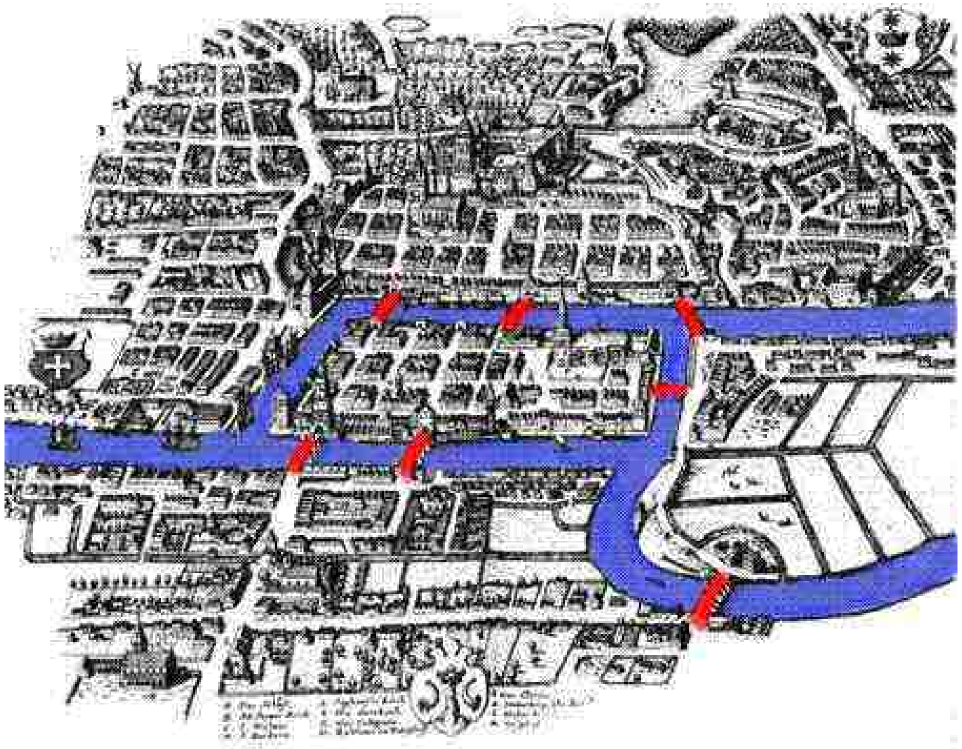
# CTC – 20
# Estruturas Discretas para Computação

Prof. Armando Gouveia

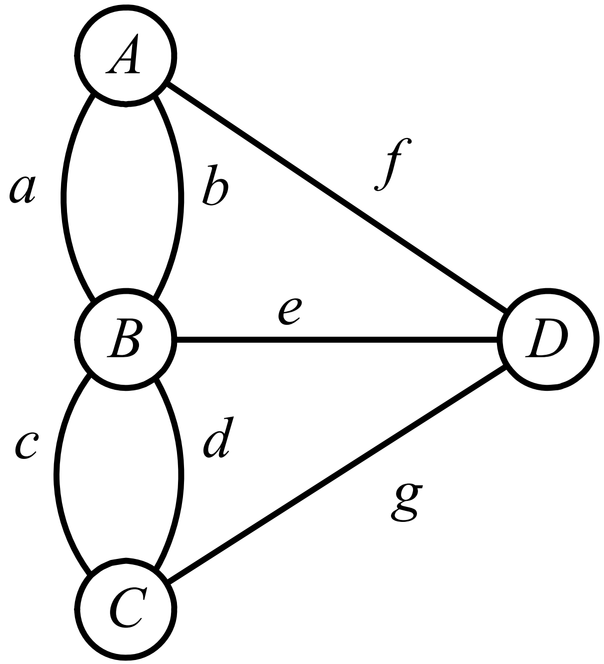
# Grafos eulerianos

# Problema da 7 pontes de Königsberg



Pergunta: é possível fazer um passeio que,
começando em uma das regiões de terra,
passe em cada uma da 7 pontes exatamente uma vez
e volte à região de origem?

