CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Passeios

Passeio

Um passeio P no grafo G

é uma seqüência finita e não-vazia

$$(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$$

onde $v_i \in VG, \quad i = 0, \ldots, n$

$a_j \in AG, \quad j = 1, \ldots, n$

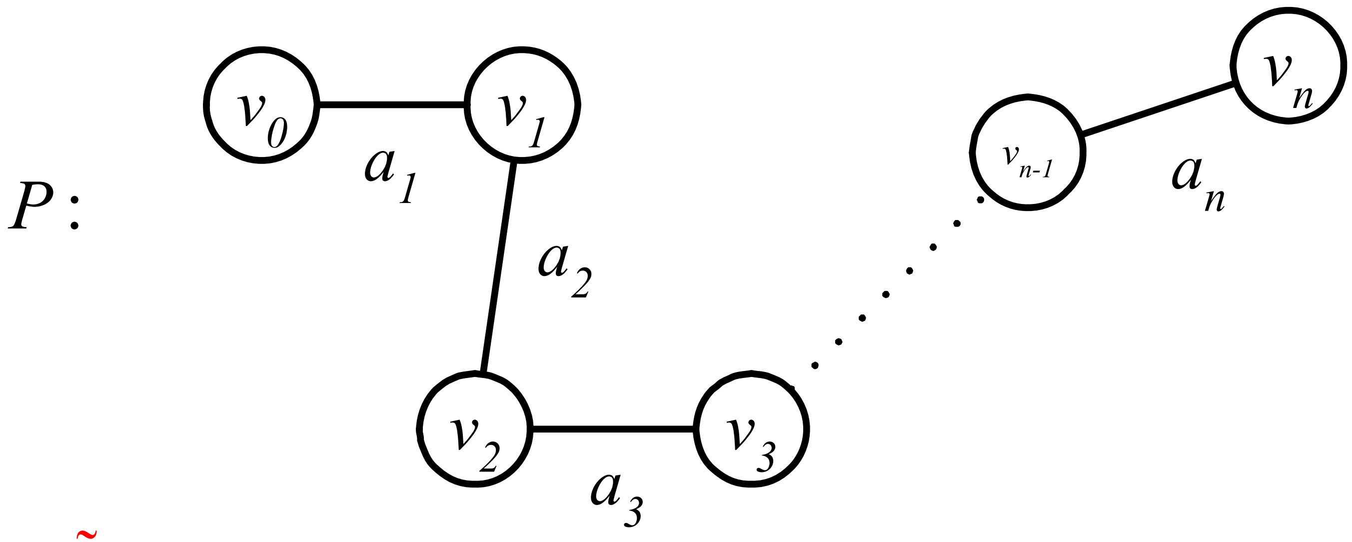
sendo que a_j tem extremos v_{j-1} e v_j, $\quad j = 1, \ldots, n.$

Observações

VP denota o conjunto dos vértices do passeio P.

AP denota o conjunto das arestas de P.

$|P|$ = comprimento do passeio $P = n$.



Observação

Seria suficiente representar somente os vértices do passeio?

Seriam suficientes apenas as arestas?

Notação

Se o grafo é simples,

basta denotar a seqüência de vértices.

$$P' = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Trilha

é um passeio onde não há repetição de arestas.

Caminho

é um passeio onde não há repetição de vértices.

Observação

Se P é caminho, então P é trilha.

Passeio fechado

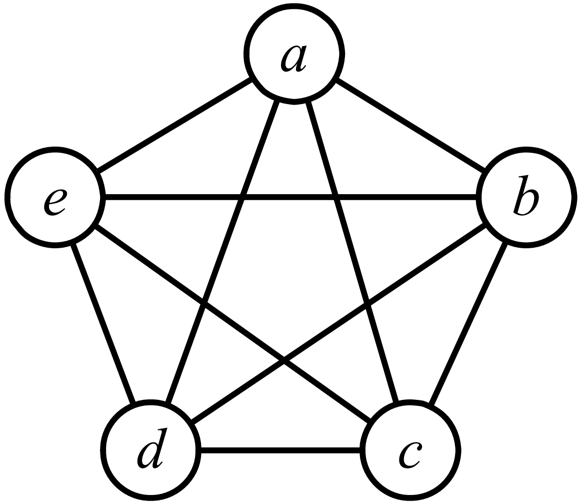
é o passeio que tem comprimento diferente de zero
e tal que o início e o fim coincidem.

