

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad D = \beta_0 = b_0$$

Com essa representação no espaço de estados, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} são exatamente as mesmas do sistema da Equação (3.30). As derivadas do termo à direita da Equação (3.33) afetam somente os elementos da matriz \mathbf{B} .

Note que a representação no espaço de estados para a função de transferência

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

é dada pelas equações (3.37) e (3.38).

Existem diversas maneiras de obter a representação de sistemas no espaço de estados. Algumas delas são representadas neste capítulo. Os métodos para a obtenção das representações canônicas de sistemas no espaço de estados (como a forma canônica controlável, forma canônica observável, forma canônica diagonal e forma canônica de Jordan) são apresentados no Capítulo 11.

O MATLAB pode ser utilizado para a obtenção de representações de sistemas no espaço de estados a partir da função de transferência e vice-versa. Esse assunto será apresentado na Seção 3.6.

EXEMPLO 3.5 Considere o sistema massa-mola-amortecedor montado em um carro de massa desprezível, como mostra a Figura 3.18. Um amortecedor é um dispositivo que produz um atrito ou amortecimento hidráulico. Ele consiste em um pistão e um cilindro preenchido com óleo. Qualquer movimento relativo entre a barra do pistão e o cilindro sofre a resistência oferecida pelo óleo, porque o óleo deve fluir em torno do pistão (ou pelos orifícios existentes no pistão), de um lado para o outro. O amortecedor, essencialmente, absorve energia. Essa energia absorvida é dissipada sob a forma de calor e o amortecedor não armazena energia cinética nem potencial. O amortecedor hidráulico (*dashpot*) é também simplesmente chamado de *amortecedor*.

Vamos obter modelos matemáticos para esse sistema, supondo que o carro está parado para $t < 0$ e o sistema massa-mola-amortecedor no carro também está em repouso para $t < 0$. Nesse sistema, $u(t)$ é o deslocamento do carro e é a entrada do sistema. Em $t = 0$, o carro se move a uma velocidade constante ou $\dot{u} = \text{constante}$. O deslocamento $y(t)$ da massa é a saída. (O deslocamento é relativo ao solo.) Nesse sistema, m representa a massa, b , o coeficiente de atrito viscoso, e k , seja a constante da mola. Vamos supor que a força de atrito do amortecedor seja proporcional a $\dot{y} - \dot{u}$ e que a mola seja linear, isto é, a força da mola seja proporcional a $y - u$.

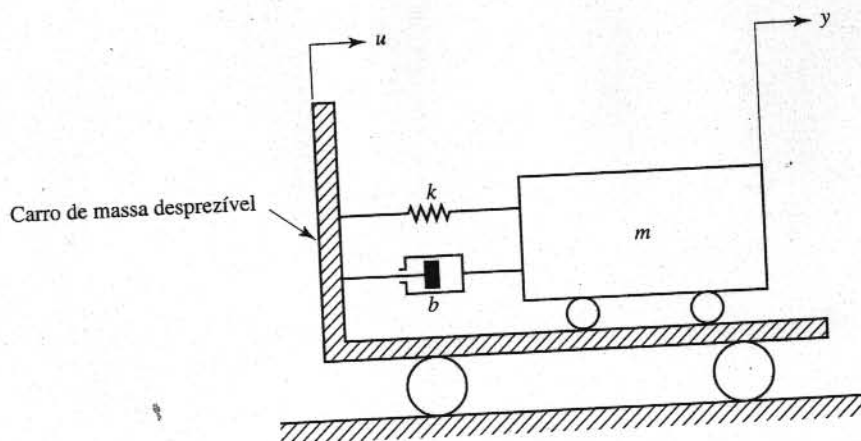


Figura 3.18 Sistema massa-mola-amortecedor montado em um carro.

Para sistemas de translação, a segunda lei de Newton estabelece que:

$$ma = \sum F$$

onde m é a massa, a é a aceleração da massa e $\sum F$ é a soma das forças atuantes na massa, na mesma direção da aceleração a . Aplicando a segunda lei de Newton para o presente sistema e considerando que o carro não possui massa, obtemos:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt} \right) - k(y - u)$$

ou

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = b \frac{du}{dt} + ku$$

Essa equação representa o modelo matemático do sistema considerado. Obtendo a transformada de Laplace dessa última equação e supondo que as condições iniciais sejam nulas, resulta que:

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = (bs + k)U(s)$$

Pela relação entre $Y(s)$ e $U(s)$, encontramos a função de transferência do sistema como:

$$\text{Função de transferência} = G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

Essa representação de um modelo matemático por função de transferência é utilizada com muita frequência na engenharia de controle.

