CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Árvores

Grafo acíclico

é um grafo que não contém circuitos.

Árvore

é um grafo acíclico conexo.

Floresta

é um grafo acíclico.

Folha

é um vértice de grau 1.

Obs.:

Em “Estruturas de Dados”, as árvores armazenam informações e estudamos algoritmos de busca e inserção.

Aqui, na Teoria dos Grafos, o enfoque será diferente.

Não há necessidade de definir uma “raiz” da árvore.

Trataremos especialmente de problemas de conexidade.

Proposição

Se G é um grafo conexo com pelo menos dois vértices e $|AG| < |VG|$ então G possui um vértice de grau 1.

Demonstração

Exercício.

Proposição

Todo grafo conexo com n vértices possui pelo menos $n - 1$ arestas.

Demonstração

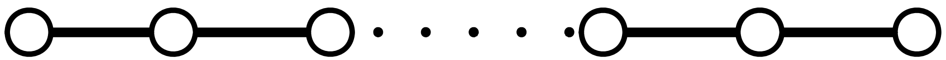
Por indução finita ☺

Observações

- A proposição diz: G conexo $\Rightarrow |AG| \geq |VG| - 1$
- Porém $|AG| \geq |VG| - 1 \not\Rightarrow G$ conexo.
- Para todo n ≥ 1 existe ao menos um grafo conexo

  com $|VG| = n$

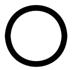
  e $|AG| = n - 1$.

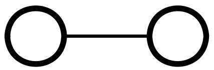


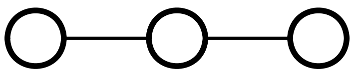
Questão

Quais são TODOS os grafos conexos não-isomorfos

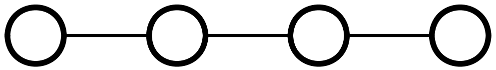
com n vértices e $n - 1$ arestas?

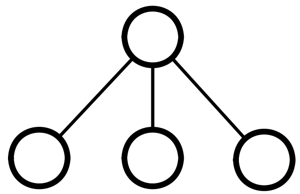
$n = 1$ 

$n = 2$ 

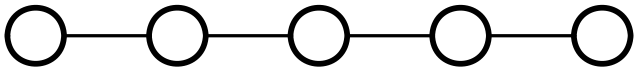
$n = 3$ 

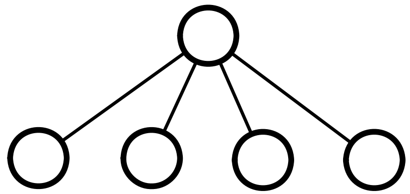
$n = 4$

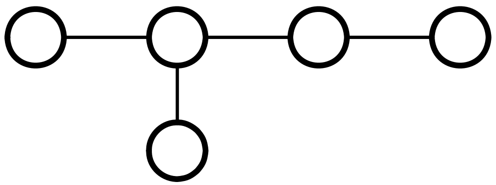




$n = 5$







$n = 6$ Há seis possíveis grafos conexos não-isomorfos.

Observação

Nenhum dos grafos acima contém circuitos.

Teorema

Um grafo conexo G é uma árvore

se e somente se $|AG| = |VG| - 1$.

Demonstração

$(\Leftarrow)$

Se $|AG| = |VG| - 1$ e G é conexo,

quero provar que G não contém circuitos.

Indução em $|VG|$.

<u>Base:</u> $|VG| = 1$.

Trivial.

<u>Hipótese de indução:</u>

Se $|VG| \leq k$, G conexo e $|AG| = |VG| - 1$,

então G acíclico.

Passo da indução:

Seja $k \geq 1$ e

seja G tal que $|VG| = k + 1$

e $|AG| = k$.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Temos } G \text{ conexo} \\ |AG| < |VG|\end{array}\right\} \Rightarrow G \text{ possui alguma folha } u.$$

Tomemos $G' = G - u$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Então } G' \text{ é conexo.} \\ |AG'| = |VG'| - 1 \\ |VG'| \leq k\end{array}\right\} \overset{\text{(H.I.)}}{\Rightarrow} G' \text{ não contém circuitos.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Mas } G' = G - u \\ \text{e } g_G(u) = 1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{então também } G \text{ não contém circuitos.} \\ \text{Por quê? ☺}\end{array}$$

[Provamos $(\Leftarrow)$]

$(\Rightarrow)$

Supor que G é árvore (grafo conexo e sem circuitos).

Quero provar que $|AG| = |VG| - 1$.

Pela proposição, sabemos que

G conexo $\Rightarrow$ $|AG| \geq |VG| - 1$.

Indução em $|AG|$.

<u>Base:</u>

$|AG| = 0$.

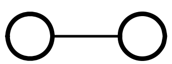
Grafo é trivial: $|VG| = 1$ e vale a propriedade.

$|AG| = 1$.

Como G é conexo, então

G é laço ou G é caminho com uma aresta.

Mas G árvore $\Rightarrow$ G não contém circuito $\Rightarrow$ G não é laço.

Logo G é  e, portanto, $|AG| = |VG| - 1$.