Circuito

é uma trilha fechada
cuja origem e vértices internos são todos distintos.

Exemplo

Grafo G:



$abcabdae$	é passeio.
$abcade$	é trilha.
$abcd$	é caminho.
$abcda$	é circuito.
$abcebadea$	é passeio fechado.

Proposição

Sejam $u, v \in VG$.

Se existem um passeio de u a v em G

então existe um caminho de u a v em G.

Demonstração

Seja $P = \quad (u = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n = v)$

o passeio mais curto de u a v em G.

Suponha que P não é um caminho.

Então existem i e k tais que $v_i = v_k$ e $0 \leq i < k \leq n$.

Neste caso $P' = \quad (u = v_0, \ldots, a_i, v_i = v_k, a_{k+1}, \ldots, v_n = v)$

seria um passeio de u a v em G tal que $|P'| < |P|$.

[Contradição]

[CQD]

Seção

Uma seção de um passeio P é uma subseqüência consecutiva de P.

Exemplo: $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$

Uma seção é $S = (v_3, a_4, v_4, a_5, v_5)$.

Passeio reverso

$$P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$$
$$P^{-1} = (v_n, a_n, v_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, v_1, a_1, v_0)$$

Concatenação

Dados passeios $P = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n)$

$Q = (u_0, b_1, u_1, b_2, u_2, \ldots, b_k, u_k)$

se $v_n = u_0$ definimos a concatenação

$$PQ = (v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, \underset{u_0}{\underset{\|}{v_n}}, b_1, u_1, b_2, u_2, \ldots, b_k, u_k).$$

Distância

A distância entre dois vértices u e v

é o comprimento de um caminho de tamanho mínimo de u a v.

Notação

$d_G\,(u, v)$

Convenção

Se não existe caminho de u a v no grafo

então $d_G\,(u, v) = +\infty$

Grafo conexo

Um grafo G é conexo se

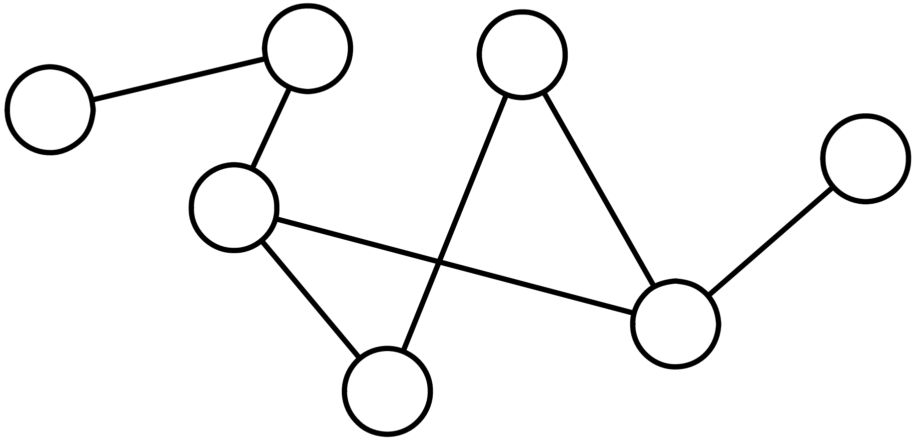
$\forall u, v \in VG,$ existe caminho de u a v em G.

Obs.:

Caso contrário, dizemos que G é desconexo.

