CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Grafos

Definição

Um grafo G consiste de

- um conjunto V de vértices
- um conjunto A de arestas
- uma função $\psi : A \rightarrow V \times V$

  que associa a cada aresta um par não-ordenado de vértices

Exemplo

$V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$A = \{ a, b, c, d, e, f, g \}$

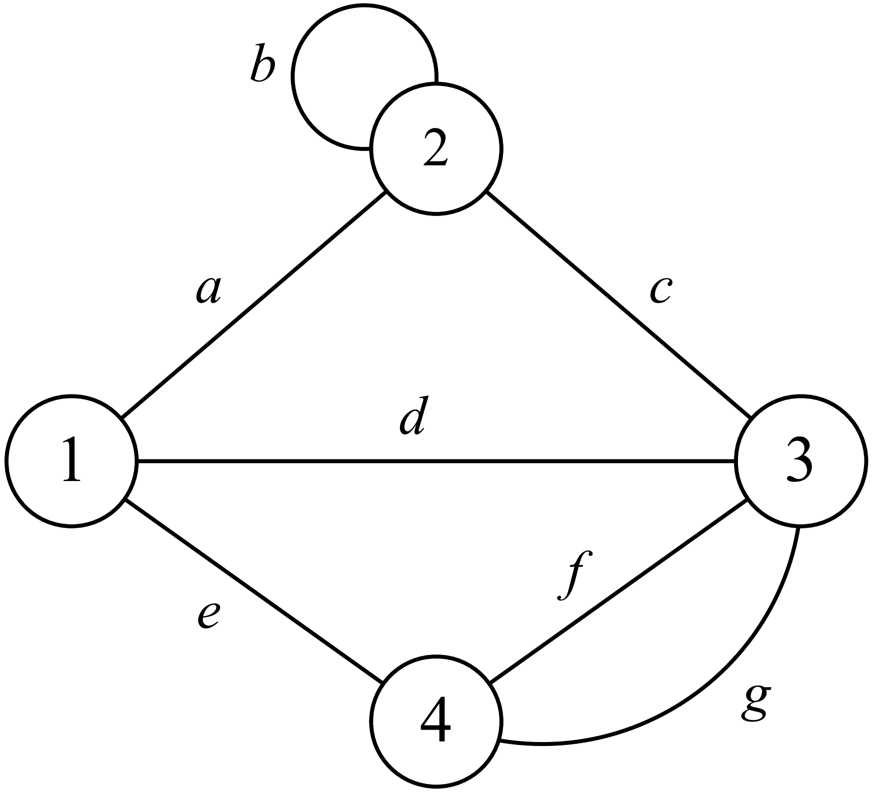
ψ :

a	b	c	d	e	f	g
$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{3,4\}$	$\{3,4\}$

$$G = (V, A, \psi)$$

ψ :

a	b	c	d	e	f	g
{1,2}	{2}	{2,3}	{1,3}	{1,4}	{3,4}	{3,4}



Observação

Não faz diferença o modo como o grafo é desenhado.

Vocabulário

nós = vértices

arcos = arestas

$VG = V(G)$ = conjunto dos vértices do grafo G

$AG = A(G)$ = conjunto das arestas do grafo $G = E(G)$ (do inglês *edges*)

Definições

Dado um grafo $G = (VG, AG, \psi_G)$,

se existe uma aresta $a \in AG$ tq $\psi_G(a) = \{u, v\}$ com $u, v \in VG$

dizemos que

- u e v são adjacentes;
- a incide em u e v;
- a liga u e v;
- u e v são extremos ou pontas de a.

Obs.: Dizer que a e b estão "conectados" significa outra coisa.

Mais definições

Arestas adjacentes

são arestas que possuem um extremo em comum.

Arestas paralelas (= múltiplas)

possuem os mesmos extremos.

Laço (= loop)

é uma aresta cujos extremos coincidem.

Grau de um vértice

é o número de arestas que incidem nesse vértice,

contando duas vezes os laços.

Denota-se $g_G(v)$ ou $g(v)$.

Vértice isolado

$v \in VG$ tq $g_G(v) = 0$.

Ainda definições

Ordem de um grafo

é o número de vértices do grafo.

ordem $(G) = |VG|$.

Tamanho de um grafo

é a soma: tamanho $(G) = |VG| + |AG|$.

Muito usados

$|VG| = n$

$|AG| = m$.

Grafo vazio

$$VG = AG = \varnothing$$

Grafo trivial

$$|VG| = 1; \quad AG = \varnothing.$$

Proposição 1

Seja G um grafo qualquer

A soma dos graus dos vértices de G é par.