A seguir, obtemos um modelo no espaço de estados desse sistema. Primeiramente, vamos comparar a equação diferencial desse sistema

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{b}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u$$

com a forma padronizada

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u$$

e identificar a_1 , a_2 , b_0 , b_1 e b_2 , como se segue:

$$a_1 = \frac{b}{m}, \quad a_2 = \frac{k}{m}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{b}{m}, \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

Com referência à Equação (3.35), temos:

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m} \right)^2$$

Então, com base na Equação (3.34), define-se:

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m} u$$

A partir da Equação (3.36), temos:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m} u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m} \right)^2 \right] u$$

e a saída da equação torna-se:

$$y = x_1$$

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m} \right)^2 \end{bmatrix} u \quad (3.39)$$

e

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

As equações (3.39) e (3.40) constituem uma representação do sistema no espaço de estados. (Note que essa não é a única representação no espaço de estados. Existe uma infinidade de representações para o sistema.)

3.7 SISTEMAS MECÂNICOS

Discutiremos, nesta seção, a modelagem matemática de sistemas mecânicos. A lei fundamental que governa os sistemas mecânicos é a segunda lei de Newton. Ela pode ser aplicada a qualquer sistema mecânico. Nesta seção, vamos deduzir modelos matemáticos de três sistemas mecânicos. (Os modelos matemáticos de outros sistemas serão deduzidos e analisados nos demais capítulos.)

EXEMPLO 3.7 Obtenha as funções de transferência $X_1(s)/U(s)$ e $X_2(s)/U(s)$ do sistema mecânico mostrado na Figura 3.19.

As equações de movimento para o sistema mostrado na Figura 3.19 são:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Simplificando, obtemos:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = b\dot{x}_2 + k_2 x_2 + u$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 = b\dot{x}_1 + k_2 x_1$$

Transformando por Laplace essas duas equações, admitindo condições iniciais nulas, obtemos:

$$[m_1 s^2 + bs + (k_1 + k_2)]X_1(s) = (bs + k_2)X_2(s) + U(s) \quad (3.44)$$

$$[m_2 s^2 + bs + (k_2 + k_3)]X_2(s) = (bs + k_2)X_1(s) \quad (3.45)$$

Resolvendo a Equação (3.45) para $X_2(s)$, substituindo-a na Equação (3.44) e simplificando, temos:

$$\begin{aligned} [(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2]X_1(s) \\ = (m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3)U(s) \end{aligned}$$

a partir da qual obtemos:

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \quad (3.46)$$

A partir das equações (3.45) e (3.46) temos:

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{bs + k_2}{(m_1 s^2 + bs + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + bs + k_2 + k_3) - (bs + k_2)^2} \quad (3.47)$$

As equações (3.46) e (3.47) são as funções de transferência $X_1(s)/U(s)$ e $X_2(s)/U(s)$, respectivamente.

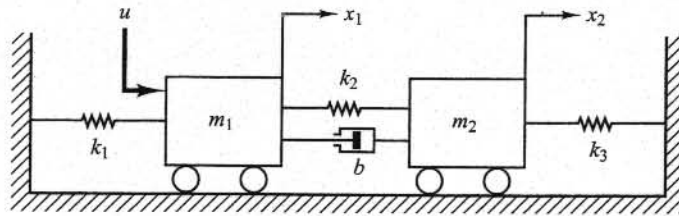


Figura 3.19 Sistema mecânico.

EXEMPLO 3.8 Um pêndulo invertido montado em um carro motorizado é mostrado na Figura 3.20(a). Esse é um modelo de controle de posição de um foguete na fase de lançamento. (O objetivo do problema de controle de posição é manter o foguete na posição vertical.) O pêndulo invertido é instável, pois pode cair a qualquer instante, para qualquer direção, a menos que uma força adequada de controle seja aplicada a ele. Vamos considerar aqui somente o problema bidimensional, em que o movimento do pêndulo fica restrito só ao plano da página. A força de controle u é aplicada ao carro. Considere que o centro de gravidade da haste do pêndulo esteja situado no centro geométrico dele. Obtenha um modelo matemático para esse sistema.