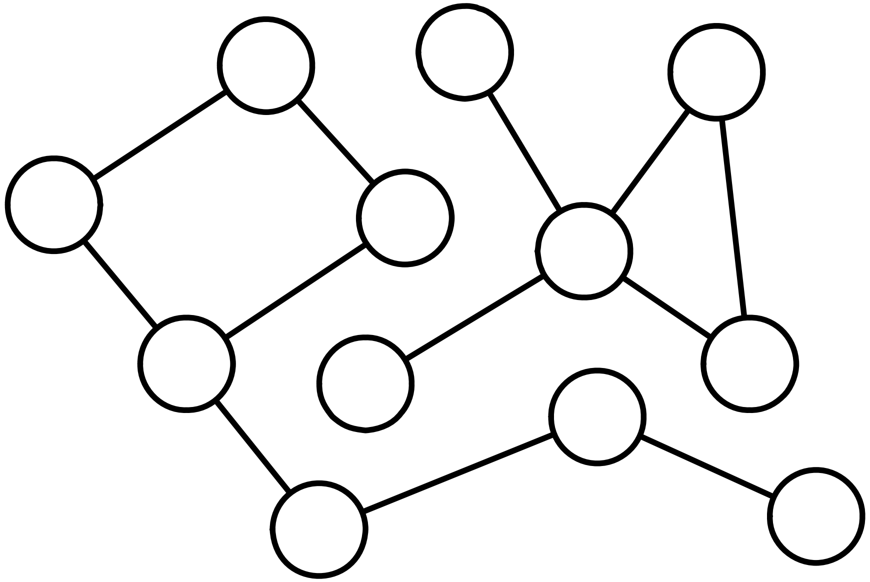
Exemplo

Grafo conexo:



Exemplo

Grafo desconexo:

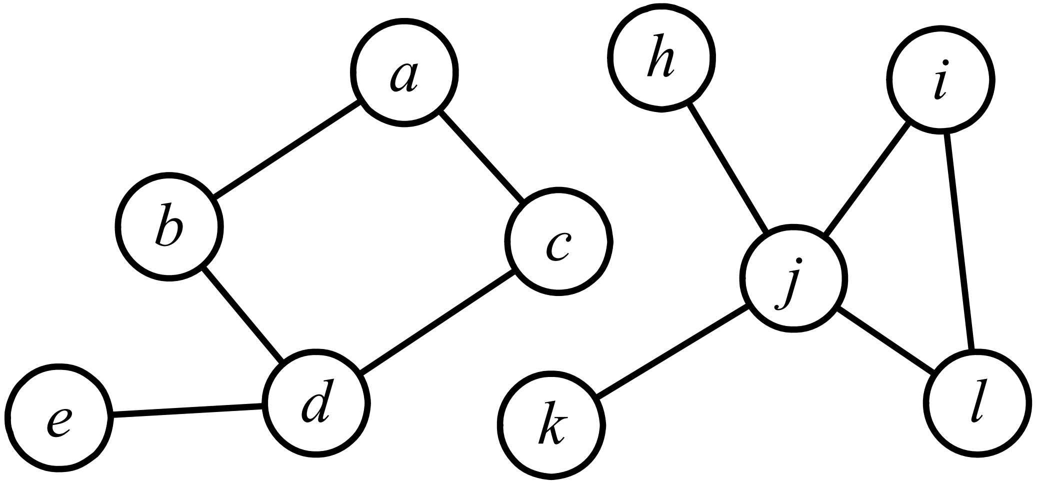


Componente

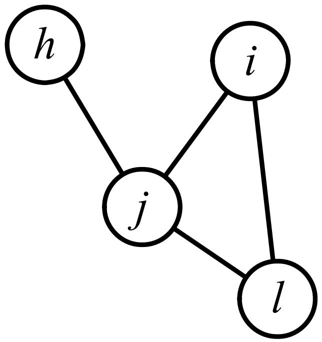
As componentes conexas de um grafo G são os subgrafos conexos maximais de G.

