1, α_2, α_3, ..., α_n são formas parentéticas corretas, com n > 0, então (c α_1 α_2 α_3 ... α_n) também será.

Representações de árvores

d) Forma tabulada

```
Diretoria
        Departamento de Fabricação
                Seção de Prensas
                Seção de Tornos
                Seção de Ferramentaria
                Seção de Fornos
                Seção de Banhos Químicos
        Departamento de Engenharia de Produção
                Seção de Desenvolvimento de Projetos
                Seção de Desenhos
                Seção de Controle de Qualidade
        Departamento de Manutenção
                Seção de Eletricistas
                Seção de Mecânica
                Seção de Hidráulica
                Seção de Instalações Prediais
```

- Cada nó aparece numa linha, e seus filhos são listados com uma tabulação a mais que a desse nó.
  - Ex: organograma de uma empresa, índice de livros, etc.

REPRESENTAÇÕES DE ÁRVORES

e) Forma numerada
(ou *itemizada*)

```
1 – Estruturas de dados

1.1 – Listas lineares
1.1.1 – Estrutura contígua
1.1.2 – Estrutura encadeada
1.1.3 – Pilhas e filas

1.2 – Árvores
1.2.1 – Definições
1.2.2 – Estruturas de dados
1.2.3 – Árvores binárias

1.3 – Grafos
1.3.1 – Grafos orientados
1.3.2 – Grafos não orientados
```

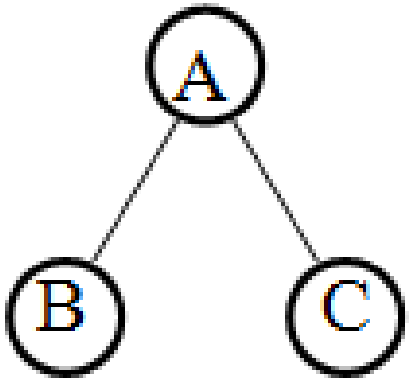
- Semelhante à anterior: a numeração de um nó tem como prefixo o número de seu pai, e como sufixo um número que o diferencie dos irmãos.

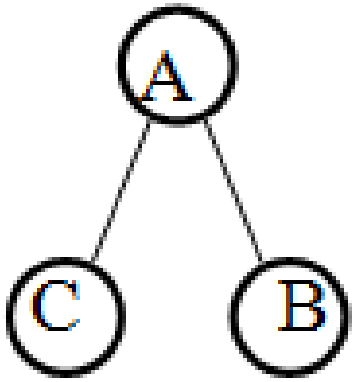
CES-11

- Árvores
  - Conceito de árvore
  - Definição recursiva de árvore
  - Definições
  - Representações de árvores
  - Ordenação dos nós de uma árvore

Ordenação dos nós de uma árvore

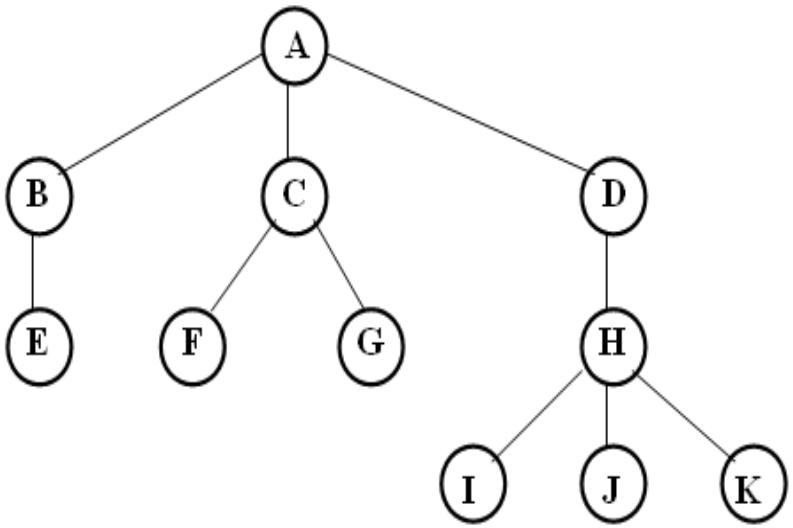
- a) Ordenação dos filhos de um nó
  - Os filhos de um nó são ordenados da esquerda para a direita
  - Por exemplo, as duas árvores abaixo têm o mesmo pai e os mesmos filhos, mas são diferentes:





