CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Grafos hamiltonianos

Circuito hamiltoniano

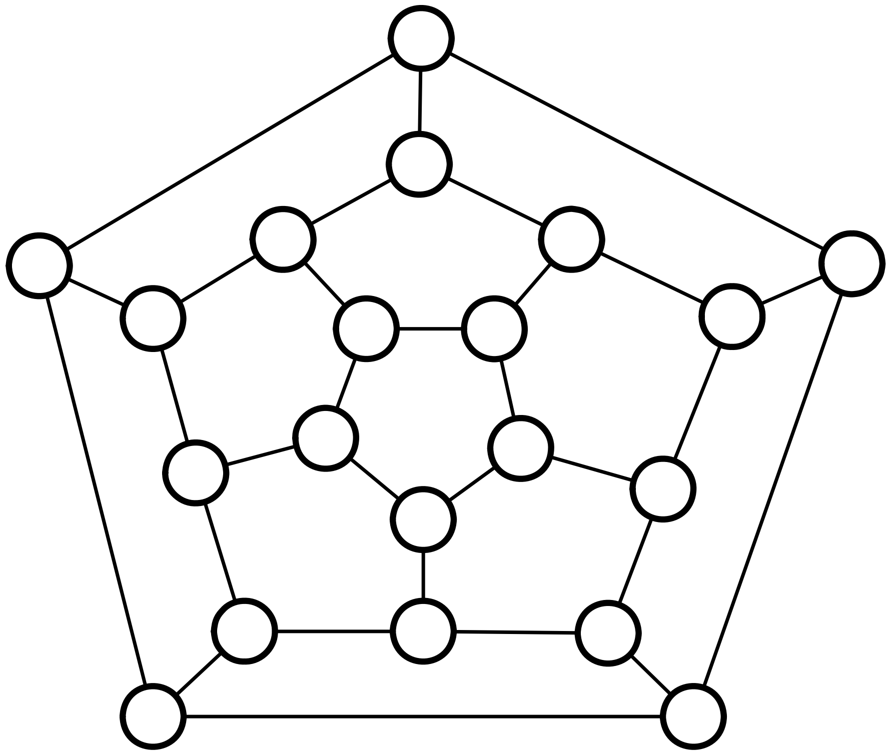
Um circuito hamiltoniano em um grafo G é um circuito contendo todos os vértices de G.

Grafo hamiltoniano

É um grafo que contém um circuito hamiltoniano.

Jogo

Hamilton, 1859:



Variação do jogo

Encontrar todos os possíveis circuitos hamiltonianos em um grafo.

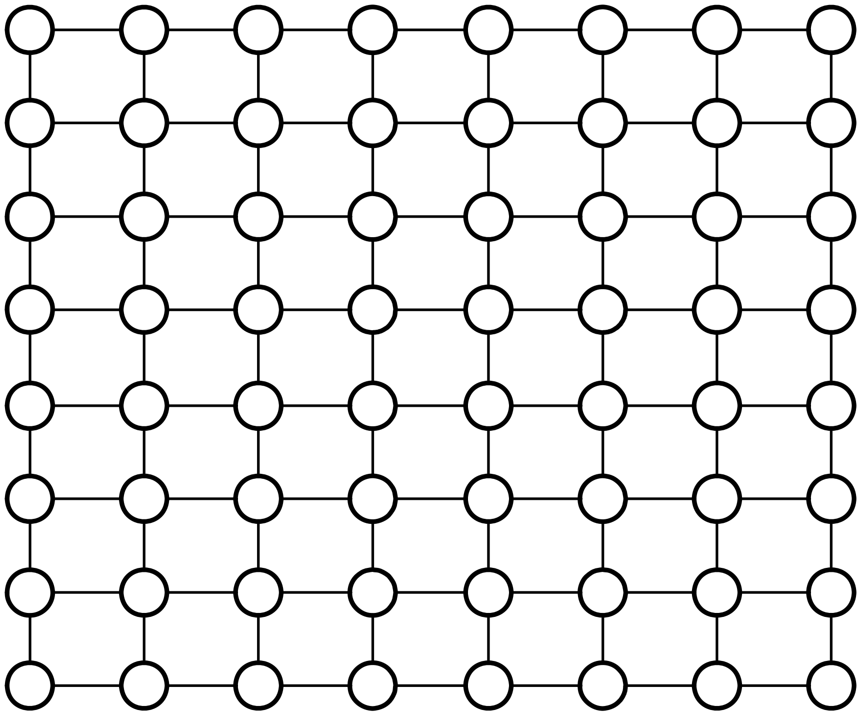
Outra variação

Encontrar todos os possíveis caminhos passando por todos os vértices, sendo que os n vértices iniciais já são pré-estabelecidos.