Defina o ângulo da haste a partir da linha vertical como θ . Defina também as coordenadas (x, y) do centro de gravidade da haste como (x_G, y_G) . Então,

$$x_G = x + l \text{sen } \theta$$

$$y_G = l \text{cos } \theta$$

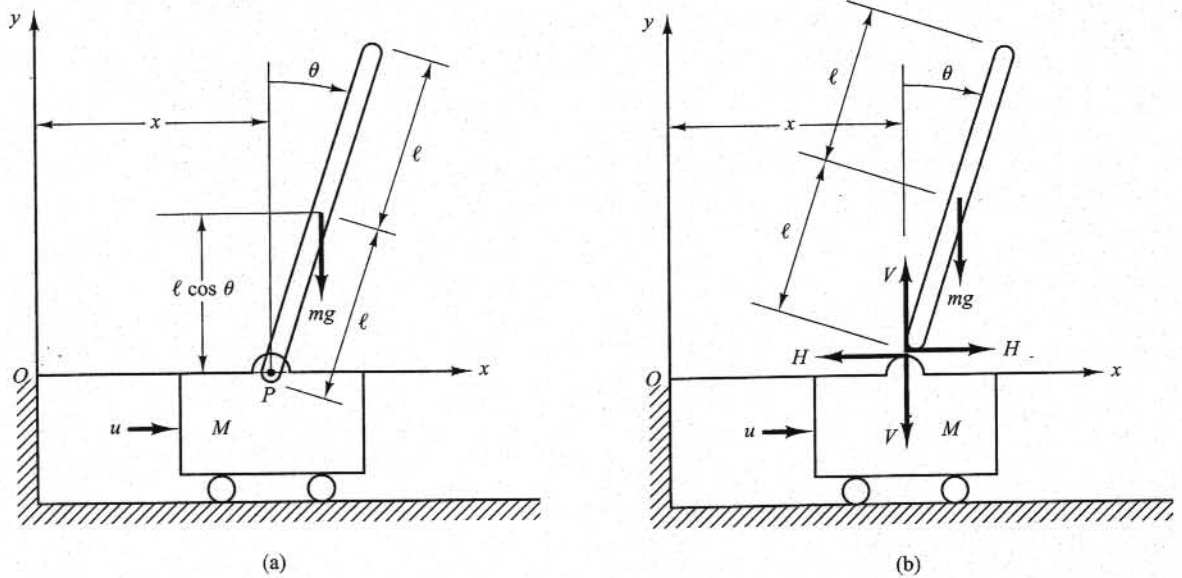


Figura 3.20 (a) Sistema de pêndulo invertido; (b) diagrama do corpo livre.

Para deduzir as equações de movimento do sistema, considere o diagrama do corpo livre, mostrado na Figura 3.20(b). O movimento rotacional da haste do pêndulo em torno de seu centro de gravidade pode ser descrito por:

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta \quad (3.48)$$

onde I é o momento de inércia da haste em relação ao centro de gravidade.

O movimento horizontal do centro de gravidade da haste do pêndulo é dado por:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (3.49)$$

O movimento vertical do centro de gravidade da haste do pêndulo é:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (3.50)$$

O movimento horizontal do carro é descrito por:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = u - H \quad (3.51)$$

Como devemos manter o pêndulo invertido na posição vertical, podemos admitir que $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ sejam grandezas suficientemente pequenas para que se possa fazer $\sin \theta \doteq \theta$, $\cos \theta = 1$ e $\theta\dot{\theta}^2 = 0$. Então, as equações de (3.48) a (3.50) podem ser linearizadas como se segue:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (3.52)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (3.53)$$

$$0 = V - mg \quad (3.54)$$

Com o auxílio das equações (3.51) e (3.53), obtemos:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3.55)$$

e a partir das equações (3.52), (3.53) e (3.54) obtemos:

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= mgl\theta - Hl \\ &= mgl\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

ou

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (3.56)$$

As equações (3.55) e (3.56) descrevem o movimento do sistema de pêndulo invertido sobre o carro. Elas constituem o modelo matemático do sistema.

