

CCI-22



Matemática Computacional

CCI-22

4) Equações e Sistemas Não Lineares

Bisseccção, Posição Falsa, Ponto Fixo,
Newton-Raphson, Secante

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

CCI-22

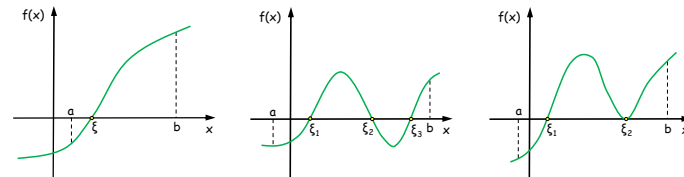
- **Introdução**
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Raízes reais de funções

- Nas mais diversas áreas das ciências exatas, frequentemente ocorrem situações que envolvem a resolução de uma equação do tipo $f(x) = 0$
- Muitas vezes, essas equações não são lineares. Por exemplo, a aplicação da lei de Kirchoff no cálculo da corrente elétrica em um circuito pode resultar em um polinômio de terceiro grau
- O objetivo deste capítulo é estudar métodos numéricos para a resolução de equações não lineares
- Em alguns casos (polinômios, por exemplo), as raízes podem ser reais ou complexas. Estamos principalmente interessados em encontrar as raízes reais: dada uma curva, queremos os pontos em que o eixo x é interceptado
- Esses métodos possuem duas fases:
 - 1) Localização ou isolamento de uma raiz (encontrar um intervalo que a contenha)
 - 2) Refinamento: dada uma aproximação inicial da raiz nesse intervalo, melhorá-la até se obter a precisão desejada

Isolamento das raízes

- Nesta primeira fase, é feita uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$, da qual depende fortemente o sucesso da fase seguinte
- De modo geral, é utilizado o seguinte teorema: considerando $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos uma raiz $x = \xi$ entre a e b
- Graficamente:



Exemplo

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

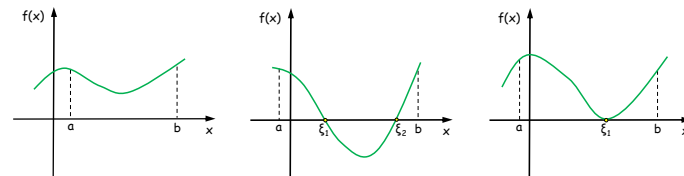
- Vamos construir uma tabela de valores para $f(x)$, considerando apenas os sinais:

x	$-\infty$	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

- Sabendo que $f(x)$ é contínua para qualquer x real, e observando as variações de sinal, podemos concluir que existem raízes nos seguintes intervalos:
 - $[-5, -3]$
 - $[0, 1]$
 - $[2, 3]$
- Como $f(x)$ é um polinômio de grau 3, localizamos todas as suas raízes

Outras situações

- Se $f(a) \cdot f(b) > 0$, então podemos ter várias situações:



- Será preciso realizar uma análise gráfica de $f(x)$. Basta seguir um dos seguintes procedimentos:
 - Esboçar o gráfico de $f(x)$ e localizar as raízes
 - A partir da equação $f(x) = 0$, obter uma equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar seus gráficos e localizar os pontos em que se encontram
 - Utilizar programas que traçam gráficos de funções

CCI-22

- Introdução
- **Enumeração das raízes de um polinômio**
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Raízes reais de um polinômio

- **Regra de Descartes:**
 - O número de raízes reais positivas de um polinômio $p(x)$ com coeficientes reais nunca é maior que o número de trocas de sinal na sequência de seus coeficientes não nulos
 - Se for menor, então será sempre por um número par
- Como as raízes negativas de $p(x)$ são as positivas de $p(-x)$, também é possível utilizar essa mesma regra na enumeração das raízes reais negativas

Exemplo

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$$

+ + - -

Uma troca de sinal: $p(x)$ tem 1 raiz positiva

$$p(-x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$$

- + + -

Duas trocas de sinal: $p(x)$ pode ter 2 ou 0 raízes negativas

- Se $p(x)$ tiver 2 raízes negativas, não terá raízes complexas; caso contrário, terá 2 raízes complexas
- Possibilidades:

		Raízes		
		Positivas	Negativas	Complexas
1	2	0		sempre aos pares
1	0	2		

Outro exemplo

$$p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

+ - + - +

Quatro trocas de sinal: $p(x)$ pode ter 4, 2 ou 0 raízes positivas

$$p(-x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

+ + + + +

Nenhuma troca de sinal: $p(x)$ não tem raízes negativas

- Possibilidades:

		Raízes		
		Positivas	Negativas	Complexas
4	0	0		
2	0	2		
0	0	4		

Raízes complexas de um polinômio

- Seja o polinômio de grau n :
 $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$
- Regra de Huat:** Se para algum k , $1 \leq k < n$, tivermos $(a_k)^2 \leq a_{k-1} \cdot a_{k+1}$, então $p(x)$ terá raízes complexas
- Regra da Lacuna:**
 - Se os coeficientes de $p(x)$ forem todos reais e para algum k , $1 \leq k < n$, tivermos $a_k = 0$ e $a_{k-1} \cdot a_{k+1} > 0$, então $p(x)$ terá raízes complexas
 - Se os coeficientes forem todos reais e existirem dois ou mais coeficientes nulos sucessivos, então $p(x)$ terá raízes complexas