Solução: Euler, 1736 .




Trilha de Euler

É uma trilha que passa por todas as arestas do grafo.

Grafo euleriano

É um grafo que possui uma trilha de Euler fechada.

## Teorema

Um grafo conexo não-vazio e não-trivial
é euleriano se e somente se
não contém vértices de grau ímpar.

## Demonstração

($\Rightarrow$) Fácil.

Seja $G$ euleriano.

Seja $T$ uma trilha de Euler fechada em $G$ com início em $u_0$.

$$T = (u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, \dots , a_n, u_n = u_0)$$

Seguindo a trilha, vamos "contar" o grau de cada vértice.

A cada vez que passamos por um vértice $u_i$, $i = 1, \dots , n - 1$,
devemos acrescentar duas unidades ao grau desse vértice,
correspondentes a uma aresta entrando e outra aresta saindo.

($\rightarrow$)

Mesmo raciocínio para o vértice $u_0$, pois
a aresta $a_1$ sai desse vértice e a aresta $a_n$ incide nele.
Logo, $g(u)$ é par para todo $u$ em $VG$.

($\Leftarrow$)

Suponha que existam grafos conexos
com pelo menos uma aresta,
com todos os graus pares,
e que não são eulerianos.

Seja $G$ um tal grafo com menor número possível de arestas.
É fácil ver que $g(v) \geq 2 \quad \forall v \in VG$.
Seja $T$ uma trilha fechada de maior comprimento possível em $G$.
Como $T$ não é trilha de Euler (hipótese: $G$ não euleriano)
existe uma componente $G'$ de $G - AT$ tal que $|AG'| \geq 1$.

Seja $v \in VG'$.

Como $g_T(v)$ é par ($T$ é trilha fechada)
e $g_G(v)$ é par

$\Bigg\}$ então $g_{G'}(v)$ é par pois $g_{G'}(v) = g_G(v) - g_T(v)$.

Temos

$G'$ é conexo (pois é componente);
$G'$ tem pelo menos uma aresta;
$g_{G'}(v)$ é par $\forall v \in VG'$
$|AG'| < |AG|$

$\Bigg\}$ então $G'$ é euleriano devido à escolha de $G$.

Seja $T'$ uma trilha de Euler fechada em $G'$.

Como $G$ é conexo, existe $v \in VT \cap VT'$. (Por quê?) ☺

S.P.G., suponha que $v$ é a origem e o término de $T$ e de $T'$.

então $T\,T'$ é uma trilha fechada em $G$, com $|A(T\,T')| > |AT|$.

[Contradição] [CQD]

## Corolário

Seja $G$ um grafo conexo.

Se $G$ contém exatamente dois vértices $u$ e $v$ de grau ímpar

então $G$ possui uma trilha de Euler

com início $u$ e término $v$.

## Demonstração

Seja uma aresta $\alpha \notin AG$ tal que

$$\psi(\alpha) = \{u, v\}$$

Considere $G'$ o grafo obtido de $G$ tal que

$$VG' = VG$$

$$AG' = AG \cup \{\alpha\}$$

Então $g_{G'}(x)$ é par $\forall x \in VG'$

Logo, pelo teorema anterior, $G'$ é euleriano.

$(\rightarrow)$

Seja $T = (u_0, a_1, u_1, a_2, u_2, \dots, a_n, u_n = u_0)$
uma trilha de Euler fechada em $G'$.

Suponha, sem perda de generalidade,
que a seção $(v, \alpha, u)$ ocorre em $T$.

Seja $T_1$ a seção de $u_0$ até $v$ em $T$.
e $T_2$ a seção de u até $u_0$ em $T$.

Então $T_2T_1$ é uma trilha de Euler de $u$ a $v$ em $G$.