EXEMPLO 3.9 Considere o sistema de pêndulo invertido mostrado na Figura 3.21. Como nesse sistema a massa está concentrada no topo da haste, o centro de gravidade é o centro da bola do pêndulo. Para esse caso, o momento de inércia do pêndulo sobre seu centro de gravidade é pequeno e vamos supor que $I = 0$ na Equação (3.56). Então, o modelo matemático para esse sistema passa a ser:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3.57)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{x} = mgl\theta \quad (3.58)$$

As equações (3.57) e (3.58) podem ser modificadas para

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (3.59)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (3.60)$$

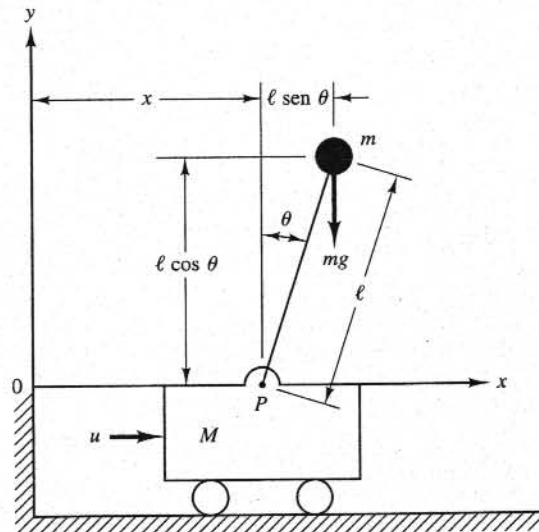


Figura 3.21 Sistema de pêndulo invertido.

A Equação (3.59) foi obtida pela eliminação de \ddot{x} das equações (3.57) e (3.58). A Equação (3.60) foi obtida pela eliminação de $\ddot{\theta}$ das equações (3.57) e (3.58). Utilizando a Equação (3.59), obtemos a função de transferência da planta como:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(s)}{-U(s)} &= \frac{1}{Mls^2 - (M + m)g} \\ &= \frac{1}{Ml \left(s + \sqrt{\frac{M + m}{Ml}}g \right) \left(s - \sqrt{\frac{M + m}{Ml}}g \right)} \end{aligned}$$

O sistema de pêndulo invertido tem um pólo no semi-eixo negativo do eixo real $[s = -(\sqrt{M + m}/\sqrt{Ml})\sqrt{g}]$ e outro no semi-eixo positivo do eixo real $[s = (\sqrt{M + m}/\sqrt{Ml})\sqrt{g}]$. Então, a planta é instável em malha aberta.

Defina as variáveis de estado x_1, x_2, x_3 e x_4 como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta \\ x_2 &= \dot{\theta} \\ x_3 &= x \\ x_4 &= \dot{x} \end{aligned}$$

Note que o ângulo θ indica a rotação da haste do pêndulo em torno do ponto P e x é a localização do carro. Se considerarmos θ e x como saídas do sistema, então

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(Note que tanto θ como x são quantidades facilmente mensuráveis.) Então, a partir da definição das variáveis de estado pelas equações (3.59) e (3.60), obtemos:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{M+m}{Ml} g x_1 - \frac{1}{Ml} u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{m}{M} g x_1 + \frac{1}{M} u\end{aligned}$$

Em termos de equações vetoriais-matriciais, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M} g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (3.61)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

As equações (3.61) e (3.62) são uma representação do sistema de pêndulo invertido no espaço de estados. (Note que a representação no espaço de estados do sistema não é única. Existe uma infinidade de representações possíveis para esse sistema.)

3.8 SISTEMAS ELÉTRICOS E ELETRÔNICOS

As leis básicas que regem os circuitos elétricos são as leis de Kirchhoff das correntes e das tensões. A lei das correntes de Kirchhoff (lei dos nós), diz que a soma algébrica de todas as correntes que entram e saem de um nó é zero. (Essa lei pode também ser enunciada como se segue: a soma das correntes que chegam a um nó é igual à soma das correntes que saem desse nó.) A lei das tensões de Kirchhoff (lei das malhas), estabelece que, em qualquer instante, a soma algébrica das voltagens ao longo de qualquer malha de um circuito elétrico é zero. (Essa lei também pode ser enunciada da seguinte maneira: a soma das quedas de tensão é igual à soma das elevações de tensão ao longo de uma malha.) Um modelo matemático de um circuito elétrico pode ser obtido pela aplicação de uma ou ambas as leis de Kirchhoff.

Esta seção trata inicialmente dos circuitos elétricos simples e depois trata da modelagem matemática de sistemas com amplificadores operacionais.