Exemplo

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 5x + 3 \quad \text{2 ou 0 positivas}$$

$$p(-x) = -2x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x + 3 \quad \text{3 ou 1 negativas}$$

- Regra de Huat: $(a_2)^2 \leq a_1 \cdot a_3$, pois $1 < 3 \cdot 2$
 - Portanto, $p(x)$ tem raízes complexas

- Possibilidades:

Positivas	Raízes	
	Negativas	Complexas
2	1	2
0	3	2
0	1	4

Outro exemplo

$$p(x) = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1 \quad \text{4, 2 ou 0 positivas}$$

$$p(-x) = 2x^6 + 3x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{não tem negativas}$$

- Regra da Lacuna: $a_2 = 0$ e $a_1 \cdot a_3 > 0$, pois $(-3) \cdot (-2) > 0$
 - Portanto, $p(x)$ tem raízes complexas

- Possibilidades:

Positivas	Raízes	
	Negativas	Complexas
4	0	2
2	0	4
0	0	6

CCI-22

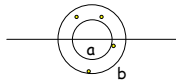
- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Localização de raízes

- Localizar as raízes reais de um polinômio $p(x)$ é determinar um intervalo que as contenha
- Exemplos:



- Localizar as raízes complexas é determinar os raios interno e externo de anéis que as contenham
- Exemplo:



- Em ambos os casos, a e b são chamados respectivamente de cota inferior e superior

Localização de raízes reais

- Teorema de Laguerre:** Dado o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e dado um número a , obtemos $p(x) = q(x)(x - a) + R$. Se os coeficientes de $q(x)$ e R forem todos positivos ou nulos, então todas as raízes reais são menores que a
- Cota de Laguerre-Thibault:** Dado o polinômio $p(x)$ de coeficientes reais, calcule a divisão de $p(x)$ por $x-1, x-2, x-3, \dots, x-m$, até que o quociente $q(x)$ tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, e resto $R > 0$. Esse $m > 0$ é uma cota superior das raízes reais de $p(x)$. Uma cota inferior $n < 0$ pode ser calculada de modo semelhante, multiplicando-se $p(-x)$ por -1 e seguindo o mesmo procedimento

Exemplo

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

	1	1	-9	-1	20	-12
1		1	2	-7	-8	12
	1	2	-7	-8	12	0

	1	1	-9	-1	20	-12
2		2	6	-6	-14	12
	1	3	-3	-7	6	0

	1	1	-9	-1	20	-12
3		3	12	9	24	132
	1	4	3	8	44	120

3 é uma cota superior de $p(x)$

Exemplo (continuação)

$$p(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12$$

	1	-1	-9	1	20	12
1		1	0	-9	-8	12
	1	0	-9	-8	12	24

	1	-1	-9	1	20	12
2		2	2	-14	-26	-12
	1	1	-7	-13	-6	0

	1	-1	-9	1	20	12
3		3	6	-9	-24	-12
	1	2	-3	-8	-4	0

	1	-1	-9	1	20	12
4		4	12	12	52	288
	1	3	3	13	72	300

-4 é uma cota inferior de $p(x)$

Todas as raízes de $p(x)$ pertencem a $[-4, 3]$

Localização de raízes complexas

- **Cota de Kojima:** Dado o polinômio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, toda raiz α , real ou complexa, está em um anel de raio externo $R = q_1 + q_2$, onde q_1 e q_2 são os maiores valores de $|a_i/a_0|^{1/i}$, para $1 \leq i \leq n$
- Considerando o polinômio $p(1/x)$, o raio interno r é calculado de modo semelhante: $r = 1/(q_1 + q_2)$

Exemplo

$$p(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12$$

- $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = -9, a_3 = -1, a_4 = 20, a_5 = -12$
- Valores: $\{1^1; 9^{1/2}; 1^{1/3}; 20^{1/4}; 12^{1/5}\} = \{1; 3; 1; 2,115; 1,644\}$
- $q_1 = 3$ e $q_2 = 2,115 \Rightarrow R = 5,115$
- Toda raiz a satisfaz $|a| < 5,115$
- As raízes de $p(1/x)$ são as mesmas do polinômio $-12x^5 + 20x^4 - x^3 - 9x^2 + x + 1$
- Valores: $\{(20/12)^1; (1/12)^{1/2}; (9/12)^{1/3}; (1/12)^{1/4}; (1/12)^{1/5}\} = \{1,667; 0,289; 0,909; 0,537; 0,608\}$
- $q_1 = 1,667$ e $q_2 = 0,909 \Rightarrow r = 0,388$
- Toda raiz a satisfaz $|a| > 0,388$

Separação de raízes reais

- Separar raízes de um polinômio é encontrar uma sequência de subintervalos distintos, tais que cada um contenha exatamente uma raiz real, e cada raiz real esteja contida em um desses subintervalos
- **Teorema de Budan:** Seja $p^{(k)}(c)$ o valor da k -ésima derivada do polinômio $p(x)$ calculada para $x = c$. Seja V_c o número de variações de sinal na sequência $p(c), p'(c), p''(c), \dots, p^{(n)}(c)$, onde n é o grau de $p(x)$. Então, o número de raízes de $p(x)$ no intervalo (a,b) é igual ou menor que $|V_a - V_b|$. Se for menor, será por um número par
- Importante: este teorema não dá informações sobre a multiplicidade das raízes, ou seja, uma mesma raiz pode ser contada várias vezes...