[CQD]

## Aplicação

Um caminhão deve fazer a coleta de lixo em **todas** as ruas da cidade.

Problema: descobrir se é possível planejar um percurso

de modo que o caminhão passe por todas as ruas,

sem passar duas vezes pelo mesmo lugar.

## Modelagem?

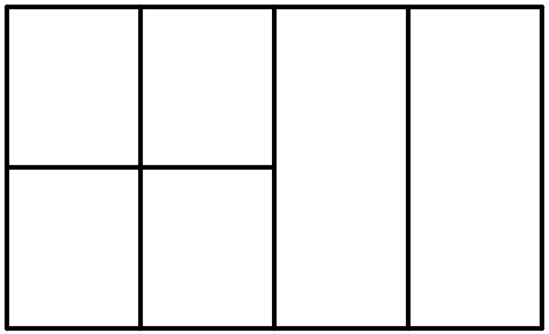
Cada vértice representa um cruzamento de ruas.

Cada aresta representa um "trecho" de uma rua.

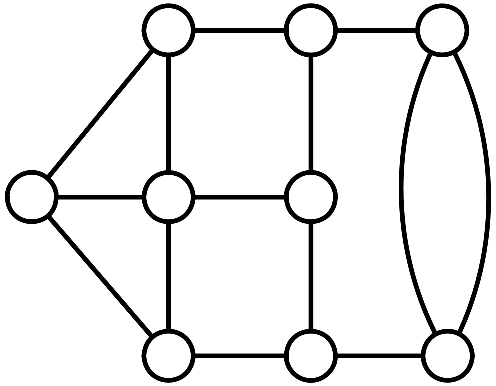
Pode haver arestas múltiplas? Sim.

## Exemplo

Ruas:



Grafo:



## Notação

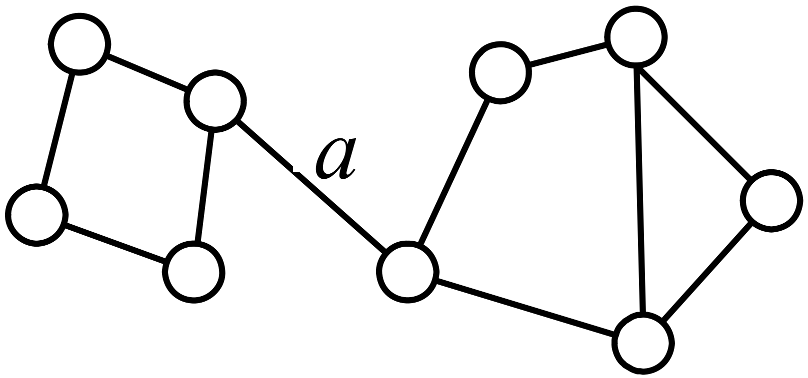
$c\ (G)$ = número de componentes de um grafo $G$.