Circuito LRC. Considere o circuito elétrico mostrado na Figura 3.22. O circuito consiste em uma indutância L (henry), uma resistência R (ohm) e uma capacitância C (farad). Aplicando a lei das tensões de Kirchhoff ao sistema, obtemos as seguintes equações:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i \quad (3.63)$$

$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o \quad (3.64)$$

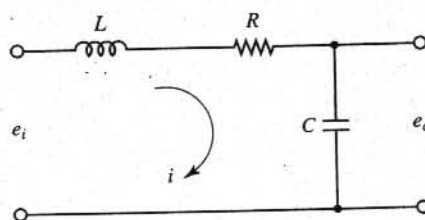


Figura 3.22 Circuito elétrico.

Observe que a saída do integrador e as saídas dos integradores com atraso de primeira ordem, $[1/(s+a)$ e $(z-p)/(s+p)]$, foram escolhidas como variáveis de estado. É importante lembrar que a saída do bloco $(s+z)/(s+p)$ na Figura 3.53(a) não pode ser uma variável de estado, porque esse bloco contém um termo derivativo, $s+z$.

A.3.11. Obtenha a função de transferência de um sistema definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Solução. De acordo com a Equação (3.29), a função de transferência $G(s)$ é dada por:

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

Neste problema, as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e D são:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad D = 0$$

Então,

$$\begin{aligned} G(s) &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

A.3.12. Obtenha a representação no espaço de estados do sistema mostrado na Figura 3.54.

Solução. As equações do sistema são:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + k(y_1 - y_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) &= u \end{aligned}$$

As variáveis de saída desse sistema são y_1 e y_2 . Defina as variáveis de estado como:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= \dot{y}_1 \\ x_3 &= y_2 \\ x_4 &= \dot{y}_2 \end{aligned}$$

Então, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_1} [-b\dot{y}_1 - k(y_1 - y_2)] = -\frac{k}{m_1} x_1 - \frac{b}{m_1} x_2 + \frac{k}{m_1} x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{m_2} [-k(y_2 - y_1) + u] = \frac{k}{m_2} x_1 - \frac{k}{m_2} x_3 + \frac{1}{m_2} u \end{aligned}$$

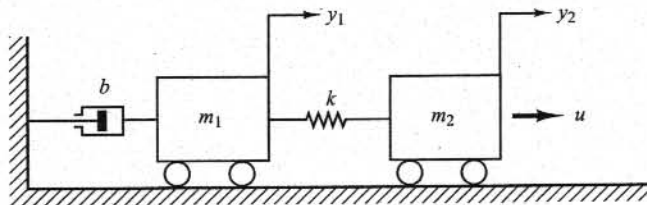


Figura 3.54 Sistema mecânico.

Portanto, a equação de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & 0 & -\frac{k}{m_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} u$$

e a equação de saída é:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

A.3.13. Considere um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Quando o sistema tem mais de uma saída, o comando

$$[NUM,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)$$

fornece as funções de transferência para todas as saídas a partir de cada entrada. (Os coeficientes do numerador são retornados para a matriz NUM com tantas linhas quantas forem as saídas.)

Considere o sistema definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema contém duas entradas e duas saídas. Assim, estão envolvidas quatro funções de transferência: $Y_1(s)/U_1(s)$, $Y_2(s)/U_1(s)$, $Y_1(s)/U_2(s)$ e $Y_2(s)/U_2(s)$. (Quando u_1 for considerada entrada, devemos supor que a entrada u_2 seja zero e vice-versa.)

Solução. O programa 3.5 em MATLAB fornece as quatro seguintes funções de transferência.

Programa 3.5 em MATLAB	
A =	[0 1;-25 -4];
B =	[1 1;0 1];
C =	[1 0;0 1];
D =	[0 0;0 0];
[NUM,den] =	ss2tf(A,B,C,D,1)
NUM =	0 1 4
	0 0 -25
den =	1 4 25
[NUM,den] =	ss2tf(A,B,C,D,2)
NUM =	0 1.0000 5.0000
	0 1.0000 -25.0000
den =	1 4 25

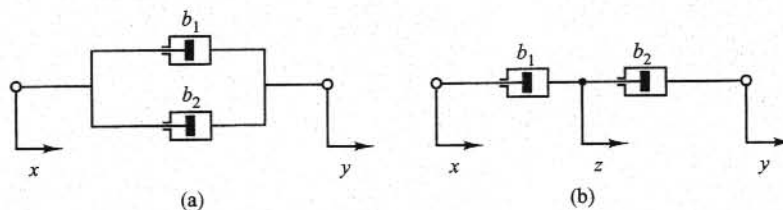


Figura 3.56 (a) Dois amortecedores conectados em paralelo; (b) dois amortecedores conectados em série.

