

CCI-22



Matemática Computacional

CCI-22

3) Raízes de Sistemas Lineares

Eliminação de Gauss, Gauss-Jordan,
Decomposição LU, Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

CCI-22

- **Introdução**
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Métodos de resolução

- Para a resolução de um sistema linear de equações, há dois grupos de métodos:
 - Métodos diretos:** a solução é obtida através da aplicação de um número finito de operações aritméticas
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
 - Métodos iterativos:** a solução é obtida através de uma sequência de aproximações sucessivas, até se alcançar uma resposta que satisfaça a precisão exigida
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel

Sistemas de Equações Lineares

- Forma geral:**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

onde:

 - a_{ij} são os coeficientes
 - x_i são as incógnitas
 - b_i são os termos independentes
 - n é a ordem do sistema

- Forma matricial:**

$$Ax = b \quad \text{onde: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Forma geral:**

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 5$$

$$4x_1 + 1x_2 - 5x_3 = 2$$

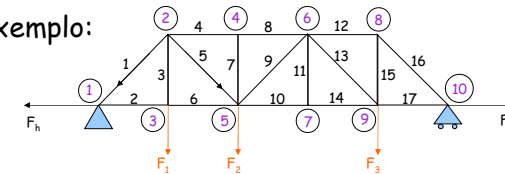
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -1$$

- Forma matricial:**

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cálculo das forças em uma treliça

- Um exemplo:**



- Condições de equilíbrio:**

- Na junção 2:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_1 \cos 45^\circ + f_4 + f_5 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_y = -a f_1 + f_4 + a f_5 = 0 \\ \sum F_y = -a f_1 - f_5 - a f_6 = 0 \end{cases}$$

- Na junção 3:

$$\begin{cases} \sum F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \sum F_y = -F_1 + f_3 = 0 \end{cases}$$

- Idem para demais junções

- Gerará um sistema de ordem 17

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Regra de Cramer

- A aplicação da regra de Cramer, em um sistema de ordem n , exige o cálculo de quantos determinantes?
 - n para os numeradores e 1 para o denominador

$$X_i = \frac{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i-1} & B_2 & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,i-1} & B_i & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,i-1} & A_{1,i} & A_{1,i+1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,i-1} & A_{2,i} & A_{2,i+1} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,i-1} & A_{n,i} & A_{n,i+1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}}$$

Tempo de processamento

- Número m de multiplicações, no caso de 17 equações:

$$\begin{aligned} 18 \det_{17} &= 18 (17m + 17 \det_{16}) \\ &= 18 (17m + 17 (16m + 16 \det_{15})) \\ &= 18 (17m + 17 (16m + 16 (15m + 15 \det_{14}))) \\ &= 18 (17m + 17 (16m + 16 (15m + 15 (14m + \\ &\quad 14 (\dots (3m + 3 (2m) \dots)))))) \end{aligned}$$

multiplicações

Lembrando: $\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \cdot \det A_{-i,-j}$

Tempo de processamento

$$\begin{aligned} &= 18 (17m + 17 (16m + 16 (15m + 15 (14m + \\ &\quad 14 (\dots (3m + 3 (2m) \dots)))))) \\ &= m (2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 17 \times 18 + \\ &\quad + 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 17 \times 18 + \\ &\quad + 4 \times 5 \times \dots \times 17 \times 18 + \\ &\quad + 5 \times \dots \times 17 \times 18 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + 16 \times 17 \times 18 + \\ &\quad + 17 \times 18) \\ &= 18! (1 + (1/2!) + (1/3!) + \dots + (1/16!)) \text{ multiplicações} \\ &\approx 9,6 \times 10^{15} \text{ multiplicações} \end{aligned}$$

Tempo de processamento

- Quantidade de multiplicações: $\approx 9,6 \times 10^{15}$
- Utilizando um supercomputador atual:
 - 10^{11} multiplicações por segundo
 - Tempo gasto: $9,6 \times 10^4 \text{ s} \approx 1 \text{ dia}$
- Se o sistema fosse de ordem 20, exigiria cerca de **28 anos** de processamento nesse mesmo computador!
- Um algoritmo bem mais eficiente é o *Método da Eliminação de Gauss*, que gasta tempo $O(n^3)$

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - **Eliminação de Gauss**
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método da Eliminação de Gauss

- Objetivo
 - Transformação do sistema linear a ser resolvido em um *sistema linear triangular*
- Operações válidas:
 - Troca da ordem das linhas
 - Troca da ordem das colunas (com exceção dos termos independentes)
 - Multiplicação de uma equação por um número real não nulo
 - Substituição de uma equação por uma combinação linear entre ela mesma e outra equação

Sistemas Lineares Triangulares

- Triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Resolução de um sistema triangular

Exemplo:

$$\begin{array}{rccccrc} 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +x_4 & = & -10 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ & & 4x_3 & -5x_4 & = & 3 \\ & & & 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

Passos da resolução:

$$\begin{array}{l} x_4 = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 4x_3 - 5 \cdot 1 = 3 \\ x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ 3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10 \\ x_1 = 1 \end{array}$$