Demonstração

Cada aresta contribui com 2 unidades

na soma dos graus dos vértices de G,

inclusive os laços;

logo $\sum_{v \in VG} g(v) = 2\,|\,AG\,|$.

[CQD]

Proposição 2

G possui um número par de vértices de grau ímpar.

Demonstração

$$\sum_{v\in VG} g(v) = \sum_{\substack{u\in VG\\ g(u)\text{ par}}} g(u) + \sum_{\substack{w\in VG\\ g(w)\text{ ímpar}}} g(w)$$

$$\sum_{\substack{w\in VG\\ g(w)\text{ ímpar}}} g(w) = \underbrace{\underbrace{\sum_{v\in VG} g(v)}_{\text{Par (Prop. 1)}} - \underbrace{\sum_{\substack{u\in VG\\ g(u)\text{ par}}} g(u)}_{\text{Soma de pares}}}_{\text{Par}}$$

Somatória de números ímpares deu resultado par.

Então a “quantidade de elementos somados” é par.

Logo o “número de vértices de grau ímpar” é par. [CQD]

Grafo simples

Não tem laços nem arestas múltiplas.

Notação:

Em um grafo simples pode-se usar a notação $a = uv$ para o caso de $\psi_G(a) = \{u, v\}$.

Importante

Alguns livros definem:

grafo = grafo simples;

multigrafo = grafo que pode ter laços e/ou arestas múltiplas.

Grafo completo

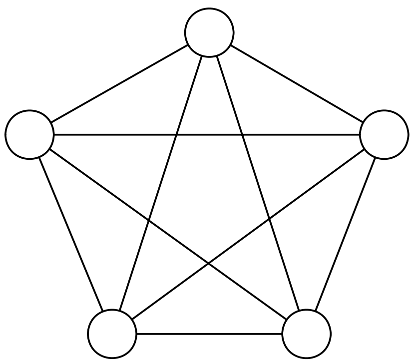
É o grafo simples tal que
quaisquer dois vértices são adjacentes.

Notação:

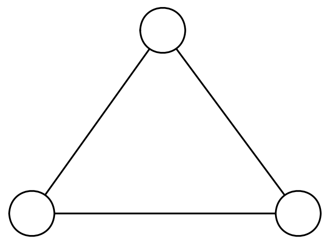
Se $|VG| = n$,
denota-se este grafo por K_n.

Exemplo

K_5 :



K_3 :



(chamado triângulo)

Grafo bipartido

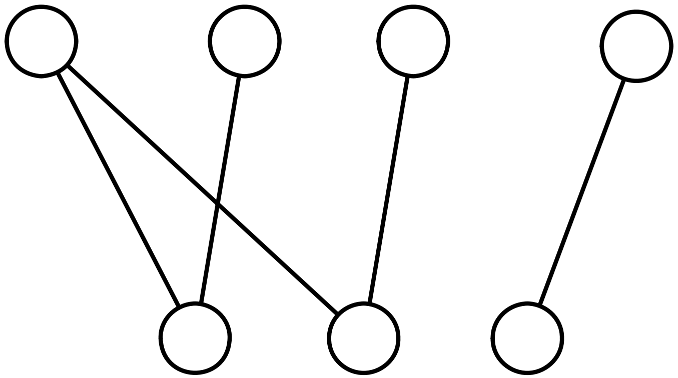
É um grafo G tal que

$X \cup Y = VG$;

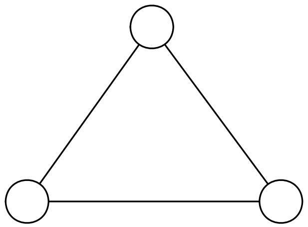
$X \cap Y = \varnothing$;

toda aresta de G possui um extremo em X e outro em Y.

Exemplo

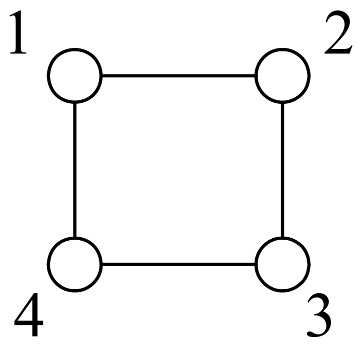


Exemplo



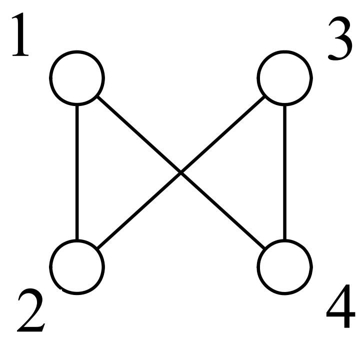
não é bipartido.

Exemplo



Sim. É bipartido.

