CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Álgebra

Definição

Uma operação binária em um conjunto A é uma função $b : A \times A \to A$.

Definição

Uma operação n-ária ($n \geq 1$) em um conjunto A é uma função de A^n em A.

Exemplo 1

A soma, no conjunto dos naturais.

$$2 + 2 = 4 \qquad (2,2) \mapsto 4$$

$$3 + 5 = 8 \qquad \underbrace{(3,5) \mapsto 8}_{\text{operação } + \,:\, IN \times IN \to IN}$$

Exemplo 2

A subtração

$8 - 5 = 3$

$8 - 10 = ?$ mas $-2 \notin I\!N$

A subtração é operação binária?

em $I\!N$? Não.

em Z? Sim.

Exemplo 3

União e intersecção de conjuntos: são operações binárias?

Resposta: dado um conjunto A, podemos dizer que

$\cup$ e $\cap$ são operações binárias em $\mathcal{P}(A)$.

Função composta

$f(x)$

$g(x)$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

Propriedade associativa

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Propriedade sempre é válida.

Exemplo

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = 3x$$

$$h(x) = x^2$$

Temos

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) \\ &= h(g(x+1)) \\ &= h(3(x+1)) \\ &= [3(x+1)]^2 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= [h(g(x))] \circ f(x) \\ &= [h(3x)] \circ f(x) \\ &= (3x)^2 \circ (x+1) \\ &= [3(x+1)]^2 \end{aligned}$$

Propriedade comutativa

$$(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$$ NÃO é válida.

Contra-exemplo

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = 3x$$

Temos

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+1) \\ &= 3(x+1) \\ &= 3x+3\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x) \\ &= (3x)+1 \\ &= 3x+1\end{aligned}$$

Conclusão

$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$ neste caso.

Definição

Uma relação de equivalência em um conjunto A

é uma relação $\sim$ tal que

se x, y, z são elementos de A então

(1) $x \sim x$ (reflexiva)

(2) se $x \sim y$ então $y \sim x$ (simétrica)

(3) se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $x \sim z$ (transitiva)

Exemplo 1

Igualdade entre inteiros

(1) $\forall x \in Z, \quad x = x$

(2) $\forall x, y \in Z, \quad x = y \Rightarrow y = x$

(3) $\forall x, y, z \in Z, \quad x = y \text{ e } y = z \Rightarrow x = z$

Exemplo 2

Semelhança de triângulos.

Seja T o conjunto de todos os triângulos

e seja $S \subset T \times T$ o subconjunto formado por todos os

pares ordenados (x, y) tais que x é semelhante a y.

S é relação de equivalência?

Sim.

Notação

Para equivalência: $\sim , \equiv , \mathcal{E}$

Exemplo 3

Conjunto Z. Relação $x \sim y$ sse $x - y$ é divisível por 3.

É relação de equivalência?

(i) $x - x = 0$, divisível por 3. Logo, $x \sim x$. **Reflexiva OK.**

(ii) $x \sim y \Rightarrow x - y = a$, para algum a divisível por 3.

$\Rightarrow y - x = -a$ é divisível por 3 $\Rightarrow y \sim x$ **Simétrica OK.**

(iii) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow \begin{cases} x - y = b, \text{ para algum } b \text{ divisível por } 3 \\ y - z = c, \text{ para algum } c \text{ divisível por } 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow x - z = x - y + y - z = (x - y) + (y - z)$$
$$= b + c \quad \text{é divisível por 3.}$$

(pois b e c são divisíveis por 3)

Logo $x \sim z$.

Transitiva OK.

Notação

$a \mid b$ significa "a divide b", ou "b é divisível por a".

Definição formal

Sejam a e b inteiros.

Dizemos que $a \mid b$ se existe algum inteiro x tal que $ax = b$.

Observação

Uma definição alternativa seria: $a \mid b$ se $\frac{b}{a}$ for inteiro.

Mas esta definição não é equivalente à anterior.

Definição

Uma partição um conjunto A, $A \neq \emptyset$,

é uma coleção $\boldsymbol{P} = \{ P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \}$ de subconjuntos de A tais que

(i) $P_i \neq \emptyset \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

(ii) $P_i \cap P_j = \emptyset \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$ com $i \neq j$

(iii) $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = A$

Exemplo

$A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$

$P = \{ \{ a, f \}, \{ b, d, e, g \}, \{ c \} \}$ é uma partição de A.

