

CCI-22



Matemática Computacional

Carlos Henrique Q. Forster

CCI-22

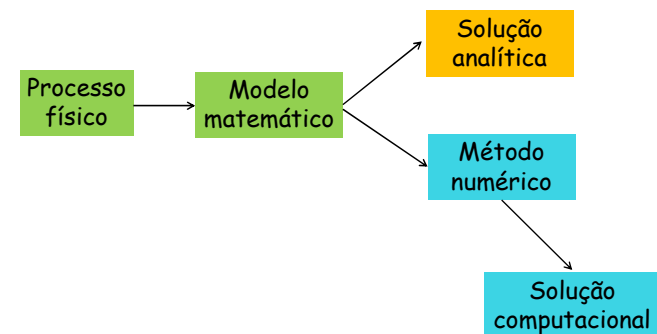
Introdução e Motivação

Conteúdo, Avaliação, Bibliografia

Conteúdo

- Em muitas universidades, este curso costuma ser chamado de *Cálculo Numérico*
- Corresponde a um conjunto de ferramentas ou métodos para a obtenção de uma *solução aproximada* de problemas matemáticos
- Exemplos: raízes de equações, interpolação de valores coletados, integração numérica, etc.
- Sua aplicação refere-se a problemas numéricos que não possuem uma solução exata

Finalidade



Justificativas

- Em alguns problemas, a resolução analítica é impraticável
 - Exemplo: sistemas lineares com muitas variáveis
- Há problemas que não podem ser resolvidos analiticamente
 - Exemplo: determinadas integrais e equações diferenciais
- Nos problemas reais, os dados são medidas físicas não exatas, com erros inerentes
 - É preciso considerar suas aproximações

Um caso real

- Em 04/06/1996, na Guiana Francesa, o lançamento do foguete Ariane 5 falhou por uma limitação da representação numérica (quantidade insuficiente de bits)
- Houve um erro na trajetória, 36,7 segundos após o lançamento, seguido de explosão
- Prejuízo: US\$ 7,5 bilhões



Plano do curso

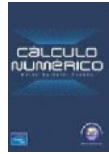
- Primeiro bimestre:
 - Representação numérica, erros e arredondamento
 - Zeros de funções
 - Raízes de sistemas de equações lineares
- Segundo bimestre:
 - Equações Diferenciais Ordinárias (lineares e não-lineares)
 - Ajuste de curvas
 - Interpolação polinomial
 - Integração e diferenciação numéricas

Avaliação

- 1 prova bimestral
- 1 projeto de laboratório bimestral
- Pesos:
 - Prova: 60%
 - Projeto: 40%
- Os trabalhos devem ser feitos em grupos de 2 ou 3 pessoas. A forma de entrega do relatório será definida. Código-fonte não é considerado resultado (tabelas e gráficos sim). Pode haver troca de informação entre equipes desde que sua ocorrência seja devidamente relatada e justificada.
- Eventuais atividades em sala podem participar da composição da nota quando assim estabelecido.

Bibliografia

- Neide Bertoldi Franco
Cálculo Numérico
Pearson - Prentice Hall Makron Books



Bibliografia

- M.A.G. Ruggiero e V.L.R. Lopes
Cálculo Numérico
Aspectos Teóricos e Computacionais
Pearson Makron Books



- D.M. Cláudio e J.M. Marins
Cálculo Numérico Computacional
Teoria e Prática
Atlas



Bibliografia complementar

- Frederico Ferreira Campos, filho
Algoritmos Numéricos
LTC



- S.C. Chapra e R.P. Canale
Métodos Numéricos para Engenharia
McGraw-Hill



CCI-22

1) Representações numéricas

Sistemas de Numeração, Mudanças de Base, Representações

CCI-22

- Sistemas de numeração
 - Bases: decimal, binária, etc.
 - Números fracionários
 - Mudanças de base
- Representação de números
 - Inteiros
 - Reais

CCI-22

- Sistemas de numeração
 - Bases: decimal, binária, etc.
 - Números fracionários
 - Mudanças de base
- Representação de números
 - Inteiros
 - Reais

Sistemas de numeração

- Base decimal
 - 10 dígitos disponíveis: 0, 1, 2, ..., 9
 - "Posição" indica a potência positiva de 10
 - Exemplo:
 - $5432 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
- Base binária: é análogo
 - 2 dígitos (*binary digits*): 0, 1
 - "Posição" indica potência positiva de 2
 - Exemplo:
 - $1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8+0+2+1 = 11_{10}$

CCI-22

- Sistemas de numeração
 - Bases: decimal, binária, etc.
 - Números fracionários
 - Mudanças de base
- Representação de números
 - Inteiros
 - Reais

Números fracionários

- Base decimal
 - Potência negativa de 10 para parte fracionária
 - Exemplo:
 - $54,32 = 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$
- Base binária: também é análogo
 - Potência negativa de 2 para parte fracionária
 - Exemplo:
 - $(10,11)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$
 - $(10,11)_2 = 2 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = (2,75)_{10}$
- Idem para outras bases: octal, hexadecimal, etc.