Hipótese de indução:

Se $|AG| \leq k$ e G é árvore

então $|AG| = |VG| - 1$.

Passo da indução:

Seja $k \geq 1$

e seja G tal que $|AG| = k + 1$.

Seja $\alpha = uv$ uma aresta em AG.

Considere o grafo $G' = G - \alpha$.

Suponha que existe um caminho P' de v até u em G'.

então $P'(u,\alpha\, v)$ seria circuito em G (absurdo).

Logo u e v estão em componentes distintas, digamos C_1 e C_2 de G'.

$(\longrightarrow)$

Logo u e v estão em componentes distintas, digamos C_1 e C_2 de G'.

Temos

C_1 e C_2 são conexos (pois são componentes).

C_1 e C_2 não contêm circuitos (pois G não contém).

Assim, pela Hipótese de Indução,

$$|AC_1| = |VC_1| - 1 \text{ e}$$

$$|AC_2| = |VC_2| - 1.$$

Logo

$$\begin{aligned} |AC_1| + |AC_2| &= |VC_1| + |VC_2| - 2 \\ |AG - \alpha| &= |VG| - 2 \\ |AG| - 1 &= |VG| - 2 \\ |AG| &= |VG| - 1. \end{aligned}$$

[CQD]

Corolário

Toda árvore não-trivial tem pelo menos duas folhas.

Demonstração

Supor que seja falso.

Então existem $|VG| - 1$ vértices v tais que $g(v) \geq 2$.

Então $\sum_{v \in VG} g(v) \geq 2(|VG|-1)+1$

Por outro lado, $\sum_{v \in VG} g(v) = 2|AG| = 2(|VG|-1)$

(↑ Usar o Teorema)

[Contradição]

[CQD]

Teorema

As seguintes afirmações são equivalentes para um grafo G.

(i) G é uma árvore.

(ii) G não tem laços e
entre quaisquer dois vértices de G existe um único caminho.

(iii) G é acíclico e
para $\alpha \notin AG$, $G + \alpha$ contém exatamente um circuito.

(iv) G é conexo e
se $\alpha \in AG$ então $G - \alpha$ é desconexo.

Observações

Em outras palavras, o teorema diz que

se G é árvore, então
- G é acíclico maximal;
- G é conexo minimal;
- todas as arestas são de corte.

Demonstração do Teorema

☺

No total temos 12 condições “se e somente se”

mas basta demonstrar quatro “direções”.

Por exemplo:

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$$

Árvore Geradora

é um subgrafo gerador que é uma árvore.

Obs.:

Spanning Tree

Corolário

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Demonstração

Seja G um grafo conexo.

Seja H um subgrafo gerador de G tal que H é conexo minimal.

Então para qualquer aresta $a \in AH$ temos $H - a$ desconexo.

Pelo teorema anterior, H é uma árvore.

[CQD]

Teorema

Seja G conexo, com $|VG| \geq 2$

então existem $x, y \in VG$ com $x \neq y$ tais que

$G - x - y$ é conexo.

Demonstração

[Primeiro modo]

Seja $P = x_0 x_1 x_2 \ldots x_m$ um caminho de comprimento máximo em G.

Afirmo que $G - x_0 - x_m$ é conexo.

Se $m = 1$, então $G = K_2$. Trivial: $G - x_0 - x_1 = \varnothing$

Se $m \geq 2$, suponha que a afirmação seja falsa.

Em $G - x_0 - x_m$,

seja C_1 a componente contendo $x_1, \ldots, x_{m-1}$;

seja C_2 uma outra componente qualquer.

(→)

Em $G - x_0 - x_m$

Seja C_1 a componente contendo x_1 ... x_{m-1}.

Seja C_2 uma outra componente qualquer.

Em G

existe um caminho de um vértice $v \in C_2$ até $x_1 \in C_1$

e esse caminho passa por x_0 ou por x_m.

Assim, P não é o caminho mais longo possível.

[Contradição]

[CQD]

Demonstração

[Segundo modo]

Pode usar o seguinte teorema.

Teorema

Seja um grafo G conexo.

Suponha $1 \leq k \leq |VG|$

então existe um subgrafo conexo H de G tal que $|H| = k$.

Demonstração

Escolher $T \subseteq G$ tal que T é uma árvore geradora.

Se tirarmos uma folha, o que sobra

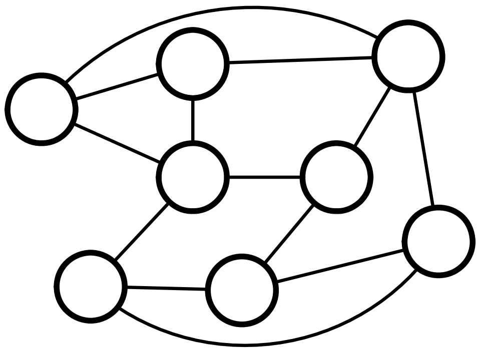
continua conexo e continua sendo árvore.

Basta tirar sucessivamente folhas...

até obter um subgrafo com k vértices. [CQD]

Exemplo

$|VG| = 8$



$k = 5$