CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Morfismos

Definição: homomorfismo

Dados G e G' grupos quaisquer.

Um homomorfismo de G em G'

é uma função $\varphi : G \to G'$ tal que

$\forall x, y \in G$ vale $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

Importante

Há duas operações binárias subentendidas na fórmula acima:

uma operação $*$ de G

e outra operação $*'$ de G'.

Exemplo

Grupo $MI_n\ (IR)$

A função determinante é homomorfismo?

Vale $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Mas ainda falta especificar:

homomorfismo de $MI_n\ (IR)$ em qual grupo G' ?

Resposta: sim, determinante é homomorfismo de $MI_n(IR)$ em $(IR^*,\cdot)$

Exemplo

$\varphi : G \to G'$ tal que $\varphi(x) = e'$ para todo $x \in G$

Vale $\varphi(xy) = e' = e' * e' = \varphi(x)\varphi(y)$ para todo $x, y \in G$.

É chamado homomorfismo trivial.

Exemplo

$$(IR,+) \rightarrow (IR_+^*,\cdot)$$
$$x \mapsto e^x$$

é homomorfismo?

$$x+y \mapsto e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

Reparar que as operações binárias de cada grupo são diferentes.

Resposta: sim, é homomorfismo.

Propriedades

Seja $\varphi : G \to G'$ homomorfismo.

As seguintes propriedades valem.

(1) $\varphi(e) = e'$

(2) $\varphi(x^{-1}) = [\varphi(x)]^{-1} \quad \forall x \in G$

(3) $H \leq G \Rightarrow \varphi(H) \leq G'$

(4) $K \leq G' \Rightarrow \varphi^{-1}(K) \leq G$

onde

$\varphi(H) = \{\varphi(h) \mid h \in H\}$ = imagem de H pela φ

$\varphi^{-1}(K) = \{x \in G \mid \varphi(x) \in K\}$ = imagem inversa de K pela φ

Obs.:

Isto é apenas uma notação. Não significa que φ seja inversível.

Demonstração

São ótimos exercícios ☺

Definição

Dados grupos G e G' com elementos neutros e e e'

Seja um homomorfismo $\varphi : G \to G'$.

Definimos $\ker \varphi = \text{núcleo de } \varphi = \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}$

Teorema

φ é injetora $\Leftrightarrow \ker \varphi = \{e\}$

Demonstração

(1) Suponha que φ é injetora.

Sabemos que $\varphi(e) = e'$

mas $e \in \ker \varphi \Rightarrow \{e\} = \ker \varphi$

pois φ é injetora.

(2) Suponha que $\ker\varphi = \{e\}$.
Temos

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \varphi(x)\cdot[\varphi(y)]^{-1} = \varphi(y)\cdot[\varphi(y)]^{-1} \\
&\Rightarrow \varphi(x)\cdot\varphi(y^{-1}) = e' \\
&\Rightarrow \varphi(xy^{-1}) = e' \\
&\Rightarrow xy^{-1} \in \ker\varphi \\
&\Rightarrow xy^{-1} = e \qquad\qquad (\text{ pois } \ker\varphi = \{e\}\ ) \\
&\Rightarrow xy^{-1}y = ey \\
&\Rightarrow xe = y \\
&\Rightarrow x = y
\end{aligned}
$$

Ou seja, $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$

Portanto φ é injetora. [CQD]

Definição: isomorfismo

Seja $\varphi : G \to G'$ homomorfismo

Se φ é injetora e sobrejetora,

então φ é isomorfismo de G em G'.

Exemplo

Existe um isomorfismo entre

Grupo $(Z_4, \oplus)$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Grupo cíclico de ordem 4

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

Definição

Se existe isomorfismo entre dois grupos, dizemos que tais grupos são “isomorfos”.

Exemplo

Já vimos:

$(C, +)$, grupo dos complexos com operação soma

é isomorfo a $(IR, +) \times (IR, +)$

Notação

Símbolo $G \approx G'$

Observação

Isomorfismo é relação de equivalência entre grupos!

Demonstração

(Esboço)

$$\forall G \text{ vale } G \approx G$$

$$\forall G, G' \text{ vale } G \approx G' \Rightarrow G' \approx G$$

$$\forall G, G', G'' \text{ vale } G \approx G' \text{ e } G' \approx G'' \Rightarrow G \approx G''$$