CCI-22

- Sistemas de numeração
 - Bases: decimal, binária, etc.
 - Números fracionários
 - Mudanças de base
- Representação de números
 - Inteiros
 - Reais

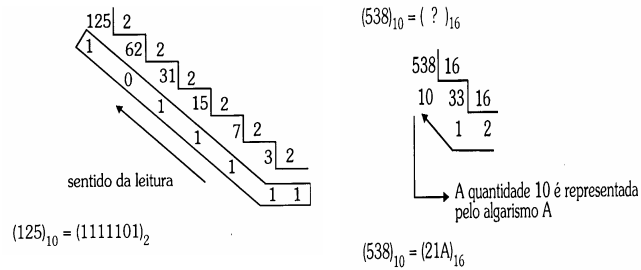
Conversão ou mudança de base

- Uma caixa alienígena com o número 25 gravado na tampa foi entregue a um grupo de cientistas. Ao abrirem a caixa, encontraram 17 objetos. Considerando que o alienígena tem um formato humanóide, quantos dedos deverá ter nas duas mãos?
- Solução:
 - $(17)_{10} = (25)_b$
 - $17 = 2 \cdot b^1 + 5 \cdot b^0$
 - $17 = 2b + 5$
 - $b = 6$

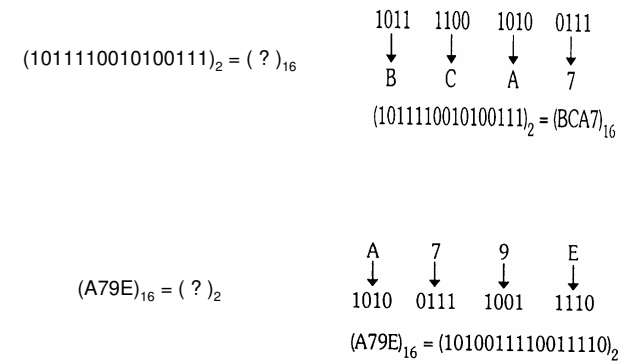
Outro exemplo

- Um sistema de numeração ternário tem três trits, que podem ter valor 0, 1 ou 2. Quantos trits são necessários para representar um número de seis bits?
- Solução:
 - $2^6 = 64 \leq 3^y$
 - $6 \cdot \log_2 2 \leq y \cdot \log_2 3$
 - $y = \lceil 6 / \log_2 3 \rceil$
 - $y = 4$
 - Comprovando: $3^3 = 27 < 64 < 3^4 = 81$

Da base decimal para outra



Entre a base 2 e uma base 2^n



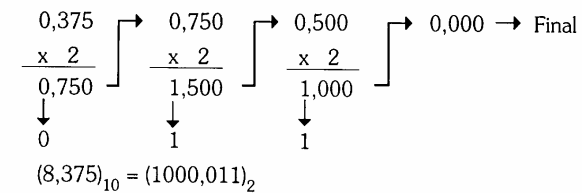
Conversão de números fracionários

- Operação inversa: multiplicar por 2 a parte fracionária do número até que a parte fracionária do resultado seja zero
- Exemplo: converter $(0,625)_{10}$ para binário
 - $0,625 \cdot 2 = 1,25$: a primeira casa fracionária será 1, e a nova fração será 0,25
 - $0,25 \cdot 2 = 0,5$: a segunda casa fracionária será 0, e a nova fração será 0,5
 - $0,5 \cdot 2 = 1,0$: a terceira casa fracionária será 1, e a nova fração será zero
 - Resultado: $(0,625)_{10} = (0,101)_2$

Outro exemplo

$$(8,375)_{10} = (?)_2$$

- parte inteira: $(8)_{10} = (1000)_2$
- parte fracionária:



Exercícios

- Verificar:
 - $(5,8)_{10} = (101,11001100\dots)_2$, ou seja, é uma dízima
 - $(11,6)_{10} = (1011,10011001100\dots)_2$
 - Repare que a vírgula foi deslocada uma casa para a direita, pois $11,6 = 2 \cdot 5,8$
- Portanto, todo computador que trabalha com a base 2, como possui uma quantidade limitada de *bits*, armazenará uma aproximação para números como 5,8 ou 11,6
- Não se pode esperar resultados exatos em seus cálculos...

