CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Funções

Produto Cartesiano

O produto cartesiano de dois conjuntos não-vazios A e B é

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Obs.:

O produto cartesiano é um conjunto.

Cada elemento desse conjunto é um "par ordenado".

Exemplo:

$$Z \times Z = Z^2 = \{(a,b) \mid a \in Z \text{ e } b \in Z\}$$

é um produto cartesiano de conjuntos infinitos.

Temos: $(2, 7) \neq (7, 2)$

Funções

Definições

O produto cartesiano de vários conjuntos não-vazios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } 1 \le i \le n\}$$

Dado um conjunto A não-vazio, define-se

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ vezes}}$$

Exemplos

$$IR^2,\ IR^3,\ Z^2,\ \ldots$$

Funções

Relação

Uma relação R entre os elementos de dois conjuntos A e B é um subconjunto de $A \times B$.

Uma relação sobre A é um subconjunto de $A \times A$.

Notação

$$aRb \quad \text{se e somente se} \quad (a,b) \in R$$

Funções

Exemplo 1

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1,b), (2,a), (1,c), (3,c)\}$

	a	b	c
1		X	X
2	X		
3			X

então $2 \; R \; a$

$1 \; R \; c$

$1 \; \cancel{R} \; a$

Funções

Exemplo 2

A = conjunto dos alunos do ITA

B = conjunto das disciplinas do ITA

R = relação dos alunos matriculados em disciplinas

Maykon R CTC-20

(Aiziro, CTC-20) $\in R$

(Misael, TG) $\notin R$

Exemplo 3

Relação $\leq$ no conjunto Z.

$3 \leq 5$, $14 \leq 14$, $-21 \leq 55$, $8 \not\leq 2$

Funções

Definição

Uma relação $f \subseteq A \times B$

será uma função de A em B se satisfizer:

$$(\,\mathrm{i}\,)\ \ \forall a \in A \ \ \exists b \in B \ \ \text{tq} \ \ a\ f\ b$$

$$(\mathrm{ii})\ \ \forall a \in A \ \ \forall b_1, b_2 \in B \ \ \begin{cases} \text{se } \ a\ f\ b_1 \ \text{ e } \ a\ f\ b_2 \\ \text{então } \ b_1 = b_2 \end{cases}$$

Notação

$$f : A \longrightarrow B$$

Notação

$f\,(a) = b$ para $a\ f\ b$

Funções

$f : A \rightarrow B$

Vocabulário

A : domínio

B : contra-domínio

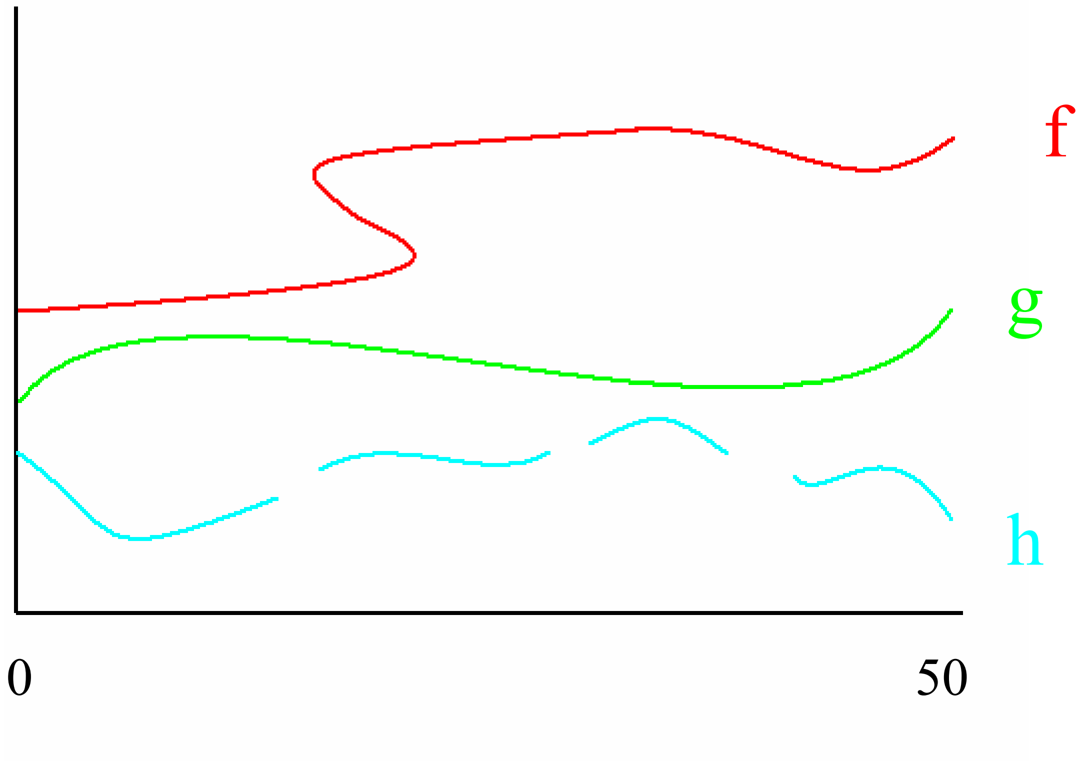
imagem $\neq$ contra-domínio

$$\operatorname{Im} f = \{b : \exists a \text{ tq } f(a) = b\}$$

$$\operatorname{Im} f \subseteq B$$

Funções

Exemplo



$A = [0, 50]$

$B = IR$

Neste caso, f, g, h são funções de A em B?

Funções

Obs.:

No caso de domínio discreto, por exemplo *Z*,

não é adequado usar gráfico "curva" para representar a função.

Entretanto, também podemos representar a função no plano cartesiano.

Outro exemplo

Aquela relação *R* de alunos matriculados em disciplinas

não é função de *A* em *B*, nem de *B* em *A*.

Funções

Definição

Seja uma função $f : A \to B$

f é injetora sse $\forall a_1, a_2 \in A$ se $f(a_1) = f(a_2)$ então $a_1 = a_2$

f é sobrejetora sse $\forall b \in B \quad \exists a \in A$ tq $f(a) = b$

f é bijetora sse f é injetora e sobrejetora

Observações

injetora:	$\|A\| \leq \|B\|$	*one to one*
sobrejetora:	$\|A\| \geq \|B\|$	*onto*
bijetora:	$\|A\| = \|B\|$	*invertible*
função:		*function, mapping, transformation*

Funções

Observação

Sejam A e B conjuntos finitos.

O número de funções de A em B é $|B|^{|A|}$

Notação

B^A = conjunto de todas as funções de A em B.

Curiosidade

$IR^2 = ?$ ☺