Passos

Considere a matriz aumentada $[Ab]$:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Linha } L_1 \\ \leftarrow \text{Linha } L_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{Linha } L_n \end{array}$$

Passo 1: anular os coeficientes de x_1 nas linhas L_2 a L_n

- Substituir a linha L_2 pela combinação linear:

$$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \text{ onde } m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

- Se $a_{11} = 0$, trocar L_1 com L_k , onde $a_{k1} \neq 0$
 - Se L_k não existir, então o sistema não tem solução
- Continuar analogamente para linhas L_j , $2 < j \leq n$

Passo i, $1 < i < n$: anular os coeficientes de x_i nas linhas L_{i+1} a L_n

Exemplo 1

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{array} \quad [Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2 \quad \begin{array}{l} L_2 = [4 \ 4 \ -3 \ 3] - 2 \cdot [2 \ 3 \ -1 \ 5] \\ L_2 = [0 \ -2 \ -1 \ -7] \end{array}$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1 \quad \begin{array}{l} L_3 = [2 \ -3 \ 1 \ -1] - 1 \cdot [2 \ 3 \ -1 \ 5] \\ L_3 = [0 \ -6 \ 2 \ -6] \end{array}$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

$$\begin{array}{l} L_3 = [0 \ -6 \ 2 \ -6] - 3 \cdot [0 \ -2 \ -1 \ -7] \\ L_3 = [0 \ 0 \ 5 \ 15] \end{array} \quad [Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow 2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 52x_3 &= 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 &= 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 &= 38 \end{aligned} \quad [Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right]$$

Nos cálculos a seguir, consideraremos $F(10,3,-5,5)$:

$$\begin{aligned} L_2 &= L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [27 \ 110 \ -3 \ 134] - (27/1) \cdot [1 \ 4 \ 52 \ 57] \\ L_2 &= [0 \ 2 \ -1400 \ -1410] \\ L_3 &= L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \ 2 \ 14 \ 38] - (22/1) \cdot [1 \ 4 \ 52 \ 57] \\ L_3 &= [0 \ -86 \ -1130 \ -1210] \end{aligned}$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array} \right]$$

Exemplo 2

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & -1210 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} L_3 &= L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \ -86 \ -1130 \ -1210] - (-86/2) \cdot [0 \ 2 \ -1400 \ -1410] \\ L_3 &= [0 \ 0 \ -61300 \ -61800] \end{aligned}$$

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{array} \right]$$

No entanto, a solução exata é:

$$x_3 = -61800 / (-61300) = 1,01$$

$$x_2 = [-1410 - (-1400) \cdot 1,01] / 2 = 0,0$$

$$x_1 = [57 - 52 \cdot 1,01 - 4 \cdot 0,0] / 1 = 4,5$$

$$\bullet x_1 = 1$$

$$\bullet x_2 = 1$$

$$\bullet x_3 = 1$$

Pivoteamentos parcial e completo

- Pivôs pequenos geram multiplicadores grandes, que aumentam os erros de arredondamento...
- Uma simples alteração no método de Gauss é escolher como pivô o elemento de maior módulo:
 - em cada coluna (pivoteamento parcial)
 - dentre todos os elementos possíveis no processo de eliminação (pivoteamento completo): exige um maior esforço computacional
- Voltamos a resolver o exemplo anterior com precisão de 3 casas decimais, mas com pivoteamento parcial:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{array} \right]$$

Exemplo 2 com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} L_2 &= L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [27 \ 110 \ -3 \ 134] - (1/27) \cdot [27 \ 110 \ -3 \ 134] \\ L_2 &= [0 \ -0,07 \ 52,1 \ 52] \\ L_3 &= L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [22 \ 2 \ 14 \ 38] - (22/27) \cdot [27 \ 110 \ -3 \ 134] \\ L_3 &= [0 \ -87,6 \ 16,5 \ -71] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0,07 & 52,1 & 52 \\ 0 & -87,6 & 16,5 & -71 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87,6 & 16,5 & -71 \\ 0 & -0,07 & 52,1 & 52 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} L_3 &= L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \ -0,07 \ 52,1 \ 52] - (0,07/87,6) \cdot [0 \ -87,6 \ 16,5 \ -71] \\ L_3 &= [0 \ 0 \ 52,1 \ 52,1] \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87,6 & 16,5 & -71 \\ 0 & 0 & 52,1 & 52,1 \end{array} \right]$$

$$x_3 = 52,1/52,1 = 1$$

$$x_2 = [-71 - 16,5 \cdot 1] / (-87,6) = 0,999$$

$$x_1 = [134 - (-3) \cdot 1 - 110 \cdot 0,999] / 27 = 1,00$$

Exercício

- Considere o sistema linear abaixo:

$$0,0002x_1 + 2x_2 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

- Utilizando aritmética de três dígitos decimais, resolva-o através da eliminação de Gauss:
 - sem pivoteamento parcial
 - com pivoteamento parcial
- Confira os resultados encontrados