Exemplo

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

- Pela regra de Descartes, como há duas variações de sinal, $p(x)$ tem 2 ou 0 raízes positivas
- Derivadas de $p(x)$:
 - $p'(x) = 3x^2 - 4x - 1; p''(x) = 6x - 4; p'''(x) = 6$
- Por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 3. Portanto, tomemos $(a,b) = (0;3)$:
 - $p(0)=2; p'(0)=-1; p''(0)=-4; p'''(0)=6$
 - $p(3)=8; p'(3)=10; p''(3)=14; p'''(3)=6$
- $V_0=2$ e $V_3=0$: há 2 ou 0 raízes em $(0;3)$
- Dividindo-se o intervalo em $(0;3/2)$ e $(3/2;3)$, é possível verificar que $V_{3/2}=1$: podemos concluir que há uma raiz em cada um desses subintervalos

Outro exemplo

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 20x + 1$$

- Pela regra de Descartes, $p(x)$ tem 2 ou 0 raízes positivas e 1 raiz negativa
- Por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 9, e a inferior é -1
- Análise gráfica:

x	P(x)
-1	-29
0	1
1	13
2	13
3	7
4	1
5	1
6	13
7	43

- De fato, é fácil comprovar que há uma raiz negativa em $[-1;0]$
- A tabela parece indicar que não há raízes positivas...
- No entanto, $p(4,5) = -0,125$, ou seja, há uma raiz em $[4;4,5]$ e outra em $[4,5;5]$
- É preciso ter muito cuidado com as análises gráficas...

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- **Métodos iterativos**
 - Bisseção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Métodos iterativos

Através da separação de raízes

Específico de cada método

Veremos a seguir

- Na resolução de equações não lineares, qualquer método iterativo possui 4 partes:
 - Estimativa inicial: uma aproximação para a raiz
 - Atualização: uma fórmula que recalcula a solução
 - Critério de parada: uma condição de término para o processo iterativo
 - Avaliador de exatidão: associado ao critério de parada, provê uma estimativa do erro cometido

Critérios de parada

- Na resolução de $f(x)$ através de um processo iterativo, sejam: x_i a solução obtida no passo i ; ε_1 e ε_2 valores de tolerância estabelecidos; k o número de dígitos significativos exatos requeridos na aproximação final; L o número máximo permitido de iterações. Portanto, pode-se interromper esse processo de quatro maneiras:
 - $|x_i - x_{i-1}|/|x_i| < \varepsilon_1$
 - $|f(x_i)| < \varepsilon_2$
 - $DIGSE(x_i) \geq k$
 - $i > L$

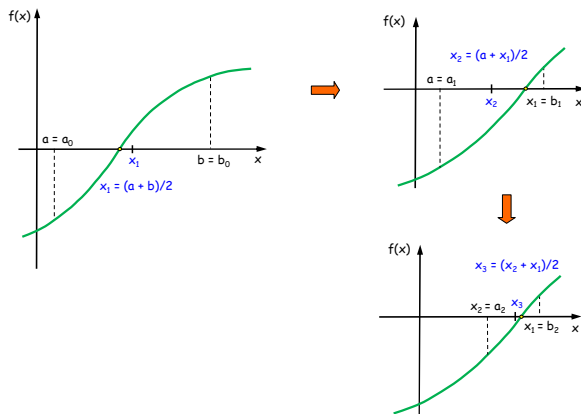
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - **Bisseccão**
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Bisseccão

- Seja $[a,b]$ um intervalo que contenha uma raiz de $f(x)$, onde $f(a).f(b) < 0$
- Algoritmo:
 - Calcula-se o ponto médio do intervalo: $x_m = (a+b)/2$
 - Se $f(x_m) \neq 0$, escolhe-se o subintervalo de $[a,b]$ em que f tenha sinais opostos nas extremidades: $f(a).f(x_m) < 0$ ou $f(x_m).f(b) < 0$
 - Repete-se o processo até que algum critério de parada seja satisfeito

Bisseccão: análise gráfica



Exemplo

$$p(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$$

- **Enumeração:** pela regra de Descartes, $p(x)$ tem 2 ou 0 raízes positivas e 1 raiz negativa
- **Localização:** por Laguerre-Thibault, sabe-se que a cota superior é 5 e a inferior é -1
- **Separação:**
 - Percebe-se que há apenas uma raiz negativa em $[-1;0]$
 - Aplicação do Método da Bisseccão:

x	p(x)
-1	-2
0	21
1	34
2	43
3	54
4	73

i	a	b	x_m	$f(x_m)$
1	-1,0	0,0	-0,5	11,125
2	-1,0	-0,5	-0,75	5,015625
3	-1,0	-0,75	-0,875	1,626953125
4	-1,0	-0,875	-0,9375	-0,156005860
5	-0,9375	-0,875	-0,90625	0,743011480
6	-0,9375	-0,90625	-0,921875	0,256398710
7	0,9375	-0,921875	-0,9296875	0,070171830
...