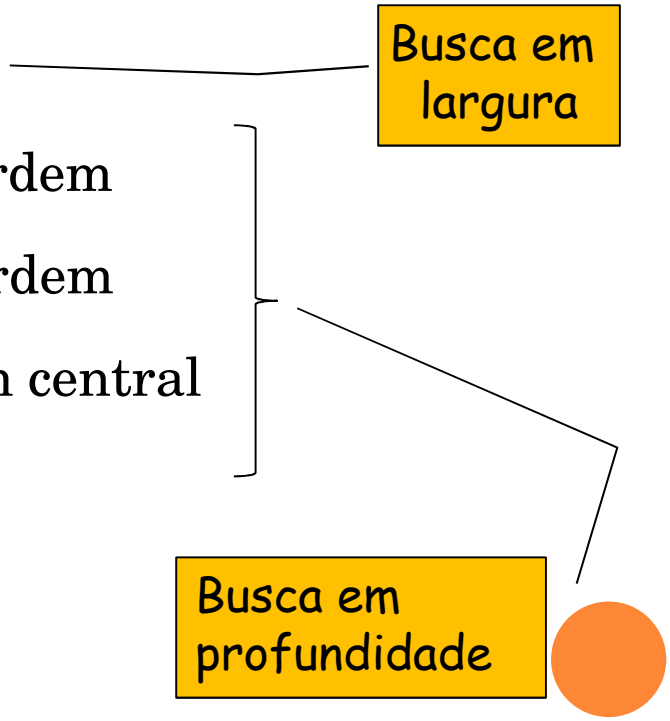
Ordenação dos nós de uma árvore

- b) Extensão da ordenação da esquerda para a direita
  - Se X e Y são irmãos e X está à direita de Y, então todos os descendentes de X estão à direita de todos os descendentes de Y.
  - Exemplo: C e D são irmãos e C está à esquerda de D
    - F e G estão à esquerda de D, H, I, J e K
    - J não está nem à direita nem à esquerda de H, D, e A



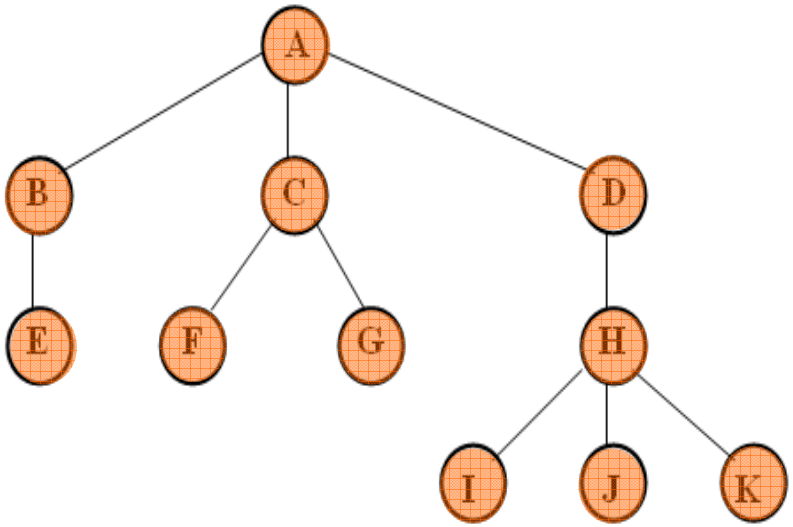
ORDENAÇÃO DOS NÓS DE UMA ÁRVORE

- c) Ordenação de todos os nós de uma árvore
  - Existem formas de se ordenar e de se percorrer sistematicamente todos os nós de uma árvore:
    - Ordenação ou percurso por nível
    - Ordenação ou percurso em pré-ordem
    - Ordenação ou percurso em pós-ordem
    - Ordenação ou percurso em ordem central (ou in-ordem)