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema com a finalidade de transformá-lo em um *sistema diagonal equivalente*, isto é, são nulos todos os coeficientes a_{ik} , quando $i \neq k$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned} \quad [Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1 \ 5 \ 1 \ 1] - (1/5) \cdot [5 \ 2 \ 3 \ 2]$$

$$L_2 = [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2 \ 3 \ 2 \ 4] - (2/5) \cdot [5 \ 2 \ 3 \ 2]$$

$$L_3 = [0 \ 2,2 \ 0,8 \ 3,2]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 2,2 & 0,8 & 3,2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 2,2 & 0,8 & 3,2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \ 2,2 \ 0,8 \ 3,2] - (2,2/4,6) \cdot [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6]$$
$$L_3 = [0 \ 0 \ 0,609 \ 2,913]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_2 - m_{23} \cdot L_3 = [0 \ 4,6 \ 0,4 \ 0,6] - (0,4/0,609) \cdot [0 \ 0 \ 0,609 \ 2,913]$$
$$L_2 = [0 \ 4,6 \ 0 \ -1,313]$$

Exemplo

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = [5 \ 2 \ 3 \ 1] - (2/4,6) \cdot [0 \ 4,6 \ 0 \ -1,313]$$

$$L_1 = [5 \ 0 \ 3 \ 1,571]$$

$$L_1 = [5 \ 0 \ 3 \ 1,571] - (3/0,609) \cdot [0 \ 0 \ 0,609 \ 2,913]$$

$$L_1 = [5 \ 0 \ 0 \ -12,78]$$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -12,78 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

A solução é:

- $x_1 = -2,556$
- $x_2 = -0,2854$
- $x_3 = 4,783$

Outra aplicação

- Uma variação do método de Gauss-Jordan pode ser utilizada para se encontrar a inversa de uma matriz A quadrada de ordem n
- Basta transformar a matriz A na correspondente matriz identidade, aplicando essas mesmas operações em uma matriz identidade de ordem n

$$[A|I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I|A^{-1}]$$

Refinamento por resíduos

- Se $x^{(1)}$ for encontrado como solução do sistema $Ax = b$, então o erro dessa solução é $x - x^{(1)}$
- Multiplicando o erro por A :
 - $A(x - x^{(1)}) = Ax - Ax^{(1)} = b - b^{(1)} = r^{(1)}$ — **resíduo**
- O resíduo pode ser utilizado para se encontrar uma solução melhorada $x^{(2)}$:
 - $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$, onde $\delta^{(1)}$ é um vetor de correção
 - $Ax^{(2)} = b \Leftrightarrow A(x^{(1)} + \delta^{(1)}) = b \Leftrightarrow A\delta^{(1)} = b - Ax^{(1)} = r^{(1)}$
 - $\delta^{(1)}$ é solução do sistema $A\delta = r^{(1)}$
- Esses cálculos permitem um processo de refinamento da solução do sistema $Ax = b$

Exemplo

- Vamos refinar o sistema abaixo:

$$87x_1 + 30x_2 + 93x_3 + 110x_4 = 164$$

$$245x_1 - 88x_2 + 115x_3 - 451x_4 = -497$$

$$533x_1 - 88x_2 - 235x_3 + 114x_4 = -808$$

$$210x_1 - 810x_2 - 132x_3 + 215x_4 = -1063$$

- Através do método de Gauss, podemos encontrar a solução abaixo:

$$x^{(1)} = [0,97 \quad 1,98 \quad -0,97 \quad 1,00]^T$$

- Cálculo do resíduo:

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,214 \\ 0,594 \\ -0,594 \end{bmatrix}$$

Não está bom...

Exemplo

- Cálculo do vetor de correção $\delta^{(1)}$:

$$\begin{bmatrix} 8,7 & 3,0 & 9,3 & 11,0 \\ 24,5 & -8,8 & 11,5 & -45,1 \\ 53,3 & -8,8 & -23,5 & 11,4 \\ 21,0 & -81,0 & -13,2 & 21,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,214 \\ 0,594 \\ -0,594 \end{bmatrix}$$

- Solução:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0295 \\ 0,0195 \\ -0,0294 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

- Solução melhorada:

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 2,0000 \\ -0,9999 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Novo resíduo:

$$r^{(2)} = b - Ax^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,009 \\ -0,011 \\ 0,024 \\ 0,013 \end{bmatrix}$$

Melhor que o anterior

- Cálculo do novo vetor de correção:

$$\delta^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ -0,0002 \\ -0,0007 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

- Outra solução melhorada:

$$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 2,0000 \\ -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

- Novo resíduo:

$$r^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melhor aproximação

- Dado um sistema $Ax = b$, sejam y e z duas aproximações da solução exata x . Como saber qual delas é a melhor?
- A estratégia mais lógica parece ser comparar os respectivos resíduos: o menor seria da melhor solução
- Infelizmente, isso nem sempre é verdade...