Exemplo

G:

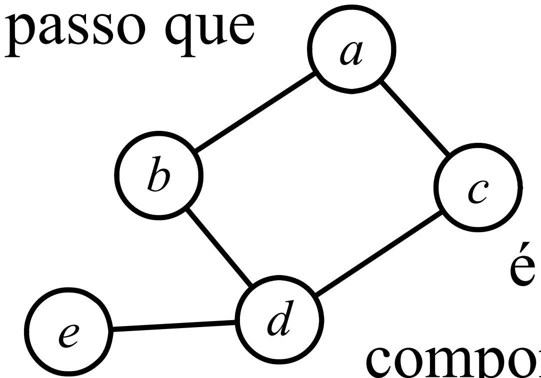


Nesse caso, temos



é subgrafo mas não é componente.

Ao passo que



é uma componente de G.

Proposição

Se G é um grafo tal que $g(u) \geq 2 \;\; \forall u \in VG$

então G contém um circuito.

Demonstração

Se $|VG| = 1$,

trivial: $C = (v, a, v)$.

Se G desconexo,

basta provar para cada componente conexa.

Logo, sem perda de generalidade,

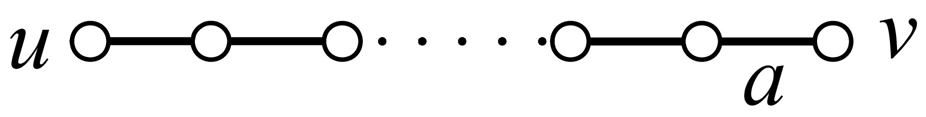
suponhamos que o grafo G é conexo

e que $|VG| \geq 2$.

$(\longrightarrow)$

Seja P um caminho de comprimento máximo em G.

Sejam u o início, v o término e a a última aresta no caminho P.



Por hipótese, $g(v) \geq 2$;

logo, existe outra aresta $b \neq a$ incidente em v.

Seja w o vértice adjacente a v por b.

Vamos analisar duas possibilidades:

(i) $w \notin VP$

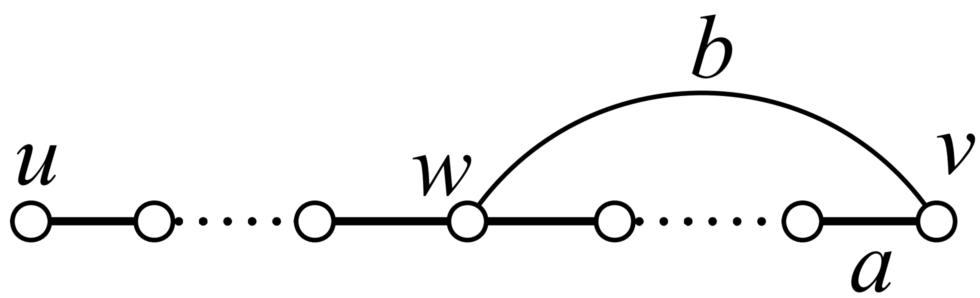
Poderíamos montar um caminho mais longo que P, pois

se b é a aresta de v a w então $|\,P(v,b,w)\,| > |\,P\,|$. [Contradição]

(ii) $w \in VP$

Encontramos

o circuito:



[CQD]

Teorema

G é bipartido se e somente se

G não contém circuitos de tamanho ímpar.

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Fácil.

G tem bipartição (X, Y).

Seja $C = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ um circuito em G.

Suponha, S.P.G., que $u_1 \in X$;

então $u_2 \in Y$;

$u_3 \in X$; ... etc.

Isto é, $u_i \in X$ sse i é ímpar.

Mas C circuito $\Rightarrow u_1 = u_k \Rightarrow u_k \in X \Rightarrow k$ é ímpar

$\Rightarrow |C|$ é par. [CQD]

($\Leftarrow$)

Suponha que G não contém circuitos ímpares.

Basta provar que é bipartido para G conexo.

Seja $w \in VG$.

Montemos os conjuntos $X = \{x \in VG \mid d(w,x) \text{ é par}\}$.

$Y = \{y \in VG \mid d(w,y) \text{ é ímpar}\}$.

Temos necessariamente $w \in X$ pois
caso contrário haveria circuito ímpar.

