CTC – 20
Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

Emparelhamentos

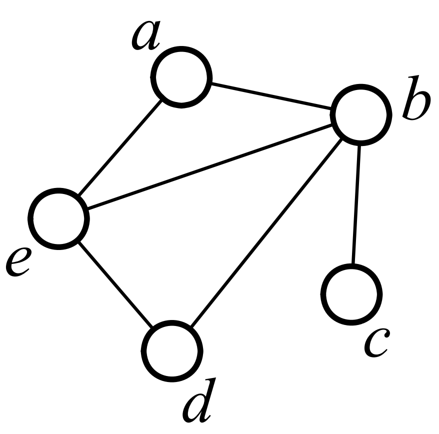
Emparelhamento

Dado um grafo G,

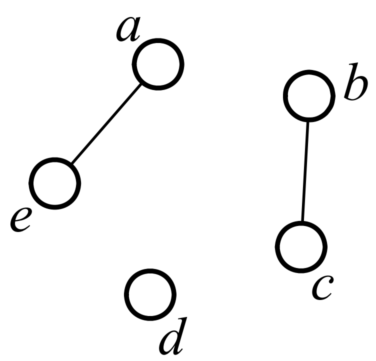
um subconjunto M de arestas de G define um emparelhamento se quaisquer duas arestas de M não são adjacentes.

Exemplo

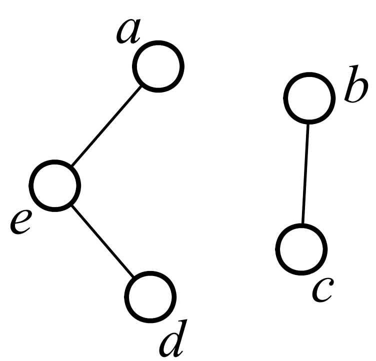
G



M_1



M_2



M_1 é um emparelhamento em G mas M_2 não é.

Definição

Dizemos que $x \in VG$ é coberto por M
se $\exists a \in M$ tal que a incide em x.

Exemplo

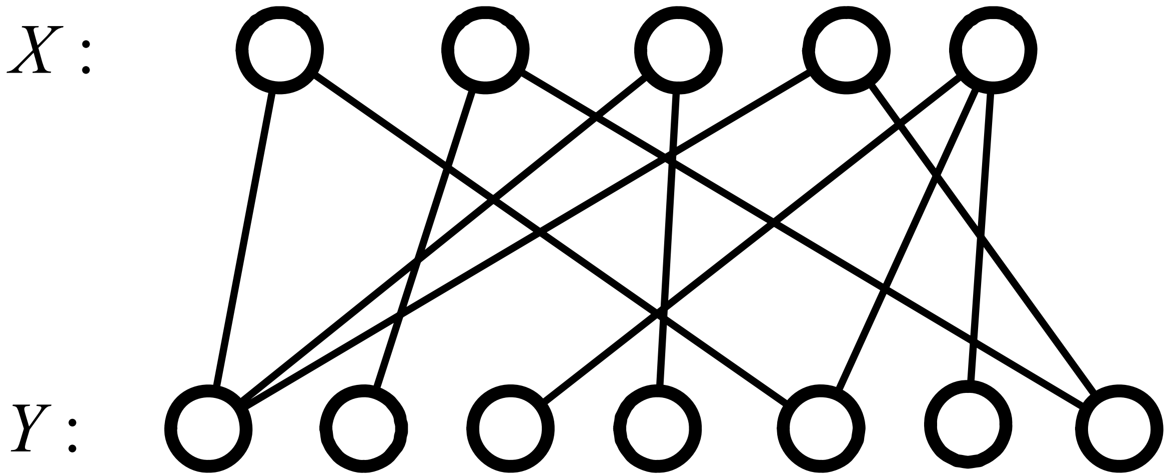
No exemplo acima, o vértice c é coberto por M_1;
o vértice d não é coberto por M_1.

Observações

- Matching
- Claramente, o número de vértices cobertos por M é $2|M|$.
- Definimos "emparelhamento perfeito":
  que cobre todos os vértices de G.

Objetivo

Dado um grafo G bipartido com bipartição (X, Y) decidir se existe um emparelhamento em G cobrindo todos os vértices de X.



Notação Γ

Dado um subconjunto $S \subseteq X$, definimos

$\Gamma(S) = \{y \in Y$ tais que y é adjacente a algum vértice em $S\}$

Teorema de Hall (ou de König)

Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y).

Então G contém um emparelhamento cobrindo X

se e somente se

$$\forall S \subseteq X \quad |\Gamma(S)| \geq |S|.$$

Demonstração

$(\Rightarrow)$

Trivial.

$(\Leftarrow)$

Muito longa.

Corolário

Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y).

Seja um inteiro $d \geq 0$.