## Aresta de corte

Em um grafo $G$, uma aresta de corte é uma aresta $a$ em $AG$ tal que

$$c\ (G-a) > c\ (G)$$

## Exemplo

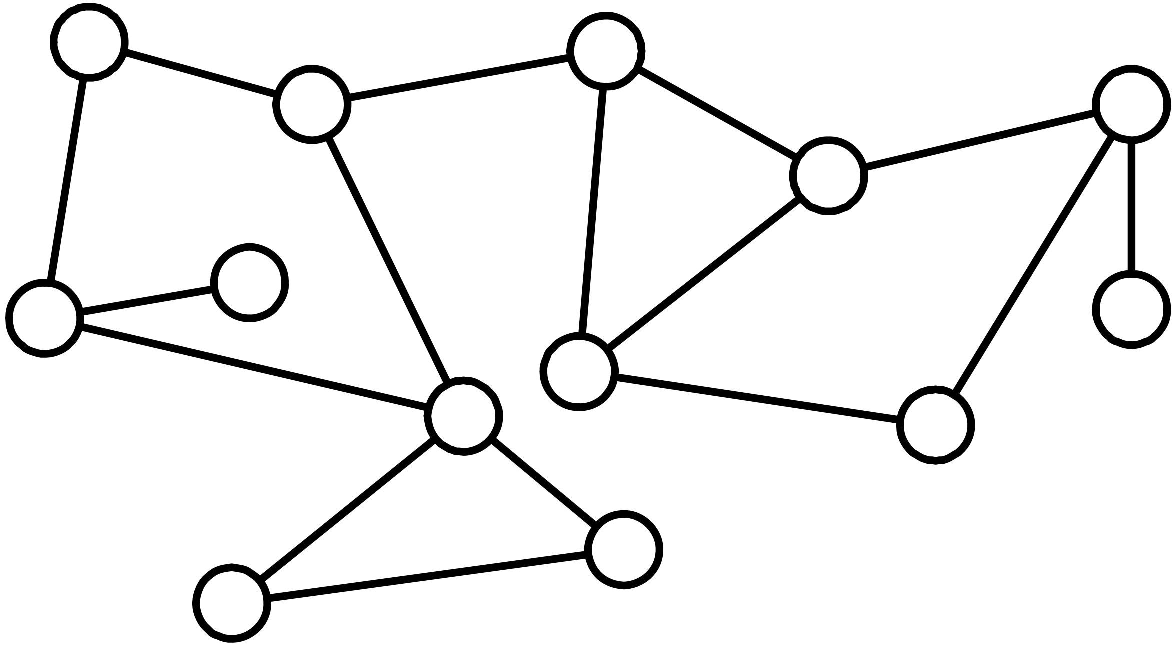



$a$ é uma aresta de corte

## Vocabulário

aresta de corte, cut-edge, ponte, istmo.

## Outro exemplo



Quais são arestas de corte?

## Teorema

Em um grafo $G$,
uma aresta $a$ é aresta de corte se e somente se $a$ não está contida em nenhum circuito de $G$.

## Demonstração

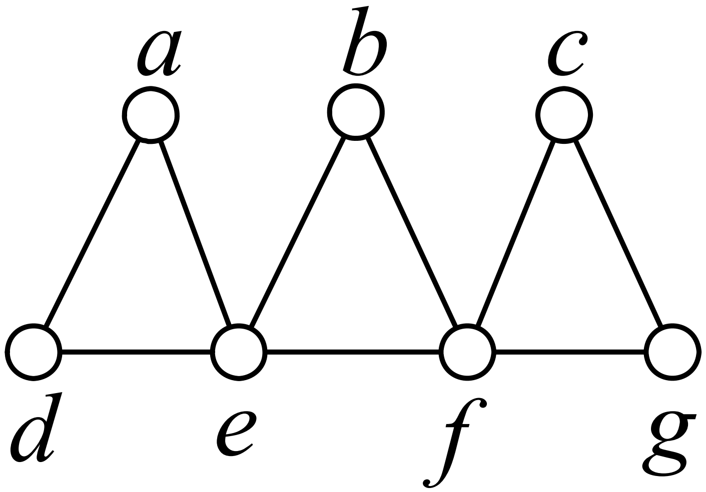
Exercício.

## Algoritmo de Fleury

/* para encontrar trilha de Euler fechada */

```
Início
 -Escolher um vértice inicial;
 -Repetir
    -passar por qualquer aresta disponível
     porém só escolher aresta de corte
     se não houver alternativa;
    -”apagar” a aresta por onde passou;
  até não haver mais arestas.
Fim.
```