- Exemplo:

$$\begin{cases} 0,24x_1 + 0,36x_2 + 0,12x_3 = 0,84 \\ 0,12x_1 + 0,16x_2 + 0,24x_3 = 0,52 \\ 0,15x_1 + 0,21x_2 + 0,25x_3 = 0,64 \end{cases} \quad y = \begin{bmatrix} 25 \\ -14 \\ -1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_y = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,08 \end{bmatrix} \quad r_z = \begin{bmatrix} 0,12 \\ 0,24 \\ 0,25 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Conclusão: nem sempre a aproximação de menor resíduo é a melhor ou a mais exata
- Se a busca por resíduos menores não garante melhores soluções, como saber se o processo de refinamento por resíduos funciona?

Condicionamento de problemas

- Um problema é dito mal condicionado se pequenas alterações nos dados de entrada ocasionam grandes erros no resultado final

- Exemplo:

$$\begin{cases} 0,992x + 0,873y = 0,119 \\ 0,481x + 0,421y = 0,060 \end{cases} \quad \text{Solução: } x=1 \text{ e } y=-1$$

- Suponha que os valores desse sistema sejam obtidos experimentalmente, e por isso os termos independentes possam variar de $\pm 0,001$:

$$\begin{cases} 0,992x + 0,873y = 0,120 \\ 0,481x + 0,421y = 0,060 \end{cases} \quad \text{Solução: } x=0,815 \text{ e } y=-0,789$$

Valor perturbado

Erro na entrada: $(|0,119 - 0,120| / |0,119|) \approx 0,8\%$

Erro no resultado: $(|1,0 - 0,815| / |1,0|) \approx 18,5\%$

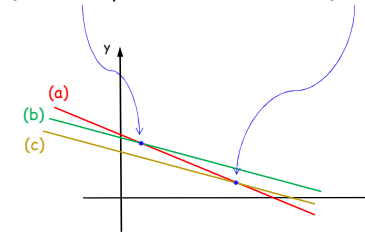
Outro exemplo

- Considere os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} x + 3y = 11 & (a) \\ 15x + 450y = 16503 & (b) \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 11 & (a) \\ 15x + 450y = 16500 & (c) \end{cases}$$

Solução: $x=2$ e $y=3$

Solução: $x=10,28$ e $y=0,24$



Métricas de condicionamento

- Há métricas para o condicionamento de sistemas lineares, baseadas em normas de vetores e matrizes (vide Cláudio & Marins)
- No entanto, esses cálculos são difíceis...
- Também é possível identificar o condicionamento de um sistema linear apenas com o uso dos refinamentos:
 - Se os resíduos $r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n)}$ são pequenos, mas as correções $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \dots, \delta^{(n)}$ são grandes, então o sistema é mal condicionado
 - Para sistemas bem condicionados, bastam no máximo dois refinamentos (ou seja, $\delta^{(2)}$ é muito pequeno)
- Ao longo desse processo, os resíduos e as correções devem ser calculados com precisão dupla

Exemplo

- Considere o sistema abaixo em $F(10,5,-98,100)$:

$$\begin{cases} 2475x_1 + 16235x_2 + 46231x_3 = 0,064701 \\ 14725x_1 + 0,95890x_2 - 13253x_3 = 1,0473 \\ 26951x_1 + 28965x_2 - 14794x_3 = -0,6789 \end{cases} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 18406 \\ -20717 \\ -02441 \end{bmatrix}$$

- Primeiro refinamento em $F(10,10,-98,100)$:

$$r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,0648 \\ 1,0473 \\ -0,6789 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,064821801 \\ 1,047355377 \\ -0,678823304 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,000121801 \\ -0,000055377 \\ -0,000076696 \end{bmatrix} \quad \text{Resíduos pequenos}$$

- Resolução de $A\delta^{(1)} = r^{(1)}$:

$$\delta^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,0000042282 \\ 0,000025110 \\ -0,000057765 \end{bmatrix} \quad \text{Correções pequenas}$$

- Solução melhorada $x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$:

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 18405 \\ -20717 \\ -02441 \end{bmatrix}$$

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - **Decomposição LU**
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Uma outra forma de ver...

- Consideremos o sistema de 3 equações $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = A^{(0)} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Após a primeira fase da eliminação de Gauss:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = M^{(0)} \cdot A^{(0)}, \quad \text{onde } M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Após a segunda fase da eliminação de Gauss:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = M^{(1)} \cdot A^{(1)}, \quad \text{onde } M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Uma outra forma de ver...