Questão

É possível relacionar "relação de equivalência" e "partição" ?

a) Dada uma relação ~, obter uma partição ?

b) Dada partição *P*, obter alguma relação de equivalência ?

Teorema

Conjunto *A*

Partição $\boldsymbol{P} = \{ P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \}$ de A

A relação $x \sim y$ sse $\exists P_i \in P$ tq $x \in P_i$ e $y \in P_i$

é uma relação de equivalência.

Demonstração

Provar (i), (ii) e (iii).

(i) Trivial.

(ii) $x \sim y \Rightarrow \exists P_i \text{ tq } x \in P_i \text{ e } y \in P_i$

$\Rightarrow \exists P_i \text{ tq } y \in P_i \text{ e } x \in P_i \Rightarrow y \sim x$

(iii) $x \sim y \text{ e } y \sim z$

$\Rightarrow (\exists P_j \text{ tq } x \in P_j \text{ e } y \in P_j) \text{ e } (\exists P_k \text{ tq } y \in P_k \text{ e } z \in P_k)$

mas ***P*** é uma partição; então $\begin{cases} \text{ou (a) } j = k \\ \text{ou (b) } j \neq k \text{ e } P_j \cap P_k = \varnothing \end{cases}$

Sabemos que $y \in P_j \cap P_k$. Logo (b) é falsa.

Então vale (a) $j = k$. Logo $P_j = P_k$ e assim $z \in P_j$.

Portanto $\exists P_j$ tq $x \in P_j$ e $z \in P_j$. Logo $x \sim z$. [QED]

Voltando às questões:

(b) Está provado.

(a) Dada uma relação ~, podemos definir uma partição. Qual?

Teorema

Seja ~ uma relação de equivalência no conjunto A.

Para cada $x \in A$ seja $S_x = \{y \in A \mid y \sim x\}$

Seja $P = \{S \mid S = S_x \text{ para algum } x \in A\}$

Então P é uma partição de A.

Demonstração

Provar (i), (ii) e (iii).

(i) Seja $S \in P$, então $S = S_x$ para algum $x \in A$.

Vale $x \sim x$ logo $x \in S_x$ então $S_x \neq \varnothing$ e, portanto $S \neq \varnothing$.

(iii) Queremos provar que $\bigcup_{S \in P} S = A$

Primeiramente, vejamos $\bigcup_{S \in P} S \subseteq A$.

Trivial, pois $\forall x, S_x \subseteq A$.

Em segundo lugar, vejamos $A \subseteq \bigcup_{S \in P} S$.

Basta provar que $\forall x \in A, \exists S \in P$ tq $x \in S$.

Fácil, pois $x \in S_x$ e, por definição, $S_x \in P$.

(ii) Sejam $S, T \in P$, então $\exists x \in A$ tq $S = S_x$,
$\exists y \in A$ tq $T = S_y$.

Se $S_x \cap S_y = \varnothing$, ok.

Se $S_x \cap S_y \neq \varnothing$ então queremos provar que $S_x = S_y$

Seja $z \in S_x \cap S_y$

$$\text{então} \left.\begin{cases} z \in S_x & \Rightarrow z \sim x \Rightarrow x \sim z \\ z \in S_y & \Rightarrow z \sim y \end{cases}\right\} \Rightarrow x \sim z \text{ e } z \sim y \Rightarrow x \sim y$$

i.é, há um elemento em S e um elemento em T que são equivalentes.

Consideremos agora um elemento genérico $w \in S_x$ então $w \sim x$.

Mas já provamos $x \sim$ y então $w \sim x$ e $x \sim y \Rightarrow w \sim y$.

Logo, $\forall w \in S_x$ vale $w \in S_y$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Portanto } S_x \subseteq S_y. \\ \text{Analogamente } S_y \subseteq S_x. \end{array}\right\} S = T.$$

[CQD]

Observação

Existe uma relação biunívoca entre
"relação de equivalência" e partição.

Demonstração

O que fizemos não é suficiente para demonstrar isso.