CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Recordação − Conjuntos

Considere as seguintes descrições.

A = { 5, 7, 12 }

B = { {4}, {31}, {7} }

C = { 1, 2, 3, {1}, {2}, {3} }

D = {0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, ...}

E = conjunto das soluções reais da equação $x^2 + 1 = 0$

F = conjunto das pessoas aprovadas no vestibular do ITA em 1955.

G = conjunto das pessoas que serão aprovadas no vestibular do ITA em 2055.

Recordação – Conjuntos

Perguntas:

$4 \in B$? Não

$4 \subset B$? Não

$\{4\} \subset B$? Não

$\{4\} \in B$? Sim

$\{\{4\}\} \subset B$? Sim

$1 \in D$? Não

$0.999... = 1$? Sim

E está bem definido? Sim.

F está bem definido? Sim. Por quê ??

G está bem definido? Não.

Recordação − Conjuntos

Teoria dos conjuntos − dois enfoques possíveis:

– Axiomático: longo, rigoroso, fundamentos...
– Intuitivo. (Utilizaremos este enfoque.)

Definição

Um conjunto é uma coleção de objetos.

A natureza desses objetos é imaterial.

A característica essencial de um conjunto é esta:

“Dados um elemento e um conjunto,

então uma e somente uma das seguintes afirmações é verdadeira:

a) o dado elemento **é** um membro desse conjunto;

b) o dado elemento **não é** membro desse conjunto.

Recordação – Conjuntos

Exemplo

H = conjunto dos países da Europa.

Está bem definido?

Mas em 1985 eram países diferentes de 2008.

Antes: {Portugal, França, União Soviética, Iugoslávia, ...}

Agora: {Portugal, França, Rússia, Letônia, Croácia, Bósnia, ...}

Exemplo

I = conjunto dos 3 alunos que mais tempo estudaram para CES-20 em 2008.

Está bem definido?

Recordação − Conjuntos

Convenção

Nomes de conjuntos: *A*, *B*, *C*, ...

Nomes de elementos: *a*, *b*, *c*, ..., *x*, *y*, ...

Notação

$x \in A$: x é um elemento de A.

$x \notin A$: x não é um elemento de A.

Recordação − Conjuntos

Como descrever um conjunto

- Listando seus elementos:

  $A = \{ 3, 8, 9, 247, 22, -4, 13 \};$

  $B = \{ 0, 2, 4, 6, 8, ... \}.$

- Especificando pelas propriedades:

  C = conjunto dos países da América do Norte;

  P = conjunto dos números positivos primos.

Observação

Um conjunto é uma *coleção* de objetos.

Portanto a ordem da "listagem" não importa.

C_1 : { Canadá, EUA, México }

C_2 : { México, Canadá, EUA }

Então $C_1 = C_2$.

Recordação − Conjuntos

Tamanho ou cardinalidade

$| A | = \# A =$ quantidade de elementos que pertencem ao conjunto A.

Exemplos

$$\# C = 3$$

$$\# A = 7$$

$$\# \{x \in R / x^2 + 1 = 0\} = 0$$

$$\# R = \infty$$

$$\# Z = \infty$$

Recordação − Conjuntos

Outro exemplo

Seja P o conjunto de todos os números primos positivos.

$\# P = ?$

Curiosidade

Como demonstrar que existem infinitos números primos?

Importante

Se não soubéssemos responder se P é infinito,

o conjunto estaria bem definido?

Sim!

Pois basta que, dado x, saibamos responder se x pertence a P.

Recordação − Conjuntos

Notação

$A = B$	igualdade
$A \subseteq B$	A é subconjunto de B
$A \subset B$	A é subconjunto próprio de B isto é, $A \subseteq B$ e $A \neq B$
$\emptyset$	conjunto vazio

Negações: $A \neq B$

$A \not\subseteq B$

$A \not\subset B$

Recordação − Conjuntos

Propriedades

- $\forall A,\quad A \subseteq A$ (Reflexiva)
- $\forall A, B, C,\quad$ se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$ (Transitiva)
- $\forall A, B,\quad A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A\quad$ para todo conjunto A

Conjunto Potência

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

é o conjunto de todos os subconjuntos de A

- *power set*
- conjunto das partes de A

Recordação − Conjuntos

Exemplo

$A = \{a, b, c\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Teorema

Para todo inteiro não-negativo n,

se um conjunto A tiver n elementos

então o conjunto $\mathcal{P}(A)$ terá 2^n elementos.

Demonstração

Idéia simples. Exercício de “redação” ☺

Obs.

Reparem que o enunciado é cuidadoso

pois refere-se a um conjunto A finito.

Recordação − Conjuntos

Mais recordação

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são disjuntos

Distributividades:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Recordação − Conjuntos

Mais recordação

Complemento: X = conjunto universo

$$A \subseteq X$$

$$\overline{A} = \{x \mid x \in X \wedge x \notin A\}$$

De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$