- Resumindo:
 - $A = A^{(0)}$
 - $A^{(1)} = M^{(0)} \cdot A^{(0)} = M^{(0)} \cdot A$
 - $A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A^{(1)} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot A$
 - $A = (M^{(1)} \cdot M^{(0)})^{-1} \cdot A^{(2)}$
 - $A = (M^{(0)})^{-1} \cdot (M^{(1)})^{-1} \cdot A^{(2)}$

- É fácil comprovar que:

$$(M^{(0)})^{-1} \cdot (M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Portanto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = L \cdot U$$

Decomposição LU

- A comprovação anterior pode ser generalizada em um teorema

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- Dada uma matriz quadrada de ordem n , seja A_k a matriz constituída das primeiras k linhas e colunas de A . Suponha que $\det(A_k) \neq 0$, $0 \leq k \leq n-1$. Então:
 - Existe uma única matriz triangular inferior $L=(m_{ij})$, com $m_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$. Os demais são os multiplicadores da Eliminação de Gauss
 - Existe uma única matriz triangular superior $U=(u_{ij})$, tais que $L \cdot U = A$
 - $\det(A) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \dots \cdot u_{nn}$

Decomposição LU

- Portanto, dados o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição (ou fatoração) LU da matriz A , temos:
 - $Ax = b \Leftrightarrow (L.U)x = b$
- Chamando $Ux = y$, o sistema original passa a ser $Ly = b$, ou seja, surgem dois sistemas triangulares
- Por outro lado, é fácil verificar que $y = L^{-1}.b$ é o vetor b acumulando as operações da Eliminação de Gauss
- Por exemplo, no caso de um sistema com 3 equações:
 - Como $L = (M^{(0)})^{-1}.(M^{(1)})^{-1}$, então $L^{-1} = M^{(1)}.M^{(0)}$
 - Portanto, $y = M^{(1)}.M^{(0)}.b$
- Vantagem da decomposição $A = L.U$: uma vez calculadas as matrizes L e U , resolvemos mais rapidamente qualquer sistema com a matriz A . Isso é útil, por exemplo, no refinamento por resíduos

Exemplo

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

multiplicadores

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{array} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow LUx = b$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{array} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -4x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Outra aplicação

- A decomposição LU também é útil no cálculo da matriz inversa
- Resolver o sistema $AX = B$, onde A , X e B são matrizes de ordem n , é o mesmo que resolver n sistemas $Ax = b$, onde x e b são vetores de tamanho n
- A inversa A^{-1} da matriz A pode ser encontrada através da resolução do sistema $AX = I$, onde I é a matriz identidade
- Nesse caso, basta realizar uma única vez a decomposição LU da matriz A , e depois utilizá-la na resolução de n sistemas

Decomposição LU com pivoteamento

- É possível incorporar as estratégias de pivoteamento parcial ou completo à decomposição LU
- Uma matriz quadrada P de ordem n é uma *matriz de permutação* se for obtida da correspondente matriz identidade através de permutações em suas linhas ou colunas
- As eventuais permutações de linhas ou colunas na matriz $A^{(k)}$, obtida em um passo intermediário da Eliminação de Gauss, podem ser realizadas através da multiplicação por uma matriz de permutação
- Exemplo:

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad P A^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(0)} = P^{(0)} \cdot A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \quad P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = P^{(1)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3/4 & -4 & 13/4 \\ 1/4 & -1/2 & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

- $LU = A' = P \cdot A$, onde $P = P^{(1)} P^{(0)}$:

$$A' = P \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- $A'x = b' \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb$

Exemplo com pivoteamento parcial

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= -2 \end{aligned} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow LUx = Pb$$

$$Ly = Pb \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 21/2 \\ 35/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jacobi

- Dessa forma, para $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Exemplos de critérios de parada:
 - Erro absoluto: $d^{(k)} = \max_i |x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon$
 - Erro relativo: $d_r^{(k)} = d^{(k)}/(\max_i |x^{(k)}|) < \varepsilon$

Exemplo

$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = 0,05 \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = Cx^{(0)} + g = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0,26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,26 \quad d_r^{(1)} = 0,34/(\max |x_i^{(1)}|) = 0,1828 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,34$$

Exemplo

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 7/10 \\ 8/5 \\ 6/10 \end{bmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g = \begin{bmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{bmatrix} \quad d_r^{(2)} = 0,12/1,98 = 0,0606 > \varepsilon$$

$$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g = \begin{bmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{bmatrix} \quad d_r^{(3)} = 0,0324/1,9888 = 0,0163 < \varepsilon$$

Critério das linhas

- Em um método iterativo, a convergência para a solução exata não é garantida: é preciso que o sistema satisfaça alguns requisitos
- Há uma condição suficiente para a convergência do Método de Gauss-Jacobi, conhecido como o *critério das linhas*:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \text{para } i=1,2,\dots,n$$

Exemplos

- Considere o exemplo anterior:

$$\left. \begin{array}{l} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \quad \leftarrow 2+1 < 10 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \quad \leftarrow 1+1 < 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \quad \leftarrow 2+3 < 10 \end{array} \right\} \text{Garantia de converg\~{e}ncia}$$

- Considere o exemplo abaixo:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \quad \leftarrow 1 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \quad \leftarrow 1 < 3 \end{array} \right\} \text{N\~{a}o h\~{a} garantia de converg\~{e}ncia}$$

- No entanto, o m\~{e}todo de Gauss-Jacobi converge neste sistema para a solu\~{c}\~{a}o exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
- Isso mostra que o crit\~{e}rio das linhas \u00e9 suficiente, mas n\~{a}o necess\u00e1rio