Pois



Grafo bipartido completo

É um grafo simples G bipartido tal que

$$| X | = m$$

$$| Y | = n$$

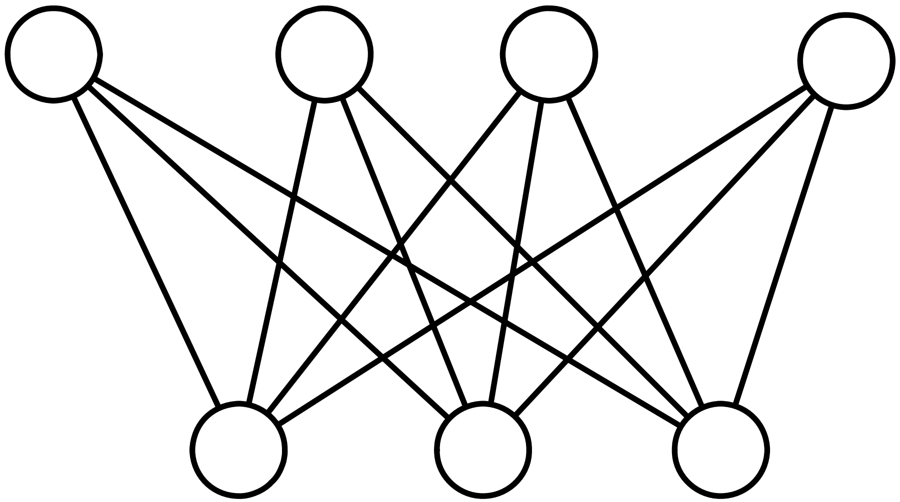
$$| AG | = m \cdot n$$

Notação

$$K_{m,n}$$

Exemplo

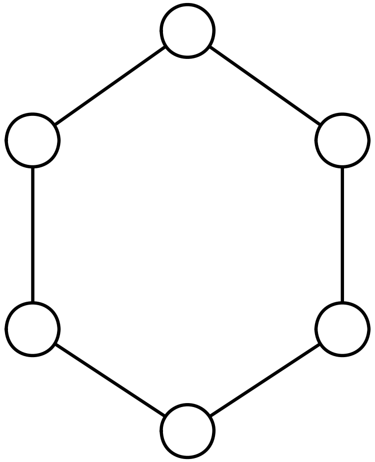
$K_{4,3}$:



Grafo *k*-regular

Um grafo G é k-regular se $g(v) = k$ para todo v em VG.

Exemplo



é 2-regular.

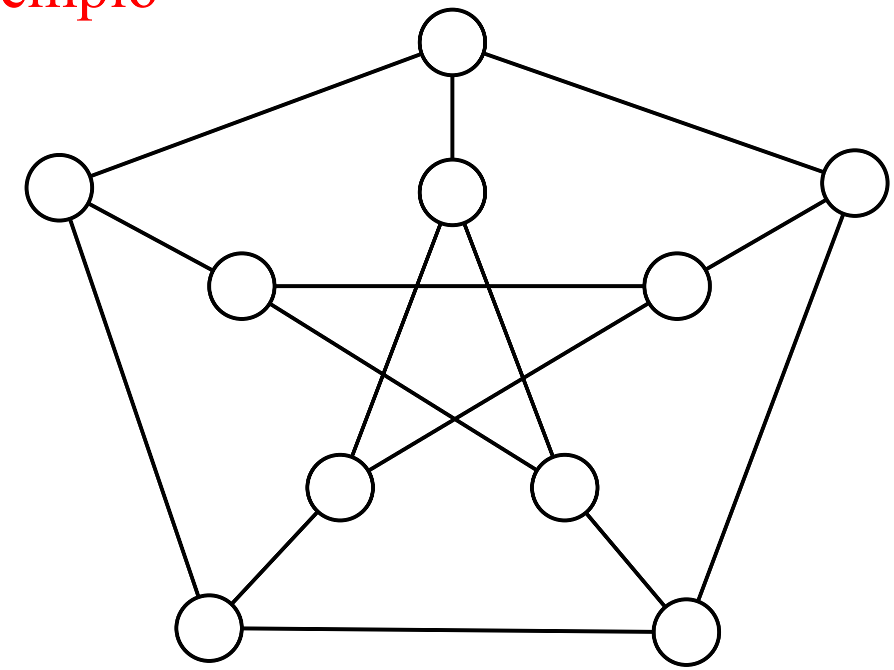
Exemplo

K_5 é 4-regular.

Grafo regular

G é regular se for *k*-regular para algum *k*.

Exemplo



é regular.