PERCURSO POR NÍVEL (OU LARGURA)

- Passos:
  - Primeiramente, visita-se a raiz
  - Depois visitam-se todos os filhos da raiz, da esquerda para a direita
  - Depois os descendentes dos filhos da esquerda para a direita, e assim por diante..
- Também é chamada busca ou percurso em largura



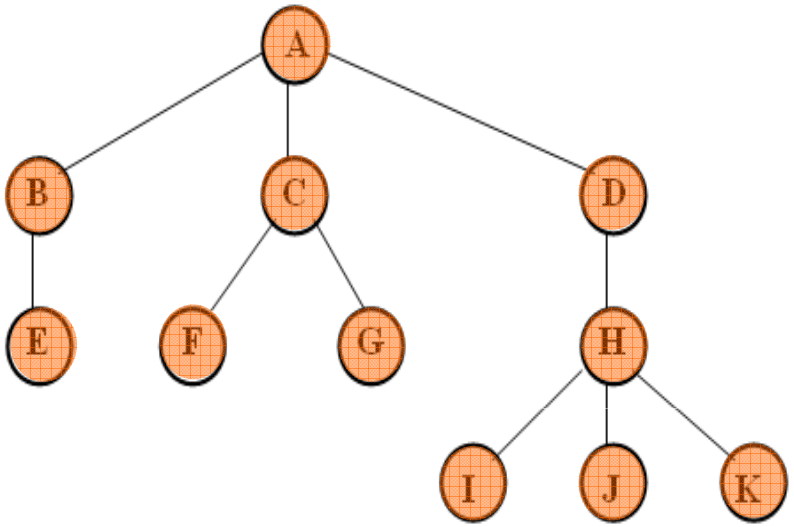
A B C D E F G H I J K

Como Implementar o Percurso por nível (ou largura)?

- Implementação com uso de fila:
  - Depois que um nó é visitado, seus filhos (da esquerda para a direita) são colocados no final da fila.
  - O próximo nó a ser visitado é o que está no início da fila.
  - Termina quando a fila fica vazia.

```
void OrdenacaoPorNivel(raiz)
  {
  Fila q;
  node p = raiz;
  if (p != null) {
    enqueue(q,p);
    while (!isEmpty(q)){
      p = first(q);
      dequeue(q);
      escreve(p);
      Para todo f filho de p
          enqueue(q,f);
    }
  }
}
```

PERCURSO POR NÍVEL (OU LARGURA)



Fila: A
Fila: B, C, D
Fila: C, D, E
Fila: D, E, F, G
Fila: E, F, G, H
Fila: F, G, H
Fila: G, H
Fila: H
Fila: I, J, K
Fila: J, K
Fila: K
Fila: vazia