Demonstra\~{c}\~{a}o

- Sejam:

- $x^* = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: a solu\~{c}\~{a}o exata de $Ax = b$
- $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_n]^T$: a k -\u00e9sima aproxima\~{c}\~{a}o de x^*
- $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: o erro na k -\u00e9sima aproxima\~{c}\~{a}o

- Queremos garantir que $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)}_i = 0, 1 \leq i \leq n$

- No M\u00e9todo de Gauss-Jacobi, pode-se constatar que:

- $e^{(k+1)}_1 = -(a_{12}e^{(k)}_2 + a_{13}e^{(k)}_3 + \dots + a_{1n}e^{(k)}_n)/a_{11}$
- $e^{(k+1)}_2 = -(a_{21}e^{(k)}_1 + a_{23}e^{(k)}_3 + \dots + a_{2n}e^{(k)}_n)/a_{22}$
- $e^{(k+1)}_n = -(a_{n1}e^{(k)}_1 + a_{n2}e^{(k)}_2 + \dots + a_{n(n-1)}e^{(k)}_{n-1})/a_{nn}$

- Sejam:

- $E^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |e^{(k)}_i| \}$
- $\alpha_i = (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|)/|a_{ii}|, 1 \leq i \leq n$
Quando o crit\~{e}rio das linhas \u00e9 satisfeito, $\alpha_i < 1$

Demonstra\~{c}\~{a}o (continua\~{c}\~{a}o)

- Quando $k \rightarrow \infty, x^{(k)} \rightarrow x^*$ \u00e9 equivalente a $E^{(k)} \rightarrow 0$
- Demonstraremos que $E^{(k+1)} \leq \alpha \cdot E^{(k)}$, onde $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \alpha_i \}$

- Para $1 \leq i \leq n$:

- $e^{(k+1)}_i = -(a_{i1}e^{(k)}_1 + \dots + a_{i(i-1)}e^{(k)}_{i-1} + a_{i(i+1)}e^{(k)}_{i+1} + \dots + a_{in}e^{(k)}_n)/a_{ii}$
- $|e^{(k+1)}_i| \leq (|a_{i1}| \cdot |e^{(k)}_1| + \dots + |a_{i(i-1)}| \cdot |e^{(k)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}| \cdot |e^{(k)}_{i+1}| + \dots + |a_{in}| \cdot |e^{(k)}_n|)/|a_{ii}|$
- $|e^{(k+1)}_i| \leq (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) \cdot E^{(k)}/|a_{ii}|$
- $|e^{(k+1)}_i| \leq \alpha_i \cdot E^{(k)}$

- Portanto, $E^{(k+1)} \leq \alpha \cdot E^{(k)}$

- Consequentemente, $E^{(k+1)}/E^{(k)} \leq \alpha$

Como $\alpha < 1$, ent\~{a}o $E^{(k)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$: h\u00e1 converg\~{e}ncia!

Mais um exemplo

- Considere o sistema a seguir:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \quad \leftarrow 3+1 > 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad \leftarrow 5+2 > 2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \quad \leftarrow 6 < 8 \end{array} \right\} \text{N\~{a}o h\~{a} garantia de converg\~{e}ncia}$$

- No entanto, uma permuta\~{c}\~{a}o entre as duas primeiras linhas garante a converg\~{e}ncia:

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \quad \leftarrow 2+2 < 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \quad \leftarrow 1+1 < 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \quad \leftarrow 6 < 8 \end{array} \right\} \text{Garantia de converg\~{e}ncia}$$

- Quando o crit\~{e}rio das linhas n\~{a}o for satisfeito, conv\u00e9m tentar uma permuta\~{c}\~{a}o de linhas e/ou colunas

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- Considerações finais

Método de Gauss-Seidel

- Analogamente ao Método de Gauss-Jacobi, calcula-se $x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

- No entanto, utiliza-se no cálculo de $x_j^{(k+1)}$:
 - valores calculados na mesma iteração: $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$
 - valores da iteração anterior: $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$

Exemplo

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \varepsilon = 0,05 \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Processo iterativo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1 - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1,5 - 0,75x_1^{(k+1)} - 0,25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -0,5x_1^{(k+1)} - 0,5x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 1 - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 1,5 - 0,75x_1^{(k+1)} - 0,25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -0,5x_1^{(k+1)} - 0,5x_2^{(k+1)} \end{aligned}$$

- Primeira iteração (k=0):

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} &= 1,5 - 0,75 \cdot 1 - 0 = 0,75 \\ x_3^{(1)} &= -0,5 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,75 = -0,875 \end{aligned} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0,75 \quad d_r^{(1)} = 1/(\max |x_i^{(1)}|) = 1 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0,875$$

Exemplo

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= 1 - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} \\x_2^{(k+1)} &= 1,5 - 0,75x_1^{(k+1)} - 0,25x_3^{(k)} \\x_3^{(k+1)} &= -0,5x_1^{(k+1)} - 0,5x_2^{(k+1)}\end{aligned}$$

