CTC – 20

Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Subgrupos

Definição: fechamento

$$\left.\begin{array}{l}(G,*)\ \text{grupo}\\ S \subseteq G\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}S\ \text{é estável ou fechado se}\\ \forall a,b \in S \ \ \text{vale}\ \ a*b \in S\end{array}$$

Exemplos

Grupo (Z, +)

Subconjunto P = inteiros pares. Estável

Subconjunto I = inteiros ímpares. Não é estável.

Definição: subgrupo

(S, *) é subgrupo de (G, *)

se S for subconjunto estável de G e,

com a operação induzida, o próprio S é um grupo.

Obs.

Operação induzida: restrição de * aos elementos de S.

Exemplo 1

(Z, +) é subgrupo de (Q, +), que é subgrupo de (IR, +), que é subgrupo de (C, +)

Notação

$H \leq G$

H é subgrupo de G

Observação

Todo grupo G possui 2 subgrupos triviais

$H_1 = \{ e \}$

$H_2 = G$

Definição

Se $\{ e \} < H < G$

H chama-se subgrupo próprio de G.

Exemplo 2

$(Q^*, \cdot) < (IR^*, \cdot) < (C^*, \cdot)$

Exemplo 3

Grupo MI_n das matrizes $n \times n$ inversíveis

H : subgrupo das matrizes A tais que det $(A) = 1$.

Exemplo 4

Grupos de ordem 4

$$
\begin{tikzcd}
\text{(cíclico)} \arrow[d, dash] \\
\{e,b\} \arrow[d, dash] \\
\{e\}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \text{(Klein)} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{e,a\} \arrow[dr, dash] & \{e,b\} \arrow[d, dash] & \{e,c\} \arrow[dl, dash] \\
 & \{e\} &
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Um subconjunto H de um grupo G

é subgrupo de G se e somente se

(1) H é fechado com a “mesma” operação de G

(2) $e \in H$

(3) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$