Estimativa do número de iterações

- Dada uma precisão ε e um intervalo inicial $[a_0, b_0]$, é possível calcular o número i de iterações do Método da Bissecção até que se tenha $b_i - a_i < \varepsilon$:
 - $b_i - a_i = (b_{i-1} - a_{i-1})/2 = (b_0 - a_0)/2^i$
 - Deseja-se que $b_i - a_i < \varepsilon$:
 - $b_i - a_i < \varepsilon \Leftrightarrow (b_0 - a_0)/2^i < \varepsilon$
 - $b_i - a_i < \varepsilon \Leftrightarrow 2^i > (b_0 - a_0)/\varepsilon$
 - $b_i - a_i < \varepsilon \Leftrightarrow i > (\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon) / \log 2$
- Se essa condição for satisfeita, então no final do passo i teremos um intervalo $[a_i, b_i]$ que contém a raiz ξ tal que $\forall x \in [a_i, b_i] \Rightarrow |x - \xi| \leq b_i - a_i < \varepsilon$

O número de iterações tende a ser grande devido a este valor

Bissecção: análise geral

- Vantagens:
 - Se a função $f(x)$ for contínua no intervalo inicial $[a, b]$, o método da bissecção gera uma sequência convergente
 - Facilidade de implementação, pois as iterações envolvem cálculos simples
- Desvantagens:
 - A convergência é lenta
 - Exige o conhecimento prévio da região onde se encontra a raiz
 - A extensão desse método para problemas multivariáveis é complexa

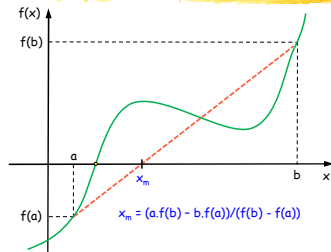
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bissecção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Posição Falsa

- Dado o intervalo $[a, b]$, vimos que o Método da Bissecção encontra um novo intervalo através de uma *média aritmética* entre a e b :
 - $x_m = (a + b)/2$
- Por outro lado, o Método da Posição Falsa calcula uma *média ponderada* entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:
 - $x_m = (a \cdot |f(b)| + b \cdot |f(a)|) / (|f(b)| + |f(a)|)$
 - Como $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, é equivalente a $x_m = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a))$

Posição Falsa: análise gráfica



x_m é a intersecção do eixo x com a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

- Equação da reta: $(x - a)/(f(x) - f(a)) = (b - a)/(f(b) - f(a))$
- No eixo x : $x = x_m$ e $f(x_m) = 0$
- $x_m - a = -f(a) \cdot (b - a) / (f(b) - f(a))$
- $x_m - a = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a))$
- $x_m = (a \cdot f(b) - a \cdot f(a) + a \cdot f(a) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a))$
- $x_m = (a \cdot f(b) - b \cdot f(a)) / (f(b) - f(a))$

Exemplo

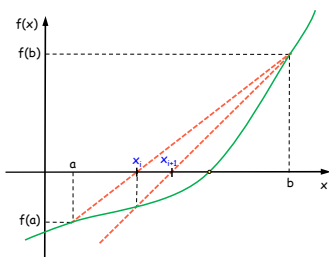
$$f(x) = x \cdot \log x - 1$$

$$[a_0, b_0] = [2; 3]$$

- $f(a_0) = -0,3979 < 0$
- $f(b_0) = 0,4314 > 0$
- $x_0 = (a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)) / (f(b_0) - f(a_0)) = 2,4798$
- $f(x_0) = -0,0219 < 0$
- Como $f(a_0)$ e $f(x_0)$ têm mesmo sinal, $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$
- $x_1 = (a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)) / (f(b_1) - f(a_1)) = 2,5049$
- $f(x_1) = -0,0011 < 0$
- Como $f(a_1)$ e $f(x_1)$ têm mesmo sinal, $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$
- E assim por diante, até que o critério de parada seja satisfeito

Posição Falsa: análise geral

- De modo geral, suas vantagens e desvantagens são análogas às do Método da Bissecção
- Se a função for côncava ou convexa em $[a, b]$, então uma das extremidades permanecerá fixa
- Exemplo:



- Cuidado com o critério de parada: neste caso, o intervalo $[a, b_i]$ nunca ficará suficientemente pequeno, pois b_i permanece constante...
- É possível modificar o método, prevendo casos como este

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bissecção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método do Ponto Fixo

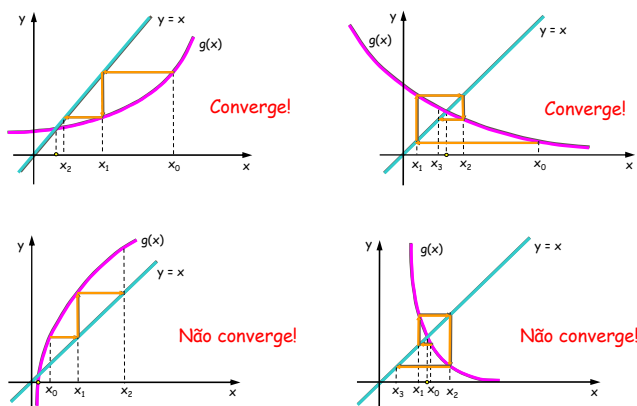
- Seja uma função $f(x)$ contínua e não linear em $[a,b]$, onde está uma única raiz ξ
- O Método do Ponto Fixo consiste em:
 - Transformar a equação $f(x) = 0$ na equivalente $x = g(x)$, de tal modo que $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = \xi$
 - A partir de $x_0 \in [a,b]$, gerar a sequência $\{x_i\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{i+1} = g(x_i)$
 - O problema de se encontrar a raiz em $f(x)$ foi transformado no problema de se encontrar o ponto fixo de $g(x)$
 - $g(x)$ é chamada de *função de iteração*

Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

- Possíveis funções de iteração para $f(x)$:
 - $g_1(x) = 6 - x^2$
 - $g_2(x) = \pm(6 - x)^{1/2}$
 - $g_3(x) = (6/x) - 1$
 - $g_4(x) = 6/(x+1)$

Algumas situações possíveis



Convergência

- Teorema:** Seja ξ uma raiz de $f(x)$ aproximadamente centrada no intervalo I , e $g(x)$ uma função de iteração. A sequência $\{x_i\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$ convergirá para ξ se:
 - $g(x)$ e $g'(x)$ são contínuas em I
 - $x_0 \in I$
 - $|g'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$, onde $0 < M < 1$

Demonstração

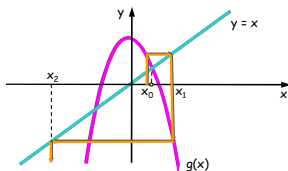
- 1ª parte: Se $x_0 \in I$, então $x_i \in I$, $i \geq 0$
 - $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = g(\xi)$
 - Para $i \geq 0$, $x_{i+1} = g(x_i) \Rightarrow x_{i+1} - \xi = g(x_i) - g(\xi)$
 - Como $g(x)$ é contínua e diferenciável em I , pelo Teorema do Valor Médio, se $x_i \in I$ então existe c_i entre x_i e ξ tal que $g'(c_i) \cdot (x_i - \xi) = g(x_i) - g(\xi)$
 - $x_{i+1} - \xi = g'(c_i) \cdot (x_i - \xi)$, $i \geq 0$
 - $|x_{i+1} - \xi| = |g'(c_i)| \cdot |x_i - \xi| < |x_i - \xi|$, $i \geq 0$, pois $|g'(c_i)| < 1$
 - Como I está aproximadamente centrado em ξ , se $x_i \in I$ então $x_{i+1} \in I$, $i \geq 0$

Demonstração

- 2ª parte: $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \xi$
 - $|x_1 - \xi| = |g'(c_0)| \cdot |x_0 - \xi| \leq M \cdot |x_0 - \xi|$ — c_0 está entre x_0 e ξ
 - $|x_2 - \xi| = |g'(c_1)| \cdot |x_1 - \xi| \leq M^2 \cdot |x_0 - \xi|$ — c_1 está entre x_1 e ξ
 - Generalizando:
 - $|x_i - \xi| = |g'(c_{i-1})| \cdot |x_{i-1} - \xi| \leq M^i \cdot |x_0 - \xi|$, $i > 0$ — c_{i-1} está entre x_i e ξ
 - Como $0 < M < 1$, $0 \leq \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i - \xi| \leq M^i \cdot |x_0 - \xi| = 0$
 - Portanto, $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_i - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \xi$

Voltando ao exemplo anterior

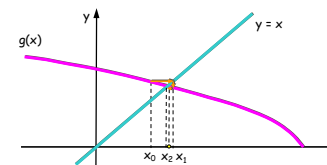
- Sabemos que as raízes de $f(x) = x^2 + x - 6$ são $\xi_1 = -3$ e $\xi_2 = 2$
- Consideremos $g_1(x) = 6 - x^2$ e $x_0 = 1,5$:
 - $x_1 = g(x_0) = 6 - 1,5^2 = 3,75$
 - $x_2 = g(x_1) = 6 - 3,75^2 = -8,0625$
 - $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8,0625)^2 = -59,003906$
 - $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59,003906)^2 = -3475,4609$
- A seqüência $\{x_i\}$ diverge...



- $g_1(x) = 6 - x^2 \Rightarrow g'_1(x) = -2x$
- $g_1(x)$ e $g'_1(x)$ são contínuas em \mathbb{R}
- $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow |-2x| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
- O intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ não satisfaz o teorema, pois não contém as raízes, nem x_0 ...

Ainda o mesmo exemplo

- Consideremos agora $g_2(x) = (6 - x)^{1/2}$ e $x_0 = 1,5$:
 - $x_1 = g(x_0) = (6 - 1,5)^{1/2} = 2,12132$
 - $x_2 = g(x_1) = (6 - 2,12132)^{1/2} = 1,96944$
 - $x_3 = g(x_2) = (6 - 1,96944)^{1/2} = 2,00763$
 - $x_4 = g(x_3) = (6 - 2,00763)^{1/2} = 2,00048$
- A seqüência $\{x_i\}$ está convergindo para $\xi_2 = 2$



- $g_2(x) = (6 - x)^{1/2} \Rightarrow g'_2(x) = -1/(2(6-x)^{1/2})$
- $g_2(x)$ é contínua em \mathbb{R} para $x \leq 6$
- $g'_2(x)$ é contínua em \mathbb{R} para $x < 6$
- $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow |1/(2(6-x)^{1/2})| < 1 \Leftrightarrow x < 5,75$
- O intervalo $I = [1,5; 2,5]$ satisfaz as condições do teorema