Grafo de Petersen

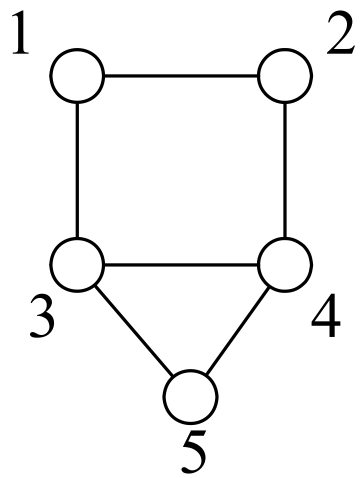
Grafo complemento

Se G é um grafo simples,
então $\overline{G}$ denota o complemento de G
e é definido por:

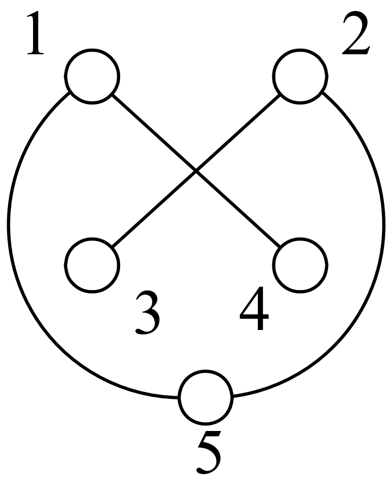
$$V\overline{G} = VG$$
$$\forall u,v \in VG,\ \ uv \in A\overline{G} \ \text{ sse } \ uv \notin AG$$

Exemplo

G :



$\overline{G}$:



Obs.: $AG \cup A\overline{G} = A(K_{|VG|})$

Problema 1

Considere uma festa com 6 pessoas.

Prove que existem 3 pessoas que se conhecem 2 a 2

ou 3 pessoas que não se conhecem 2 a 2.

Resolução

Na linguagem dos grafos:

Seja G um grafo simples tal que $|VG| = 6$

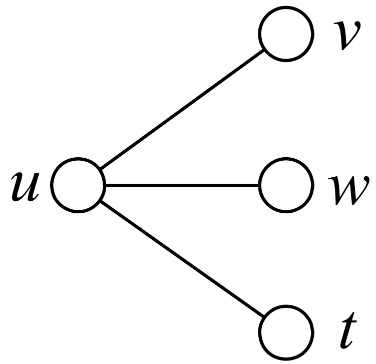
Prove que G ou $\overline{G}$ contém um triângulo.

$(\rightarrow)$

Seja $u \in VG$

<u>Caso 1:</u> $g_G(u) \geq 3.$

Existem pelo menos 3 vértices v, w, t adjacentes a u em G.

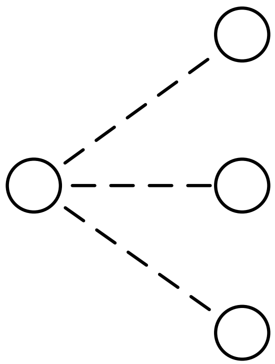


Se vw, vt ou $wt \in AG$, há um triângulo em G.

Caso contrário, temos um triângulo em $\overline{G}$.

<u>Caso 2:</u> $g_{\overline{G}}(u) \geq 3.$

Isto é, existem v, w, t adjacentes a u em $\overline{G}$.



Se vw, vt ou $wt \notin AG$, há um triângulo em $\overline{G}$.

Caso contrário, temos um triângulo em G.

[CQD]

Problema 2

Em um campeonato de xadrez
no máximo um jogo é disputado entre cada 2 jogadores.
Prove que, em qualquer etapa do campeonato,
há sempre 2 participantes que disputaram até então
o mesmo número de jogos.

Resolução

Na linguagem dos grafos:
seja G um grafo simples, com $|VG| = n$.
Prove que $\exists u, v \in VG,$ com $u \neq v,$ tais que $g(u) = g(v).$

G simples $\Rightarrow$ $\forall v \in VG$ temos $0 \leq g(v) \leq n-1$.

<u>Caso 1:</u> $\exists v \in VG$ tal que $g(v) = 0$

então $\forall w \in VG$ temos $0 \leq g(w) \leq n-2$

pois ninguém é adjacente a v.

logo, pelo Princípio das casas dos pombos,

$\exists t, s \in VG$, com $t \neq s$, tais que $g(t) = g(s)$.

<u>Caso 2:</u> $\nexists v \in VG$ tal que $g(v) = 0$

então $\forall w \in VG$ temos $1 \leq g(w) \leq n-1$

logo, pelo Princípio das casas dos pombos,

$\exists t, s \in VG$, com $t \neq s$, tais que $g(t) = g(s)$.

[CQD]