(b) A força f devida aos amortecedores é:

$$f = b_1(\dot{z} - \dot{x}) = b_2(\dot{y} - \dot{z}) \quad (3.105)$$

onde z é o deslocamento de um ponto entre os amortecedores b_1 e b_2 . (Note que a mesma força é transmitida ao longo do eixo). A partir da Equação (3.105), temos:

$$(b_1 + b_2)\dot{z} = b_2\dot{y} + b_1\dot{x}$$

ou

$$\dot{z} = \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \quad (3.106)$$

Em termos do coeficiente de atrito viscoso b_{eq} equivalente, a força f é dada por:

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x})$$

Substituindo a Equação (3.106) na Equação (3.105), temos:

$$\begin{aligned} f &= b_2(\dot{y} - \dot{z}) = b_2 \left[\dot{y} - \frac{1}{b_1 + b_2}(b_2\dot{y} + b_1\dot{x}) \right] \\ &= \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

Assim,

$$f = b_{eq}(\dot{y} - \dot{x}) = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(\dot{y} - \dot{x})$$

Então,

$$b_{eq} = \frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}}$$

A.3.16. A Figura 3.57(a) mostra um diagrama esquemático do sistema de suspensão de um automóvel. Quando o carro se move ao longo da estrada, o movimento vertical das rodas age como a própria função de entrada do sistema de suspensão do automóvel. O movimento desse sistema consiste em um movimento de translação do centro da massa e um movimento de rotação em torno desse mesmo centro da massa. O modelo matemático do sistema completo é bastante complicado.

Uma versão muito simplificada do sistema de suspensão é mostrada na Figura 3.57(b). Admitindo que o movimento x_i no ponto P seja a entrada do sistema e o movimento vertical x_o do carro seja a saída, obtenha a função de transferência $X_o(s)/X_i(s)$. (Considere o movimento do carro somente na direção vertical.) O deslocamento x_o é medido a partir da posição de equilíbrio na ausência da variável de entrada x_i .

Solução. A equação do movimento para o sistema mostrado na Figura 3.57(b) é:

$$m\ddot{x}_o + b(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k(x_o - x_i) = 0$$

ou

$$m\ddot{x}_o + b\dot{x}_o + kx_o = b\dot{x}_i + kx_i$$

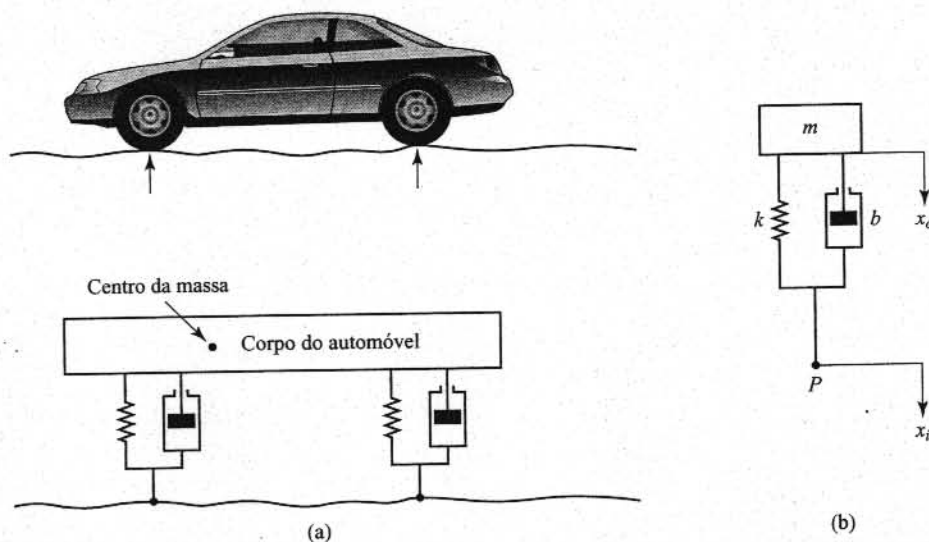


Figura 3.57 (a) Sistema de suspensão do automóvel; (b) sistema de suspensão simplificado.