Então G contém um emparelhamento cobrindo $|X| - d$ vértices de X se e somente se $\forall S \subseteq X \quad |\Gamma(S)| \geq |S| - d.$

Demonstração

$(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$

Prova informal ☺

Acrescentar d novos vértices $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_d\}.$

Seja G' tal que $VG' = X \cup Y \cup Z$

$AG' = AG \cup$ {todas as arestas de X a Z}

Temos em G' a bipartição $(X, Y \cup Z)$ na qual basta usar o teorema de Hall. [CQD]

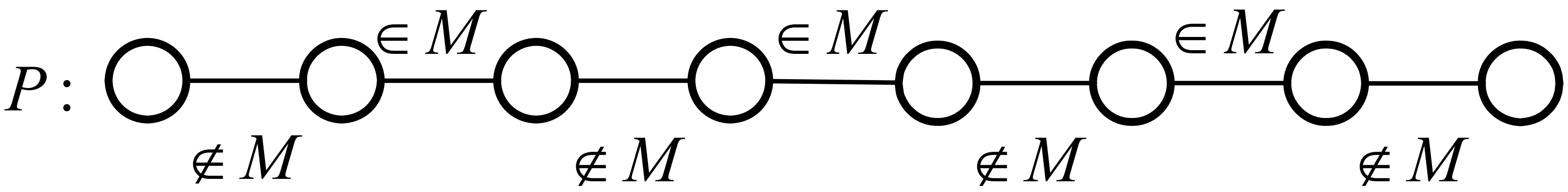
Caminho alternante

Dado um grafo G

e um emparelhamento M em AG

dizemos que um caminho P de G é alternante

se as arestas de P são alternandamente de M e de $AG-M$.



Observação

Acima, P é um caminho alternante de comprimento ímpar.

Se os extremos de P não são cobertos por M, então

M não é máximo!

De fato, considere $M' = M \,\triangle\, AP$

então, claramente, $|M'| > |M|$.

Caminho aumentador

Dado um grafo G e um emparelhamento M
um caminho aumentador é um caminho alternante
cujos extremos não são cobertos por M.

Algoritmo Húngaro

Entrada:

grafo G, bipartido (X, Y)

Saída:

emparelhamento M que cobre X

ou

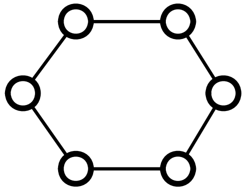
conjunto $S \subseteq X$ tal que $|\Gamma(S)| < |S|$.

Algoritmo Húngaro

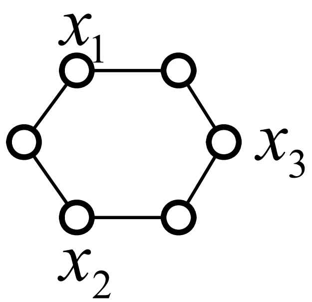
```
Início:
M ← ∅
Repetir
  se M cobre X
    então return M     /* achou emparelhamento */
  escolher vértice x não coberto por M
  se existe y não coberto por M tal que xy ∈ AG
    então M ← M ∪ {xy}
    senão
      procurar cam. aumentador P com início x
      se encontrou P
        então M ← M Δ P
        senão return S = VM ∪ {x}     /* viola condição... */
Fim.
```

Exemplo

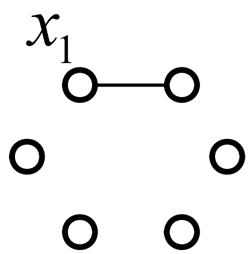
G



Bipartição (X, Y)

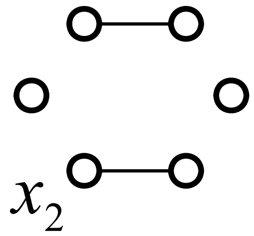


M_1



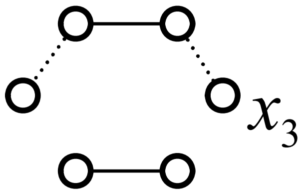
Escolheu vértice x_1
e uma aresta adjacente.

M_2



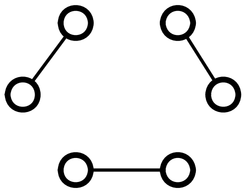
Emparelh. maximal,
mas não é máximo.

?



Procura caminho P
aumentador.

M_3



$M_3 = M_2 \,\Delta\, P$
é emparelh. maior.

Observação

A cada instante o algoritmo procura caminhos alternantes de comprimento ímpar cujos extremos ainda não são cobertos por M.

Importante

Se não existir caminho aumentador, então necessariamente o algoritmo encontrou o conjunto S que viola a condição do Teorema de Hall, isto é, encontrou S tal que $|\Gamma(S)| < |S|$.