Outro exemplo

- Seja $f(x) = x^2 - x - 2$, com $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = 2$
- Sejam duas funções de iteração:
 - $g_1(x) = x^2 - 2$
 - $g_2(x) = (2+x)^{1/2}$
- $g'_1(x) = 2x$: $|g'_1(x)| < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
O intervalo $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ não satisfaz o teorema
- $g'_2(x) = 1/(2(2+x)^{1/2})$: $|g'_2(x)| < 1 \Leftrightarrow x > -7/4$
O intervalo $I = [0;3]$, por exemplo, satisfaz o teorema
- Consideremos $g_2(x) = (2+x)^{1/2}$, $x_0 = 0$:
 - $x_1 = g(x_0) = (2+x_0)^{1/2} = 1,41421$
 - $x_2 = g(x_1) = (2+x_1)^{1/2} = 1,84775$
 - $x_3 = g(x_2) = (2+x_2)^{1/2} = 1,96157$
 - $x_4 = g(x_3) = (2+x_3)^{1/2} = 1,98036$
- A sequência está convergindo para $\xi_2 = 2$

Ordem da convergência

- Seja $\{x_i\}$ uma sequência que converge para a raiz ξ e seja $e_i = x_i - \xi$ o erro na iteração i , $i \geq 0$
- Se existir um número $p > 1$ e uma constante $C > 0$ tais que $\lim_{i \rightarrow \infty} |e_{i+1}|/|e_i|^p = C$, então p é a *ordem de convergência* dessa sequência, e C é a *constante assintótica de erro*
- Quanto maior o valor de p , maior a rapidez de convergência do método iterativo
- No Método do Ponto Fixo, pode-se demonstrar que $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i = g'(\xi)$
- Neste caso, $p=1$, ou seja, a ordem de convergência é linear

Demonstração

- Na demonstração do teorema da convergência, vimos que $x_{i+1} - \xi = g'(c_i) \cdot (x_i - \xi)$, $i \geq 0$, onde c_i está entre x_i e ξ
- Portanto, $(x_{i+1} - \xi)/(x_i - \xi) = g'(c_i)$
- Tomando o limite quando $i \rightarrow \infty$:
 - $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{i+1} - \xi)/(x_i - \xi) = \lim_{i \rightarrow \infty} g'(c_i) = g'(\lim_{i \rightarrow \infty} c_i) = g'(\xi)$
- Logo, $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i = g'(\xi) = C$. Além disso, $|C| < 1$, pois $g'(x)$ satisfaz as hipóteses do teorema da convergência
- Neste caso, a convergência será mais rápida quanto menor for $|g'(\xi)|$

Ponto Fixo: análise geral

- Vantagens:
 - Convergência rápida
- Desvantagens:
 - Obtenção de uma função de iteração
 - Determinação de um intervalo inicial válido
 - Difícil implementação
- A importância deste método está mais no estudo dos seus conceitos que em sua eficiência computacional

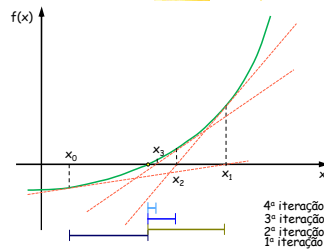
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - **Newton-Raphson**
 - Secante
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método de Newton-Raphson

- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$ que contém uma única raiz, e um ponto inicial x_0 , é possível encontrar uma aproximação para essa raiz a partir da intersecção da reta tangente à curva em x_0 com o eixo das abscissas
- O ponto inicial x_0 é escolhido em função da geometria do método e do comportamento da curva nas proximidades da raiz
- Cálculo das aproximações: $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Newton-Raphson: análise gráfica



- Seja o ponto $(x_i, f(x_i))$
- Traça-se a reta $L_{i+1}(x)$ tangente à curva nesse ponto:
 $L_{i+1}(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$
- No cruzamento com o eixo x , $L_{i+1}(x) = 0$:
 $0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$
- Portanto, $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

Caso particular do Ponto Fixo

- O Método de Newton-Raphson pode ser entendido como um caso particular do Método do Ponto Fixo, onde $g(x) = x - f(x)/f'(x)$
- Calculando a derivada de $g(x)$:
 $g'(x) = 1 - (f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x))/f'(x)^2$
- Na raiz ξ , sabemos que $f(\xi) = 0$. Desde que $f'(\xi) \neq 0$, então $g'(\xi) = 1 - f'(\xi)^2/f'(\xi)^2 = 0$
- Como $g'(\xi) = 0$, graças ao teorema da convergência do Método do Ponto Fixo, o Método de Newton-Raphson converge com rapidez máxima para a raiz

Convergência

- **Teorema:** Seja $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz ξ de $f(x)$. Supondo $f'(\xi) \neq 0$, existe um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo essa raiz tal que, se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_i\}$ gerada por $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ converge para ela
- **Demonstração:** basta verificar que são satisfeitas as hipóteses do teorema da convergência do Método do Ponto Fixo
- Em outras palavras, o Método de Newton-Raphson converge desde que a aproximação inicial seja suficientemente próxima da raiz
- Sua convergência é de ordem quadrática:
 $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = C \neq 0$