# Exemplo



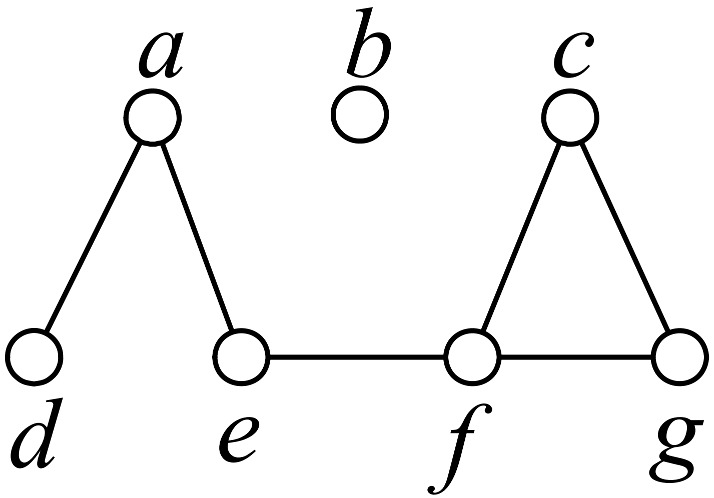

Se escolhermos vértice incial *f*,

a 1ª aresta **pode** ser *f*~*b*;

a 2ª aresta **deve** ser *b*~*e*;

a 3ª aresta **não pode** ser *e*~*f*, …

Teremos:




e assim por diante...

Uma das soluções possíveis é

*f b e d a e f g c f*

(trilha de Euler fechada)

## Problema do Carteiro Chinês

Dado um grafo conexo $G$ com preços nas arestas,
encontrar um passeio fechado de custo mínimo
que passe por todas as arestas.

Obs. 1

Pode repetir aresta.

Obs. 2

O passeio fechado de menor custo é chamado “passeio ótimo”.

