CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Produto direto

Definição: produto direto

Sejam $(G, ^{\circ})$ e $(H, *)$ grupos.

Definimos a operação $\cdot$ em $G \times H$ por

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1{}^{\circ}g_2 , h_1{*}h_2).$$

Então $(G \times H, \cdot)$ é um grupo

e é chamado "produto direto de G e H".

Demonstração

Exercício ☺

Exemplo

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = (Z, +) \\ G_2 = (IR^*, \cdot) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} G_1 \times G_2 = \{(a,b) \mid a \in Z, b \in IR^*\} \\ (a_1,b_1)*(a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 \cdot b_2) \end{array}$$

Vejamos: $(3,4) * (2,2) = (5,8)$

elemento neutro $= (0,1)$.

Generalizando

Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$ grupos

com elementos neutros $e_1, e_2, \ldots, e_k$ respectivamente.

O conjunto $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$ é um grupo

com a operação binária

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) * (b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_kb_k),$$

onde a_ib_i representa a operação no grupo G_i.

O elemento neutro do grupo é $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

Os elementos inversos são

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)^{-1} = (a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_k^{-1}).$$

Exemplo: $Z_2 \times Z_3$

Subentendido: $(Z_2, \oplus) \times (Z_3, \oplus)$

$$Z_2 \times Z_3 = \{(a,b) \mid a \in \{0,1\} \text{ e } b \in \{0,1,2\}\}$$

$$(a_1,b_1) * (a_2,b_2) = ((a_1 + a_2) \bmod 2, (b_1 + b_2) \bmod 3)$$

- Tabelas:

Z_2	0	1
0	0	1
1	1	0

Z_3	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$Z_2 \times Z_3$	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)	(1,0)
(0,2)	(0,2)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,0)	(0,1)	(0,2)	(0,0)
(1,2)	(1,2)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(0,0)	(0,1)

- $Z_2 \times Z_3$ é abeliano?

Sim. Pois $(a,b)*(c,d) = ((a+c) \bmod 2, (b+d) \bmod 3)$

$$= ((c+a) \bmod 2, (d+b) \bmod 3)$$

$$= (c,d)*(a,b)$$

- $Z_2 \times Z_3$ é cíclico?

Procuramos *a* tal que $< a > = Z_2 \times Z_3$

ou seja (x, y) tal que $< (x, y) > = Z_2 \times Z_3$.

Temos $< (x, y) > = \{ e, (x, y), (x, y)^2, (x, y)^3, (x, y)^4, (x, y)^5 \}$.

Como encontrar?

Testar um por um… ☹

$< (0,1) > = \{ (0,1), (0,2), (0,0) \}$

$< (1,1) > = \{ (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2), (0,0) \}$

Resposta: $Z_2 \times Z_3$ é cíclico, gerado por (1,1)

e também por (1,2) e só por eles.

- ordem dos elementos

o ((0,1)) = 3, pois < (0,1) > tem 3 elementos (é subgrupo).

o ((1,1)) = 6, pois < (0,1) > = $Z_2 \times Z_3$ tem 6 elementos.

- inversas:

$(1,1)^{-1} = (1,2)$

Outro exemplo

$(IR, +)$ é grupo.

O que é $IR \times IR$?

$$\{(x, y) \mid x, y \in IR\}$$

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Isso se parece com algo conhecido?

Intuitivamente, o produto direto $IR \times IR$ é semelhante ao grupo dos números complexos para adição,

pois $(a + bi) + (c + di) = (\underbrace{a + c}_{\in IR}) + (\underbrace{b + d}_{\in IR})i$