Demonstração

- $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$
- $x_{i+1} - \xi = x_i - \xi - f(x_i)/f'(x_i)$
- $e_{i+1} = e_i - f(x_i)/f'(x_i)$
- **Desenvolvimento de Taylor em torno de x_i :**
 - $f(x) = f(x_i) + f'(x_i).(x-x_i) + f''(c_i).(x-x_i)^2/2$, onde c_i está entre x e x_i
 - $0 = f(\xi) = f(x_i) - f'(x_i).(x_i-\xi) + f''(c_i).(x_i-\xi)^2/2$
 - $f(x_i) = f'(x_i).e_i - f''(c_i).e_i^2/2$
 - $f(x_i)/f'(x_i) = e_i - f''(c_i).e_i^2/2f'(x_i)$
 - $f''(c_i).e_i^2/2f'(x_i) = e_{i+1}$
 - $e_{i+1}/e_i^2 = f''(c_i)/2f'(x_i)$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} f''(c_i)/2f'(x_i) = f''(\xi)/2f'(\xi)$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = g''(\xi)/2$ — Conferir através do desenvolvimento de $g''(x)$
- $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^2 = C$

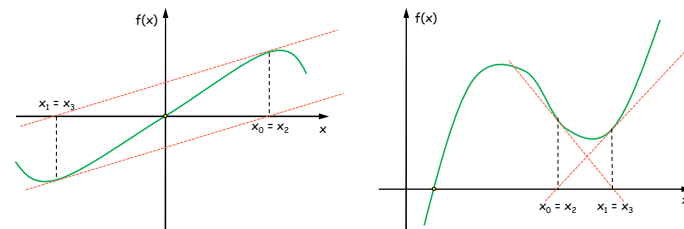
Exemplo

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 17$$

- $x_0 = -1,0$
- $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -1,0 + 2/30 = -0,9333333333$
- $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = -0,9321152567$
- $x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = -0,9321148567$
- $x_4 = x_3 - f(x_3)/f'(x_3) = -0,9321148567$

Casos de loop infinito



Newton-Raphson: análise geral

- Vantagens:
 - Convergência rápida
- Desvantagens:
 - Dificuldade para se encontrar uma aproximação inicial adequada
 - Necessidade da obtenção de $f'(x)$, que nem sempre é possível
 - Risco de *loop* infinito
- O Método da Bisseccção poderia ser utilizado para se obter uma aproximação inicial

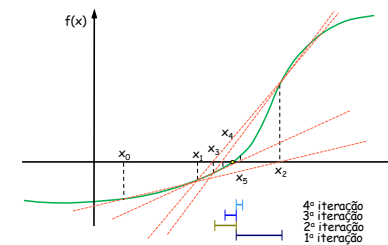
CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - **Secante**
 - Considerações finais
- Sistemas de equações não lineares

Método da Secante

- Para se evitar o cálculo de derivadas, podemos usar um modelo linear baseado nos valores mais recentes de $f(x)$
- Partindo de duas aproximações x_{i-1} e x_i , calculamos a reta que passa por $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. A intersecção desta reta com o eixo x determina a aproximação x_{i+1} , e o processo continua a partir de x_i e x_{i+1}
- Cálculo das aproximações:
$$x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i) / (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

Secante: análise gráfica



- Sejam os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$
- Traça-se a reta $L_{i+1}(x)$ que passa por ambos:
$$L_{i+1}(x) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1})$$
- No cruzamento com o eixo x , $L_{i+1}(x) = 0$:
$$0 = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) / (x_i - x_{i-1})$$
- Portanto, $x_{i+1} = x_i - (x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i) / (f(x_i) - f(x_{i-1}))$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

$$\xi = 2; x_0 = 1,5; x_1 = 1,7$$

- $x_2 = x_1 - (x_1 - x_0) \cdot f(x_1) / (f(x_1) - f(x_0))$
- $x_2 = 1,7 - (1,7 - 1,5) \cdot (-1,41) / (-1,41 + 2,25) = 2,03571$
- $x_3 = 1,99774$
- $x_4 = 1,99999$

Convergência

- Como o Método da Secante é uma aproximação do Método de Newton-Raphson, as condições para convergência são praticamente as mesmas
- Dahquiste Bjorck demonstrou que, no Método da Secante, $\lim_{i \rightarrow \infty} e_{i+1}/e_i^p = C \neq 0$, onde $p = \frac{1}{2}(1+5^{1/2}) \approx 1,618$
- Portanto, esse método é um pouco mais lento que o Método de Newton-Raphson
- Além disso, é importante frisar que pode divergir se $f(x_i) \approx f(x_{i-1})$

Secante: análise geral

- **Vantagens:**
 - Convergência quase tão rápida quanto Newton-Raphson
 - Cálculos mais simples
- **Desvantagens:**
 - Dificuldade para se encontrar as aproximações iniciais
 - Pode divergir se a curva for quase paralela ao eixo das abscissas
- O Método da Bissecção também poderia ser utilizado para se obter as aproximações iniciais

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bissecção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - **Considerações finais**
- Sistemas de equações não lineares

Uma comparação

Função	Raiz	Critério de parada
$f(x) = e^{-x} - \cos x$	$\xi \in (1;2)$	$f(x_i) < 10^{-4}$ ou $ x_i - x_{i-1} < 10^{-4}$

	Bisseccção	Posição Falsa	Ponto Fixo $g(x) = \cos x - e^{-x} + x$	Newton-Raphson	Secante
Dados iniciais	[1;2]	[1;2]	$x_0 = 1,5$	$x_0 = 1,5$	$x_0 = 1; x_1 = 2$
x_i	1,44741821	1,44735707	1,44752471	1,44741635	1,44741345
$f(x_i)$	$2,1921 \cdot 10^{-5}$	$-3,6387 \cdot 10^{-5}$	$7,0258 \cdot 10^{-5}$	$1,3205 \cdot 10^{-6}$	$-5,2395 \cdot 10^{-7}$
Erro em x_i	$6,1035 \cdot 10^{-5}$	$5,5288 \cdot 10^{-1}$	$1,9319 \cdot 10^{-4}$	$1,7072 \cdot 10^{-3}$	$1,8553 \cdot 10^{-4}$
i (iterações)	14	6	6	2	5