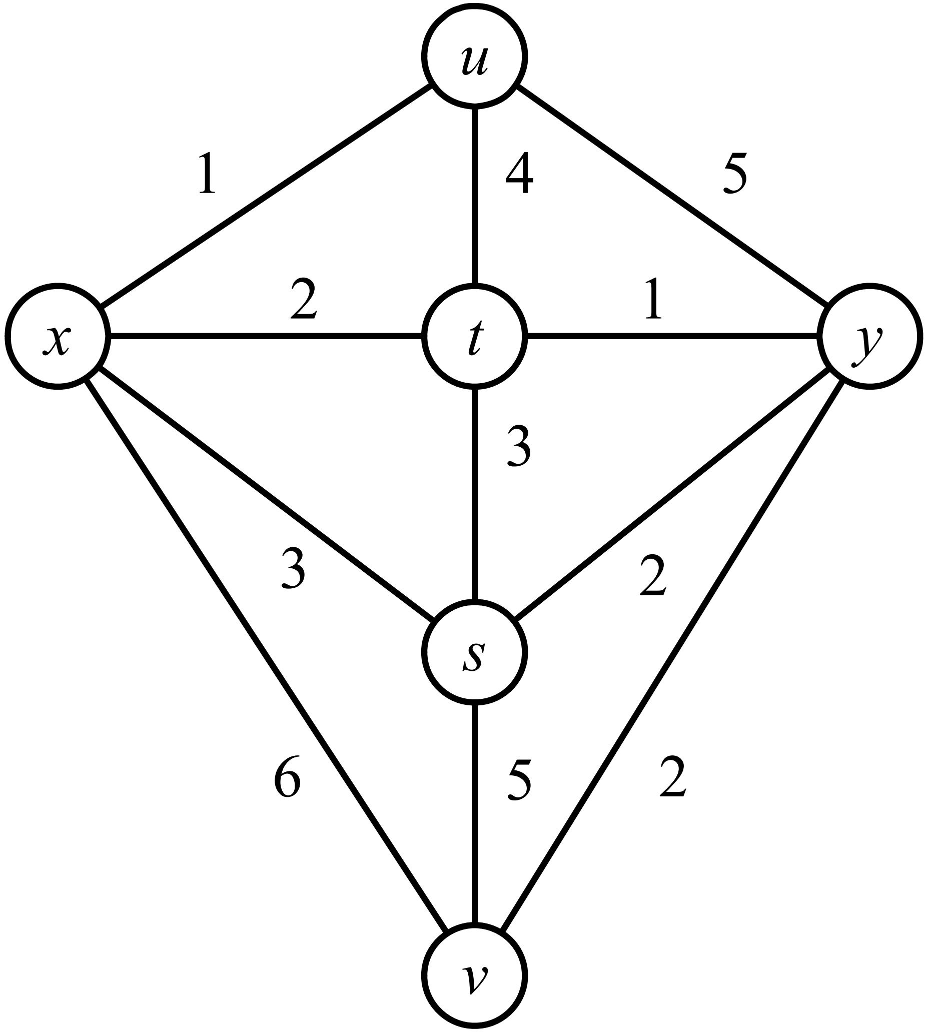
Obs. 3

Chamamos $w : AG \to IN$ a função preço.

Obs. 4

Se $G$ é euleriano, então
uma trilha de Euler fechada é um passeio ótimo.

# Exemplo



## Tática

/* para encontrar passeio fechado de custo mínimo */

`Duas fases:`

`(A) Duplicando algumas arestas de G,`

`obter grafo G´ euleriano tal que`

$$\sum_{a \in AG' - AG} w(a)$$ `seja o menor possível.`

`(B) Encontrar trilha de Euler fechada em G´.`

## Caso particular

Se $G$ é conexo e

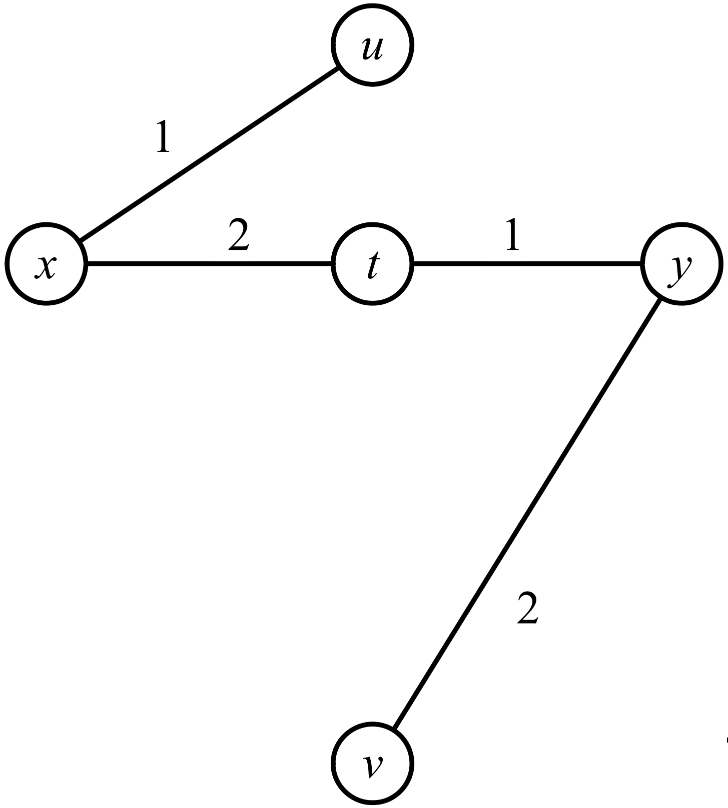
possui exatamente dois vértices de grau ímpar (digamos $u$ e $v$);

então $G'$ é obtido a partir de $G$ satisfazendo `(A)`

se duplicarmos as arestas do caminho de menor custo entre $u$ e $v$.

# Exemplo

No grafo dado, o caminho de menor custo é




que possui custo 6.

## Solução

- Duplicar as arestas *ux, xt, ty, yv.*
- Em seguida encontrar uma trilha de Euler fechada no novo grafo.

# Observações

Teoria da Computação

Problemas de Decisão $\times$ Problemas de Otimização

Tempo de resolução?

Algoritmos exatos $\times$ Algoritmos aproximados

Estratégias de aproximação.

Heurísticas!