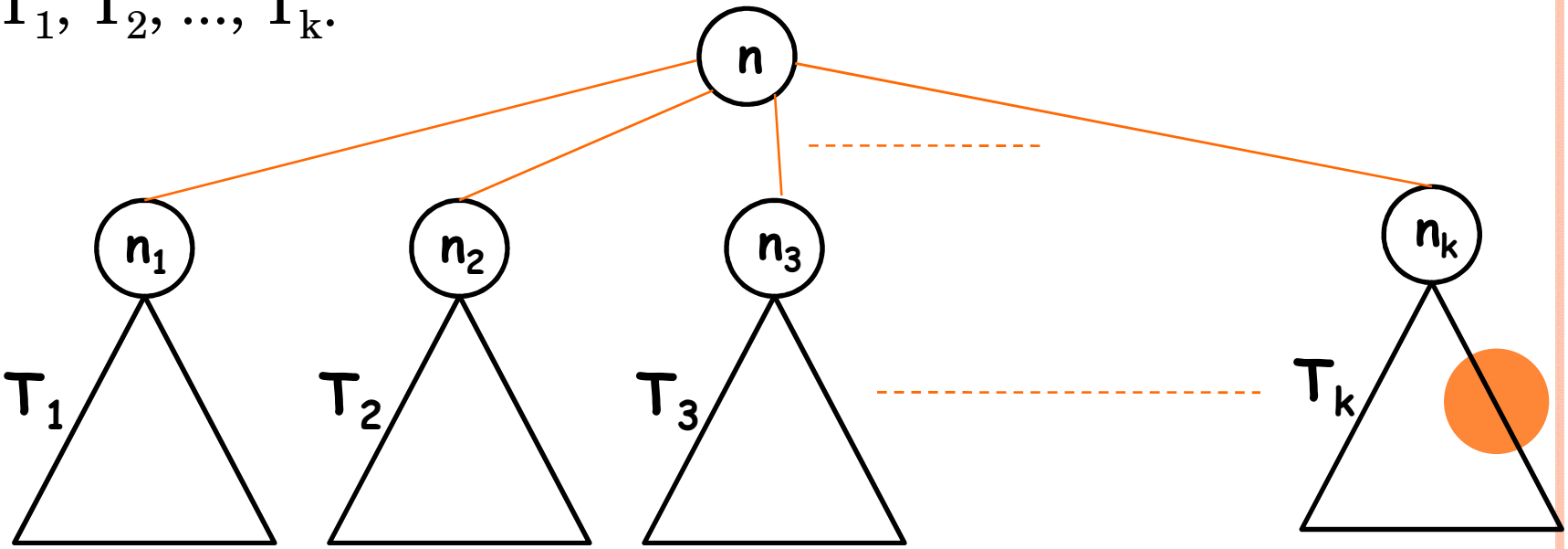
```
void OrdenacaoPorNivel(raiz)
   {
   Fila q;
   node p = raiz;
   if (p != null) {
      enqueue(q,p);
      while (!isEmpty(q)){
         p = first(q);
         dequeue(q);
         escreve(p);
         Para todo f filho de p
              enqueue(q,f);
      }
   }
}
```

Resultado:

A B C D E F G H I J K

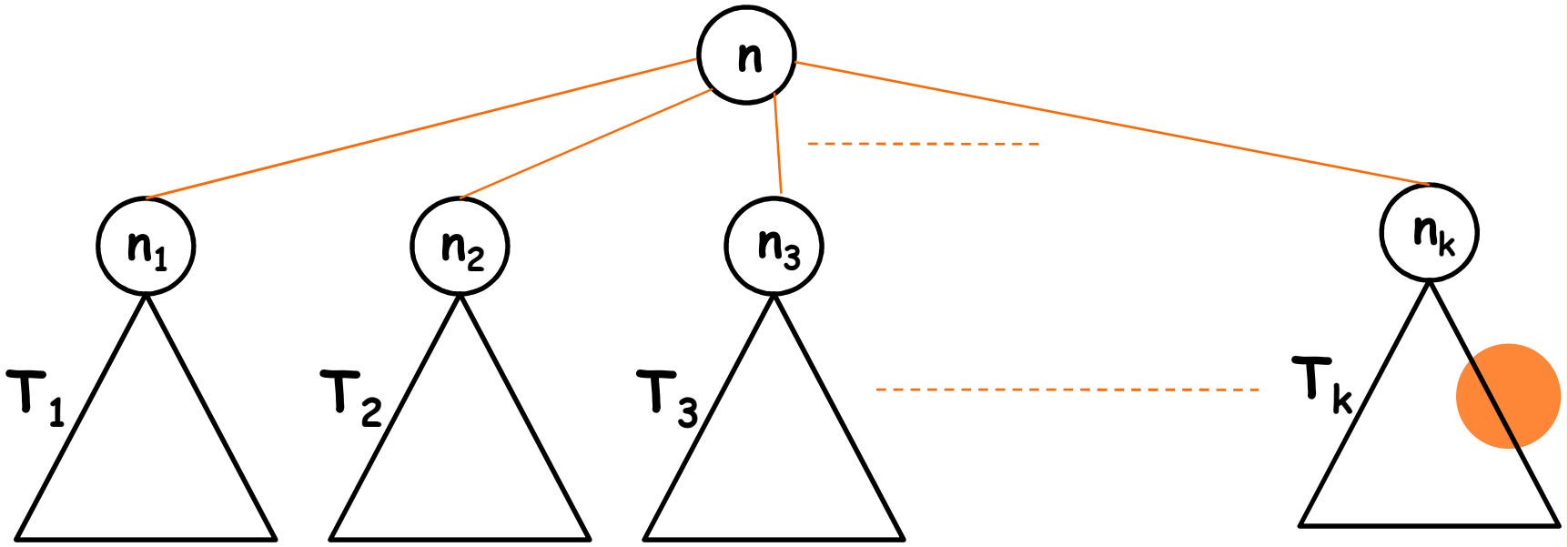
PERCURSOS EM PROFUNDIDADE

- Se T é uma árvore nula, então uma lista vazia será o percurso em pré-ordem, pós-ordem e ordem-central de T.
- Se T consiste em um só nó, esse nó será o percurso em pré-ordem, pós-ordem e ordem-central de A.
- Outros casos: seja T uma árvore de raiz n e sub-árvores $T_1, T_2, \ldots, T_k$.



Percurso em pré-ordem

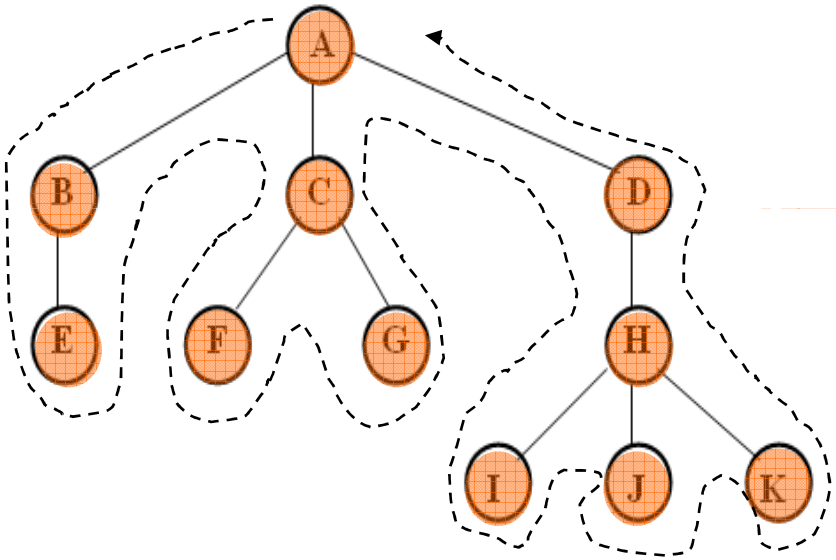
- Passos:
  - Primeiramente, a raiz n de T;
  - Em seguida, os nós de T_1 em pré-ordem;
  - Depois, os nós de T_2 em pré-ordem;
  - Assim por diante, até os nós de T_k em pré-ordem.