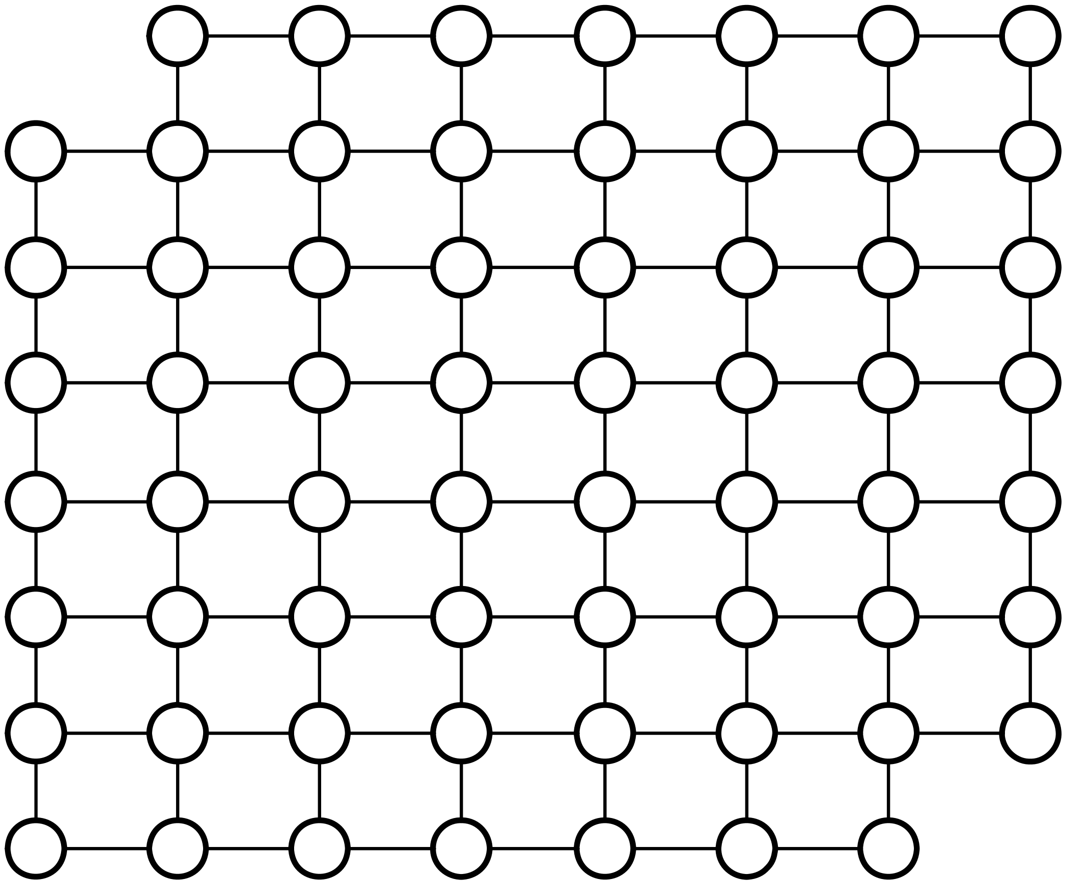
Exemplo

Tabuleiro

8×8



Outro exemplo



Teorema

Se um grafo G é hamiltoniano
e S é um subconjunto não-vazio de vértices $(\varnothing \neq S \subseteq VG)$
então $c\,(G - S) \leq |S|$.

Demonstração

Seja H um circuito hamiltoniano em G.
Sejam $C_1, \dots, C_n$ as componentes de $G - S$.
Para cada i, $1 \leq i \leq n$, escolhemos um vértice $v_i \in C_i$.
Seja s_i o primeiro vértice em S visitado por H após v_i.
Note que os s_i são distintos,
pois circuito não repete vértice
e, portanto, $n \leq |S|$. [CQD]

Teorema

Seja G um grafo simples com $n = |VG| \geq 3$.

Suponha que

$x, y \in VG$ são dois vértices distintos;

$xy \notin AG$;

$g(x) + g(y) \geq n$.

Então G é hamiltoniano se e somente se $G + xy$ é hamiltoniano.

Demonstração

$(\Rightarrow)$

Trivial.

$(\Leftarrow)$

Seja C um circuito hamiltoniano de $G + xy$.

Podemos assumir que $xy \in AC$. $(\rightarrow)$

Seja então $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ o caminho $C - xy$ em G.

Suponha que x seja adjacente aos vértices $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_a}$ onde $a = g(x)$.

Considere os vértices $x_{i_1 - 1}, x_{i_2 - 1}, \ldots, x_{i_a - 1}$.