- Segunda iteração (k=1):

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= 1 - 0,2 \cdot 0,75 - 0,2 \cdot (-0,875) = 1,025 \\x_2^{(2)} &= 1,5 - 0,75 \cdot 1,025 - 0,25 \cdot (-0,875) = 0,95 \\x_3^{(2)} &= -0,5 \cdot 1,025 - 0,5 \cdot 0,95 = -0,9875\end{aligned} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{bmatrix}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0,025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0,20 \quad d_r^{(2)} = 0,2 / (\max |x_i^{(2)}|) = 0,1951 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0,1125$$

Exemplo

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= 1 - 0,2x_2^{(k)} - 0,2x_3^{(k)} \\x_2^{(k+1)} &= 1,5 - 0,75x_1^{(k+1)} - 0,25x_3^{(k)} \\x_3^{(k+1)} &= 0 - 0,5x_1^{(k+1)} - 0,5x_2^{(k+1)}\end{aligned}$$

- Terceira iteração (k=2):

$$\begin{aligned}x_1^{(3)} &= 1 - 0,2 \cdot 0,95 - 0,2 \cdot (-0,9875) = 1,0075 \\x_2^{(3)} &= 1,5 - 0,75 \cdot 1,0075 - 0,25 \cdot (-0,9875) = 0,9912 \\x_3^{(3)} &= -0,5 \cdot 1,0075 - 0,5 \cdot 0,9912 = -0,9993\end{aligned} \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{bmatrix}$$

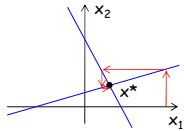
$$|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0,0175$$

$$|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0,0412 \quad d_r^{(3)} = 0,0412 / (\max |x_i^{(3)}|) = 0,0409 < \varepsilon$$

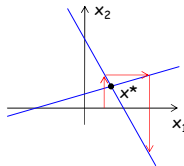
$$|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0,0118$$

Interpretação geométrica

- No caso de um sistema linear de ordem 2, é possível visualizar a convergência do método:



- Os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ satisfazem a primeira equação, enquanto os pontos $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ satisfazem a segunda



- No mesmo sistema, a convergência pode não ocorrer...

Critério de Sassenfeld

- Sejam os seguintes valores:

$$\beta_1 = \left| \frac{1}{a_{11}} \cdot \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \right|$$

$$\beta_i = \left| \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \cdot \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right] \right|, \text{ para } 1 < i \leq n$$

$$\beta = \max \{ \beta_j \}, 1 \leq j \leq n$$

- Se $\beta < 1$, então o Método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$
 - Quanto menor for β , mais rápida será a convergência

Exemplo

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 0,2x_3 + 0,2x_4 &= 0,4 \\ 0,6x_1 + 3x_2 - 0,6x_3 - 0,3x_4 &= -7,8 \\ -0,1x_1 - 0,2x_2 + x_3 + 0,2x_4 &= 1,0 \\ 0,4x_1 + 1,2x_2 + 0,8x_3 + 4x_4 &= -10,0 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,2 + 0,2) = 0,7$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3} \cdot (0,6 \cdot 0,7 + 0,6 + 0,3) = 0,44$$

$$\beta_3 = \frac{1}{1} \cdot (0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,44 + 0,2) = 0,358$$

$$\beta_4 = \frac{1}{4} \cdot (0,4 \cdot 0,7 + 1,2 \cdot 0,44 + 0,8 \cdot 0,358) = 0,2736$$

$$\beta = 0,7 < 1$$

Demonstração

- Sejam:
 - $x^* = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: a solução exata de $Ax = b$
 - $x^{(k)} = [x^{(k)}_1, x^{(k)}_2, \dots, x^{(k)}_n]^T$: a k -ésima aproximação de x^*
 - $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$: o erro na k -ésima aproximação
- Queremos garantir que $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)}_i = 0, 1 \leq i \leq n$
- No Método de Gauss-Seidel, pode-se constatar que:
 - $e^{(k+1)}_1 = -(a_{12}e^{(k)}_2 + a_{13}e^{(k)}_3 + \dots + a_{1n}e^{(k)}_n)/a_{11}$
 - $e^{(k+1)}_2 = -(a_{21}e^{(k+1)}_1 + a_{23}e^{(k)}_3 + \dots + a_{2n}e^{(k)}_n)/a_{22}$
 - $e^{(k+1)}_n = -(a_{n1}e^{(k+1)}_1 + a_{n2}e^{(k+1)}_2 + \dots + a_{n(n-1)}e^{(k+1)}_{n-1})/a_{nn}$
- Sejam:
 - $E(k) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|e^{(k)}_i|\}$
 - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|)/|a_{11}|$
 - $\beta_i = (\beta_{i-1} \cdot |a_{i1}| + \dots + \beta_{i-1} \cdot |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|)/|a_{ii}|, 1 < i \leq n$

Demonstração (continuação)