Vamos provar que (X, Y) é bipartição de G.

Primeira parte:

$VG \subseteq X \cup Y$ pois G conexo e, portanto, todo vértice de G pertence a X ou a Y.

$X \cup Y \subseteq VG$ por definição.

Logo $X \cup Y = VG$ e trivialmente $X \cap Y = \varnothing$.

Segunda parte:

Sejam $u, v \in X$. Vamos provar que u e v não são adjacentes.

Seja P o caminho de w a v tal que $d(w,v) = |P|$.

Seja Q o caminho de w a u tal que $d(w,u) = |Q|$.

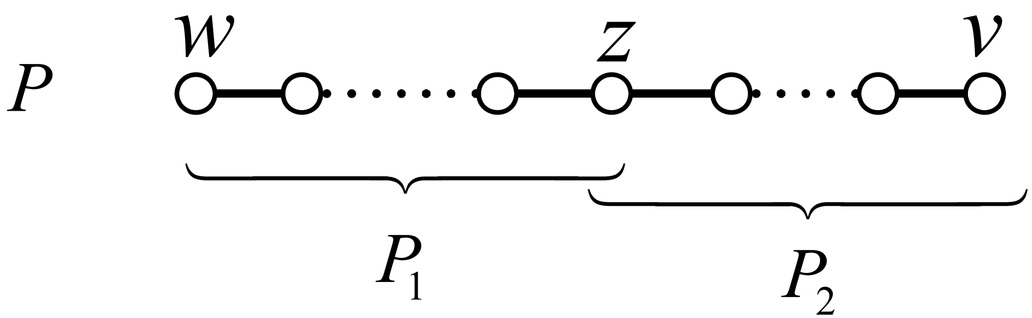
Ambos, $|P|$ e $|Q|$ são pares.

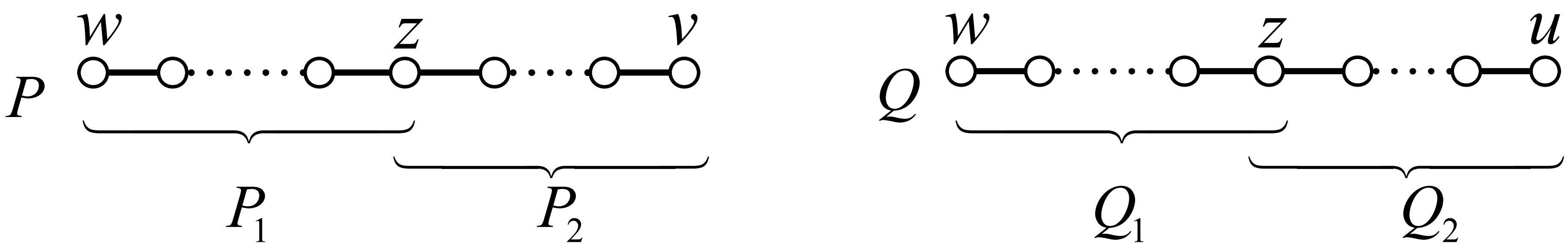
Seja z o último vértice comum a ambos os caminhos P e Q.

(eventualmente $z = w$).

Sejam P_1 e P_2 as seções de P respectivamente de w até z e de z até v.

Sejam Q_1 e Q_2 as seções de Q respectivamente de w até z e de z até u.





Mas P e Q são caminhos mínimos, então $|P_1| = |Q_1|$.

Como $|P|$ e $|Q|$ são pares

e $|P_1|$ e $|Q_1|$ têm mesma paridade, então $|P_2|$ e $|Q_2|$ têm mesma paridade.

Daí vemos que $P_2^{-1}Q_2$ possui comprimento par.

Finalmente, se u e v fossem adjacentes,

teríamos $P_2^{-1}Q_2(u, uv, v)$ seria um circuito ímpar em G.

[Contradição]

De forma análoga,

dados vértices $u', v' \in Y$

prova-se que u' e v' não são adjacentes.

[CQD]