PERCURSO EM PRÉ-ORDEM

- Artifício manual: anotar o nó ao passar por ele pela 1ª vez

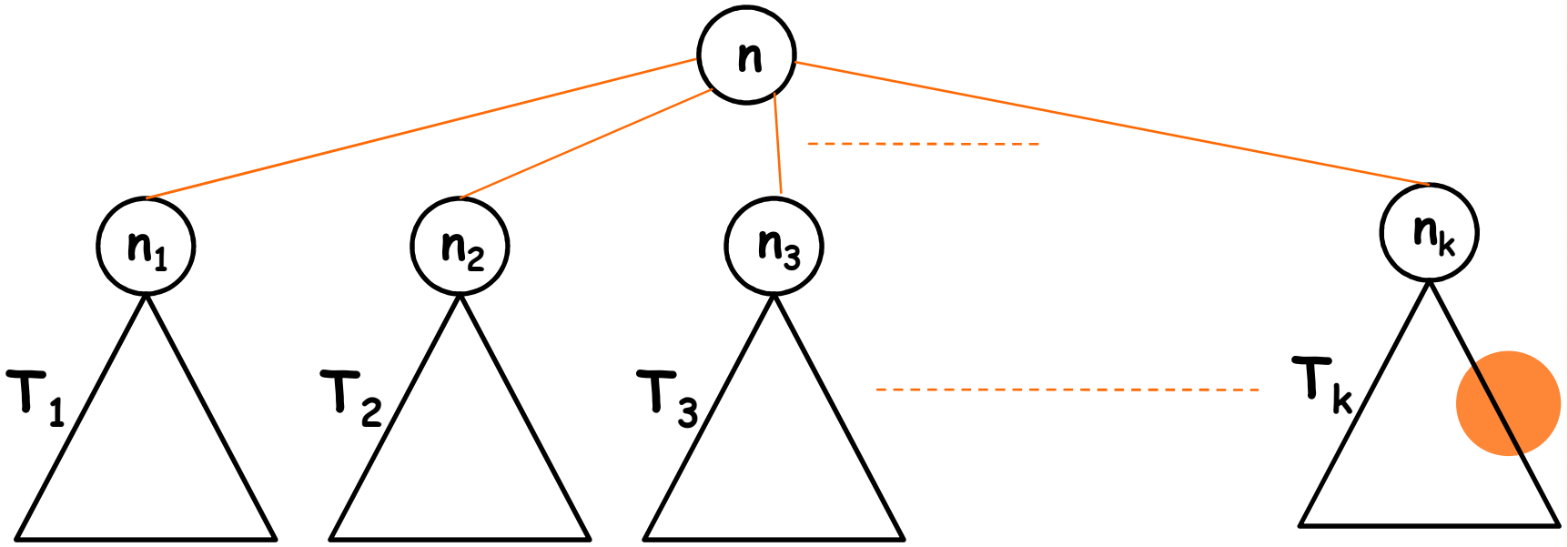
A B E C F G D H I J K




```
void  PreOrdem (node n) {
   Escrever (n);
   for (cada filho f de n, da esquerda para a direita)
        PreOrdem (f);
}
```

Percurso em pós-ordem

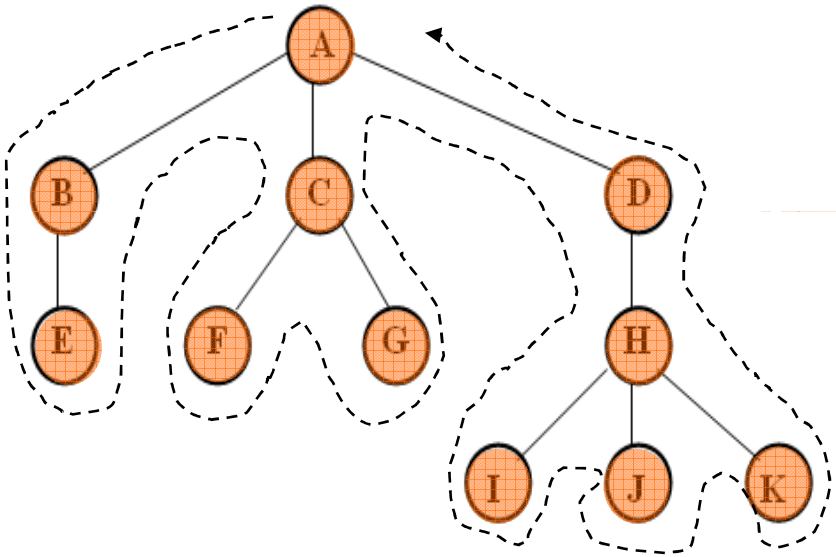
- Passos:
  - Primeiramente, os nós de T1 em pós-ordem;
  - Em seguida, os nós de T_2 em pós-ordem;
  - Assim por diante, até os nós de T_k em pós-ordem;
  - Por fim, a raiz n de T.