Ao considerar a transformada de Laplace da última equação, e ao supor condições iniciais nulas, obtemos:

$$(ms^2 + bs + k)X_o(s) = (bs + k)X_i(s)$$

Então, a função de transferência $X_o(s)/X_i(s)$ é dada por:

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

- A.3.17.** Obtenha a função de transferência $Y(s)/U(s)$ do sistema mostrado na Figura 3.58. A entrada u é um deslocamento. (Como o sistema do Problema A.3.16, esse é também uma versão simplificada da suspensão de um automóvel ou de uma motocicleta.)

Solução. Suponha que os deslocamentos x e y sejam medidos a partir das respectivas posições de repouso que ocorrem na ausência da entrada u . Aplicando a segunda lei de Newton a esse sistema, obtemos:

$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$

$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

Então, temos:

$$m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1 + k_2)x = b\dot{y} + k_2y + k_1u$$

$$m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2y = b\dot{x} + k_2x$$

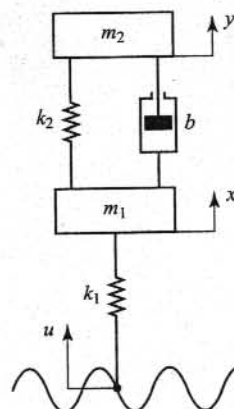


Figura 3.58 Sistema de suspensão.

4.2 SISTEMAS DE NÍVEL DE LÍQUIDOS

Na análise de sistemas que envolvem o fluxo de fluidos, julgamos necessário dividir os regimes de fluxo em fluxo laminar e fluxo turbulento, de acordo com o valor do número de Reynolds. Se o número de Reynolds estiver entre 3 000 e 4 000, então o sistema será turbulento. O sistema é laminar se esse valor for menor do que aproximadamente 2 000. No caso laminar, o fluxo ocorre em linhas de escoamento, sem turbulência. Sistemas que envolvem fluxo laminar podem ser representados por equações diferenciais lineares.

Processos industriais envolvem, freqüentemente, o fluxo de líquidos ao longo de tubos de conexão e de reservatórios. O fluxo nesses processos é geralmente turbulento e não laminar. Os sistemas que envolvem fluxo turbulento são freqüentemente representados por equações diferenciais não-lineares. Entretanto, se a região de operação for limitada, essas equações diferenciais não-lineares podem ser linearizadas. Nesta seção, vamos discutir os modelos matemáticos linearizados de sistemas de nível de líquido. Note que a introdução do conceito de resistência e capacitância para esses sistemas de nível de líquido nos possibilita descrever suas características dinâmicas de modo simples.

Resistência e capacitância de sistemas de nível de líquido. Consideremos o fluxo ao longo de uma tubulação curta, que conecta dois reservatórios. A resistência R ao fluxo de líquido nessa tubulação ou restrição é definida como a variação na diferença de nível (a diferença entre o nível dos líquidos nos dois reservatórios) necessária para causar a variação unitária na taxa de escoamento, isto é,

$$R = \frac{\text{variação na diferença de nível, m}}{\text{variação na vazão em volume, m}^3/\text{s}}$$

Como a relação entre a taxa de escoamento e a diferença de nível difere do fluxo laminar para o fluxo turbulento, vamos considerar a seguir ambos os casos.

Considere o sistema de nível de líquido da Figura 4.1(a). Nesse sistema, o líquido flui em uma válvula de restrição, na lateral do reservatório. Se o fluxo nessa restrição for laminar, a relação entre a vazão em regime permanente e a altura do nível em regime permanente na restrição será dada por:

$$Q = KH$$

onde Q = vazão em volume em regime permanente, m^3/s
 K = coeficiente, m^2/s
 H = altura do nível em regime permanente, m

Para o fluxo laminar, a resistência R_l é obtida como:

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q}$$

A resistência no escoamento laminar é constante e análoga à resistência elétrica.