CCI-22

- Sistemas de numeração
 - Bases: decimal, binária, etc.
 - Números fracionários
 - Mudanças de base
- Representação de números
 - Inteiros
 - Reais

Representação de números inteiros

- No armazenamento de um número inteiro, os computadores utilizam geralmente uma quantidade fixa de *m bits*, chamada *palavra*
- O primeiro *bit* à esquerda representa o sinal, e os demais, o módulo do número
- Dentro desse esquema, há duas maneiras de representar os números inteiros:
 - Pelo módulo
 - Pelo complemento de 2

Representação pelo módulo

- O primeiro *bit* é o sinal, e os demais *m-1 bits* representam o módulo do número
- Exemplo para palavras com *m = 4 bits*:

$(0\ 000)_2 = +0$	$(1\ 000)_2 = -0$	$(0\ 100)_2 = +4$	$(1\ 100)_2 = -4$
$(0\ 001)_2 = +1$	$(1\ 001)_2 = -1$	$(0\ 101)_2 = +5$	$(1\ 101)_2 = -5$
$(0\ 010)_2 = +2$	$(1\ 010)_2 = -2$	$(0\ 110)_2 = +6$	$(1\ 110)_2 = -6$
$(0\ 011)_2 = +3$	$(1\ 011)_2 = -3$	$(0\ 111)_2 = +7$	$(1\ 111)_2 = -7$
- Problemas:
 - Duas representações para o zero
 - Incoerência nos cálculos
 $5 - 2 = 5 + (-2) = (0101)_2 + (1010)_2 = (1111)_2 = -7$

Representação pelo complemento de 2

- O primeiro *bit* continua sendo o sinal
- Os demais *bits* obedecem a seguinte regra:
 - Se o número for positivo, representarão o seu módulo
 - Exemplo: $(5)_{10} = (0101)_2$
 - Se o número for negativo, representarão seu módulo complementado e acrescido de 1
 - Exemplo: $(-5)_{10}$
 - Módulo: 101
 - Complemento: 010
 - Acréscimo de 1: 011
 - Portanto, $(-5)_{10} = (1011)_2$

Ideia de fundo:
ao serem somados,
resultado final será
 $(0000)_2$

Representação pelo complemento de 2

- Exemplo para palavras com $m = 4$ bits :
 - $(0\ 000)_2 = +0$ $(0\ 100)_2 = +4$ $(1\ 000)_2 = -8$ $(1\ 100)_2 = -4$
 - $(0\ 001)_2 = +1$ $(0\ 101)_2 = +5$ $(1\ 001)_2 = -7$ $(1\ 101)_2 = -3$
 - $(0\ 010)_2 = +2$ $(0\ 110)_2 = +6$ $(1\ 010)_2 = -6$ $(1\ 110)_2 = -2$
 - $(0\ 011)_2 = +3$ $(0\ 111)_2 = +7$ $(1\ 011)_2 = -5$ $(1\ 111)_2 = -1$
- Valor de $(1xx...x)_2$: $(0xx...x)_2 - 2^{m-1}$
- Intervalo de representação: $[-2^{m-1}, 2^{m-1}-1]$
 - Zero e positivos: $[0, 2^{m-1}-1]$
 - Negativos: $[-2^{m-1}, -1]$

CCI-22

- Sistemas de numeração
 - Bases: decimal, binária, etc.
 - Números fracionários
 - Mudanças de base
- Representação de números
 - Inteiros
 - Reais

Representação de números reais

- A representação de números reais é chamada de ponto flutuante (*float*), porque o ponto (a vírgula, em português) pode variar (ou flutuar) de posição conforme a potência da base
- Exemplo:
 - $54,32 = 54,32 \cdot 10^0 = 5,432 \cdot 10^1 = 0,5432 \cdot 10^2 = 5432,0 \cdot 10^{-2}$

Representação em ponto flutuante

- Considere, por exemplo, o número $0,10111 \cdot b^{101}$:
 - $(0,10111)_2$: mantissa (ou significando)
 - $(101)_2$: expoente
- Representação genérica: $\pm 0, d_1 d_2 \dots d_n \cdot b^{\text{exp}}$
 - n é o número de dígitos da mantissa
 - $d_1 d_2 \dots d_n$: mantissa, com $0 \leq d_i < b$ e $d_1 \neq 0$
 - exp : expoente (inteiro com sinal)
 - b : base numérica, que nos computadores é sempre uma potência de 2 e não precisa ser armazenada, pois é padrão em cada arquitetura

Armazenamento de floats

- Na arquitetura de cada computador, está definido:
 - A quantidade de bits da mantissa (é a sua precisão)
 - A quantidade de bits do expoente
 - Um bit de sinal
 - Geralmente, é o primeiro à esquerda
 - 0 é positivo e 1 é negativo
- Um exemplo com 8 bits :

bit 7	bit 6	bit 5	bit 4	bit 3	bit 2	bit 1	bit 0
Sinal	Expoente (+/-)			Mantissa			

Padrão IEEE

		Precisão		
		Simples	Dupla	Estendida
Comprimento total		32	64	80
Bits na mantissa	n	23	52	64
Bits no expoente		8	11	15
Base	b	2	2	2
Expoente máximo	e_1	127	1023	16383
Expoente mínimo	e_2	-126	-1022	-16382
Maior número	N_{max}	$\approx 3,40 \cdot 10^{38}$	$\approx 1,80 \cdot 10^{308}$	$\approx 1,19 \cdot 10^{4932}$
Menor número	N_{min}	$\approx 1,18 \cdot 10^{-38}$	$\approx 2,23 \cdot 10^{-308}$	$\approx 3,36 \cdot 10^{-4932}$
Dígitos decimais		7	16	19