PERCURSO EM PÓS-ORDEM

- Artifício manual: anotar o nó ao passar por ele pela última vez, ou seja, ao se dirigir para seu pai.

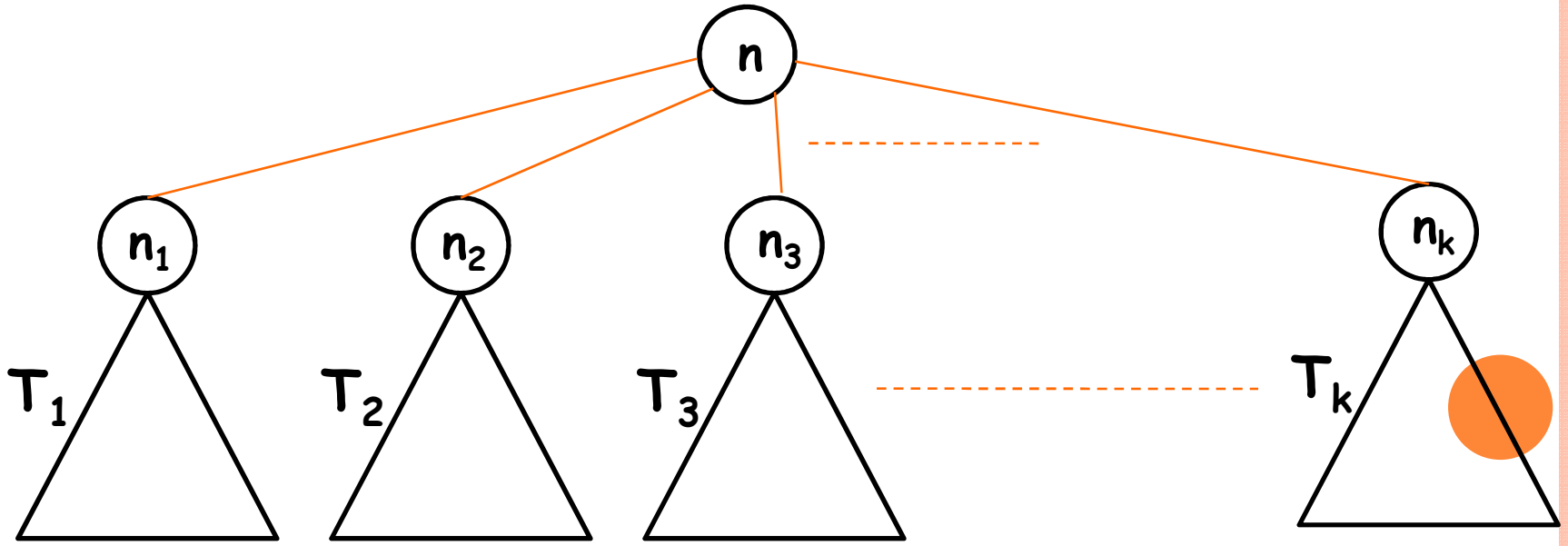
E B F G C I J K H D A



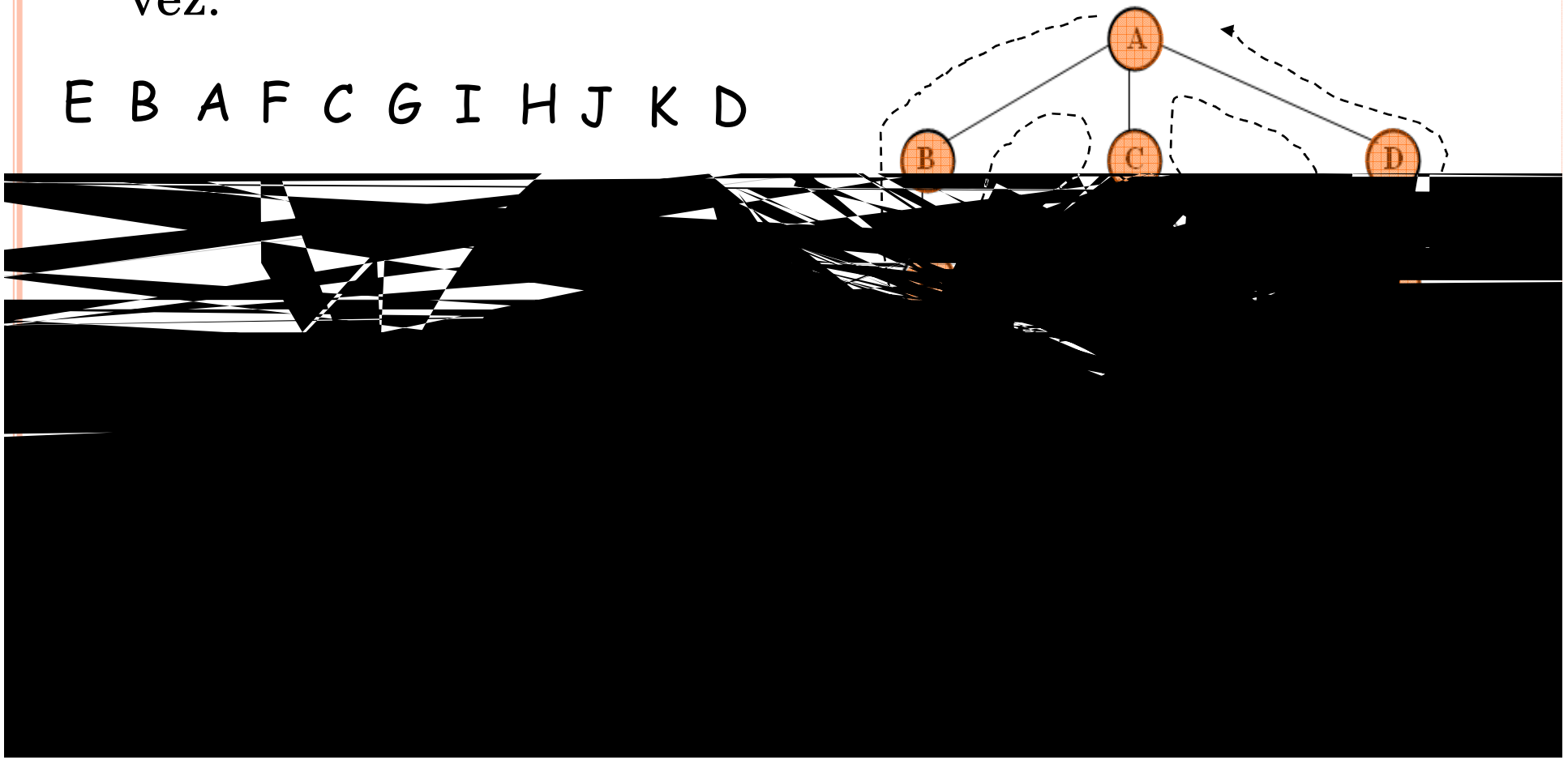

```
void PosOrdem (node n) {
   for (cada filho f de n, da esquerda para a direita)
       PosOrdem (f);
   Escrever (n);
}
```

PERCURSO EM ORDEM-CENTRAL

- Passos:
  - Primeiramente, os nós de T_1 em ordem-central;
  - Em seguida, a raiz n de T;
  - Por fim, os nós de T_2 ,..., T_k em ordem-central.



PERCURSO EM ORDEM-CENTRAL

- Artifício manual: anotar um nó folha ao passar por ele pela 1ª vez e um nó não-terminal ao passar por ele pela 2ª vez.

E B A F C G I H J K D