- Quando $k \rightarrow \infty, x^{(k)} \rightarrow x^*$ é equivalente a $E^{(k)} \rightarrow 0$
- Demonstraremos por indução em i ($1 \leq i \leq n$) que $E^{(k+1)} \leq \beta \cdot E^{(k)}$, onde $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\}$
- Base ($i=1$):
 - $|e^{(k+1)}_1| \leq (|a_{12}| \cdot |e^{(k)}_2| + |a_{13}| \cdot |e^{(k)}_3| + \dots + |a_{1n}| \cdot |e^{(k)}_n|)/|a_{11}|$
 - $|e^{(k+1)}_1| \leq [(|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|)/|a_{11}|] \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{|e^{(k)}_i|\}$
 - $|e^{(k+1)}_1| \leq \beta_1 \cdot E^{(k)} \leq \beta \cdot E^{(k)}$
 - Hipótese: $|e^{(k+1)}_{i-1}| \leq \beta_{i-1} \cdot E^{(k)} \leq \beta \cdot E^{(k)}$
- Passo:
 - $|e^{(k+1)}_i| \leq (|a_{i1}| \cdot |e^{(k+1)}_1| + \dots + |a_{i(i-1)}| \cdot |e^{(k+1)}_{i-1}| + |a_{i(i+1)}| \cdot |e^{(k)}_{i+1}| + \dots + |a_{in}| \cdot |e^{(k)}_n|)/|a_{ii}|$
 - $|e^{(k+1)}_i| \leq (|a_{i1}| \cdot \beta_1 + \dots + |a_{i(i-1)}| \cdot \beta_{i-1} + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) \cdot E^{(k)}/|a_{ii}|$
 - $|e^{(k+1)}_i| \leq \beta_i \cdot E^{(k)} \leq \beta \cdot E^{(k)}$
- Portanto, $E^{(k+1)}/E^{(k)} \leq \beta$
- Como $\beta < 1$, então $E^{(k)} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$: há convergência!

Exemplos

- Considere o sistema abaixo, anteriormente visto:

$x_1 + x_2 = 3$	$\beta_1 = 1/1 = 1$	}	Não há garantia de convergência
$x_1 - 3x_2 = -3$	$\beta_2 = (1,1)/3 = 1/3$		
	$\beta = 1$		
- No entanto, o Método de Gauss-Seidel converge neste sistema para a solução exata $x_1 = x_2 = 3/2$. Verifique!
- Isso mostra que o critério de Sassenfeld, como o critério das linhas, é suficiente, mas não necessário
- Considere outro sistema:

$10x_1 + x_2 = 23$	$\beta_1 = 1/10 = 0,1$
$6x_1 - 2x_2 = 18$	$\beta_2 = (6,0,1)/2 = 0,3$
	$\beta = 0,3 < 1$
- Neste caso, o critério de Sassenfeld garante a convergência, mas o critério das linhas, não...

CCI-22

- Introdução
- Métodos diretos
 - Regra de Cramer
 - Eliminação de Gauss
 - Gauss-Jordan
 - Decomposição LU
- Métodos iterativos
 - Gauss-Jacobi
 - Gauss-Seidel
- **Considerações finais**

Relação entre os critérios

- Se um sistema satisfaz o critério das linhas, então também satisfará o critério de Sassenfeld
- Demonstração:
 - Seja $\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\} < 1$, onde $\alpha_i = (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}|$
 - Vamos provar por indução em i que $\beta_i \leq \alpha_i < 1, 1 \leq i \leq n$
 - Base ($i=1$):
 - $\beta_1 = (|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|) / |a_{11}| = \alpha_1 < 1$
 - Hipótese: $\beta_i \leq \alpha_i < 1, 1 \leq i < n$
 - Passo ($1 \leq i \leq n$):
 - $\beta_i = (\beta_1 \cdot |a_{i1}| + \dots + \beta_{i-1} \cdot |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}|$
 - $\beta_i \leq (|a_{i1}| + \dots + |a_{i(i-1)}| + |a_{i(i+1)}| + \dots + |a_{in}|) / |a_{ii}| = \alpha_i < 1$
 - Portanto, $\alpha < 1 \Rightarrow \beta < 1$
- A volta nem sempre é verdadeira...

Considerações finais

- Tanto o critério das linhas como o critério de Sassenfeld são condições *suficientes* para a convergência, mas não *necessárias*
- Em sistemas esparsos (com grande número de coeficientes nulos), o Método da Eliminação de Gauss não é apropriado, pois não preserva esta vantajosa qualidade. Nesses casos, convém utilizar métodos iterativos
- Os métodos iterativos são menos suscetíveis ao acúmulo de erros de arredondamento

Métodos diretos versus iterativos

- Convergência
 - Diretos: não faz sentido considerar essa questão, pois calculam a solução exata
 - Iterativos: ocorre sob determinadas condições
- Esparsidade da matriz de coeficientes
 - Diretos: alteram a estrutura da matriz
 - Iterativos: utilizam sempre a matriz inicial
- Erros de arredondamento
 - Diretos: ocorrem a cada etapa e acumulam-se
 - Iterativos: somente os erros da última etapa afetam a solução