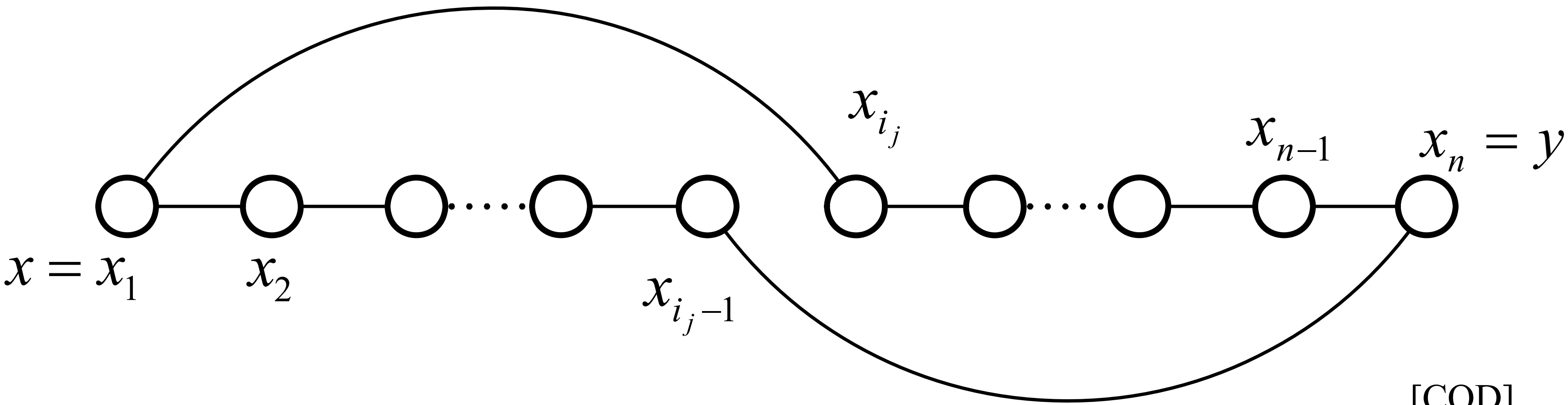
Afirmação: $\exists\, j,\ 1 \leq j \leq a$ tal que $x_{i_j - 1}$ é adjacente a y.

Prova: princípio da casa do pombo: $g(x) + g(y) \geq n$

$xy \notin AG.$

Considere então o circuito hamiltoniano

$$x = x_1, x_2, \ldots, x_{i_j - 1}, y = x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{i_j}, x$$



[CQD]

Teorema de Ore

Seja G um grafo simples com $n = |VG| \geq 3$.

Suponha que para quaisquer vértices distintos x e y vale

$$xy \notin AG \quad \Rightarrow \quad g(x) + g(y) \geq n.$$

Então G é hamiltoniano.

Demonstração

Sejam x e y dois vértices não-adjacentes.

Por hipótese, $g(x) + g(y) \geq n$ e, pelo teorema anterior,

G hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $G_1 = G + xy$ é hamiltoniano.

Note que, em G_1, se u e v são vértices não-adjacentes

então $g_{G_1}(u) + g_{G_1}(v) \geq n.$

Portanto G_1 hamiltoniano $\Leftrightarrow$ $G_2 = G_1 + uv$ hamiltoniano.

Prosseguindo dessa forma, obtemos G hamilt. $\Leftrightarrow$ K_n hamilt.

Logo, G é hamiltoniano. [CQD]

Notação

$$\delta(G) = \min\{g(x) \mid x \in VG\}$$

$= $ menor grau $g(x)$ em G simples.

Teorema de Dirac

G simples com $n = |VG| \geq 3$.

Se $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$

então G é hamiltoniano.

Problema do Caixeiro Viajante

(Traveling Salesman Problem)

Um caixeiro viajante deseja visitar várias cidades
e ao final retornar ao ponto de partida,
de modo que cada cidade seja visitada uma única vez
e a distância total percorrida seja a menor possível.

Na linguagem dos grafos

Dado um grafo com pesos nas arestas,
encontrar um circuito hamiltoniano de custo mínimo.

Aplicações

rotas de transporte, desenhos em plotter, roteamento na internet,
caminhos percorridos por braço mecânico: placa, peça de avião,
etc.

No computador

$|VG| = n$. Matriz $n \times n$ com os custos.

Algoritmo "força bruta": testar todas as possibilidades.

Tempo de resolução?

Supor computador que testa 1 milhão de possibilidades por segundo.

n	**Nº de possibilidades**	**tempo**
10	$9! = 362880$	0,36 segundos
20	$19! \approx 1{,}22 \cdot 10^{17}$	4000 anos

É um problema classificado como *NP*-completo.

Não se conhece algoritmo exato que seja melhor que o força bruta.

Algoritmos aproximados

Heurísticas executáveis em tempo razoável.

Estratégias aplicáveis a casos particulares.

Teoria: demonstrar que estão a certa porcentagem da solução ótima.