Considerações finais

- Critérios de comparação entre os métodos: garantia e rapidez de convergência e esforço computacional
- Convergência:
 - Bisseccção e Posição Falsa: basta que a função seja contínua no intervalo $[a,b]$ e que $f(a) \cdot f(b) < 0$
 - Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secante: condições mais restritivas, mas maior rapidez
- Quando não for difícil verificar as condições de convergência, convém usar o Método de Newton-Raphson; se o cálculo de $f'(x)$ for muito complicado, tentar o Método da Secante

CCI-22

- Introdução
- Enumeração das raízes de um polinômio
- Localização e separação das raízes de um polinômio
- Métodos iterativos
 - Bisseccção
 - Posição Falsa
 - Ponto Fixo
 - Newton-Raphson
 - Secante
 - Considerações finais
- **Sistemas de equações não lineares**

Sistemas de equações não lineares

- Dada uma função não linear $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)^T$, o objetivo é encontrar as soluções de $F(x) = 0$
- Equivalentemente:

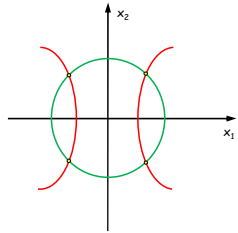
$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

onde $f_i(x)$ é uma função não linear, $1 \leq i \leq n$

Exemplos

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

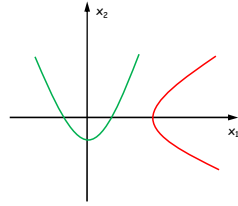
$$f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2/9 - 1 = 0$$



4 soluções

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 0,2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 + 1 = 0$$



Não há soluções

Matriz Jacobiana

- O vetor das derivadas parciais da função $f_i(x_1, \dots, x_n)$, para $1 \leq i \leq n$, é denominado **vetor gradiente** de f_i e será denotado por $\nabla f_i(x)$:

$$\nabla f_i(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right]^T$$

- A matriz $J(x)$ das derivadas parciais de $F(x)$ é chamada de **Matriz Jacobiana**:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \nabla f_2(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_n(x)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Método de Newton

- A resolução de sistemas de equações não lineares mais estudada e conhecida é o **Método de Newton**
- Analogamente ao caso de uma única equação, dada a aproximação $x^{(k)} \in D$, para qualquer $x \in D$ existe $c_i \in D$ tal que $f_i(x) = f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(c_i)^T \cdot (x - x^{(k)})$, onde $1 \leq i \leq n$
- Aproximando $\nabla f_i(c_i)$ por $\nabla f_i(x^{(k)})$, $1 \leq i \leq n$, temos um modelo local para $f_i(x)$ em torno de $x^{(k)}$:
 $f_i(x) \approx f_i(x^{(k)}) + \nabla f_i(x^{(k)})^T \cdot (x - x^{(k)})$, onde $1 \leq i \leq n$
- Consequentemente:
 - $F(x) \approx L_k(x) = F(x^{(k)}) + J(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)})$
 - $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow J(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}) = -F(x^{(k)})$
- Chamando $s^{(k)} = x - x^{(k)}$, temos que $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear $J(x^{(k)}) \cdot s = -F(x^{(k)})$

Exemplo

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix}$$

Soluções: $x^* = [3 \ 0]^T$ e $x^{**} = [0 \ 3]^T$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \quad J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix} \quad J(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1,25 & 7,25 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1,25 & 7,25 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,53125 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 0,533 \\ -0,533 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,533 \\ -0,533 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,092 \\ 3,0917 \end{bmatrix}$$

Método de Newton Modificado

- Sob condições adequadas envolvendo o ponto inicial $x^{(0)}$, a função $F(x)$ e a matriz Jacobiana $J(x)$, a sequência $\{x^{(k)}\}$ gerada pelo Método de Newton converge para a raiz com taxa quadrática
- No entanto, cada iteração exige a resolução do sistema $J(x^{(k)})s = -F(x^{(k)})$, o que compromete seu desempenho
- Uma possível modificação é utilizar a matriz $J(x^{(0)})$ em todas as iterações: desse modo, a sequência $\{x^{(k)}\}$ será gerada através de $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, onde $s^{(k)}$ é solução do sistema linear $J(x^{(0)})s = -F(x^{(k)})$
- A decomposição LU da matriz $J(x^{(0)})$ melhora o desempenho deste novo algoritmo, que é chamado *Método de Newton Modificado*. No entanto, sua taxa de convergência passa a ser linear

Mesmo exemplo

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix} \quad \text{Soluções: } x^* = [3 \ 0]^T \text{ e } x^{**} = [0 \ 3]^T$$
$$J(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

1ª iteração:

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \quad J(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -3 \\ -17 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix}$$

2ª iteração:

$$F(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,53125 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{bmatrix} 0,56640625 \\ -0,56640625 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + s = \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,56640625 \\ -0,56640625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,05859375 \\ 3,05859375 \end{bmatrix}$$