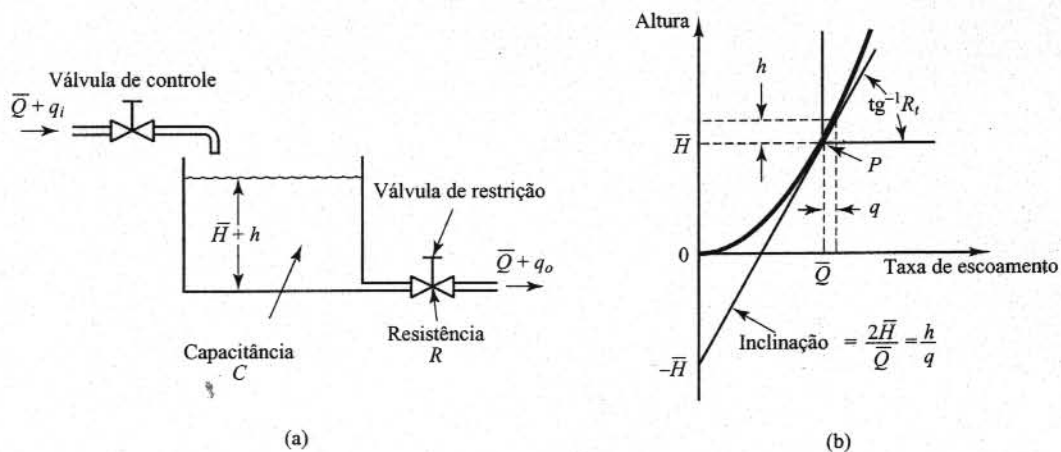


Figura 4.1 (a) Sistema de nível de líquido; (b) curva de altura do nível versus vazão.

Se o fluxo na restrição for turbulento, a taxa de escoamento em regime permanente será dada por:

$$Q = K\sqrt{H} \quad (4.1)$$

onde Q = vazão em volume em regime permanente, m^3/s

K = coeficiente, $m^{2.5}/s$

H = altura do nível em regime permanente, m

A resistência R_t para o fluxo turbulento é obtida como:

$$R_t = \frac{dH}{dQ}$$

Utilizando a Equação (4.1), obtemos:

$$dQ = \frac{K}{2\sqrt{H}} dH$$

temos:

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K} = \frac{2\sqrt{H}\sqrt{H}}{Q} = \frac{2H}{Q}$$

Assim,

$$R_t = \frac{2H}{Q}$$

O valor da resistência R_t do fluxo turbulento depende da taxa de escoamento e da altura do nível do líquido. Entretanto, o valor de R_t pode ser considerado constante se as variações da altura do nível e da taxa de escoamento forem pequenas.

Utilizando a definição de resistência para o caso de fluxo turbulento, a relação entre Q e H pode ser dada por:

$$Q = \frac{2H}{R_t}$$

Essa linearização é válida desde que as variações da altura do nível e da taxa de escoamento em relação aos respectivos valores de regime permanente sejam pequenas.

Em muitos casos práticos, o valor do coeficiente K na Equação (4.1), que depende do coeficiente de fluxo e da área de restrição, não é conhecido. Então, a resistência pode ser determinada pela construção do gráfico da curva que mostra a altura do nível *versus* a taxa de escoamento, com base em dados experimentais e medindo-se a inclinação da curva no ponto de operação. Um exemplo dessa curva é o indicado na Figura 4.1(b), em que P é o ponto de operação em regime permanente. A linha tangente à curva no ponto P cruza o eixo das ordenadas no ponto $(0, -\bar{H})$. Assim, a inclinação dessa linha tangente é $2\bar{H}/\bar{Q}$. Como a resistência R_t no ponto de operação P é dada por $2\bar{H}/\bar{Q}$, a resistência R_t é a inclinação da curva no ponto de operação.

Considere a condição de operação nas proximidades do ponto P . Defina uma pequena variação do valor da altura do regime permanente como h e a pequena variação correspondente da taxa de escoamento como q . Então, a inclinação da curva no ponto P pode ser dada por:

$$\text{Inclinação da curva no ponto } P = \frac{h}{q} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}} = R_t$$

A aproximação linear tem como base o fato de que a curva real não difere muito de sua linha tangente, se a condição de operação não variar muito.

A capacitância C de um reservatório é definida como a variação na quantidade de líquido armazenado necessária para causar uma mudança unitária no potencial (altura). (O potencial é a grandeza que indica o nível de energia do sistema.)

$$C = \frac{\text{variação na quantidade de líquido armazenado, } m^3}{\text{variação na altura, } m}$$

Note que a capacidade (m^3) e a capacitância (m^2) são diferentes. A capacitância do reservatório é igual à sua secção transversal. Se esta for constante, a capacitância será constante para qualquer altura do nível.

Sistemas de nível de líquido. Considere o sistema indicado na Figura 4.1(a). As variáveis são definidas como se segue:

\bar{Q} = vazão em volume em regime permanente (antes de ocorrer alguma variação), m³/s

q_i = pequeno desvio da taxa de escoamento de entrada em relação a seu valor de regime permanente, m³/s

q_o = pequeno desvio da taxa de escoamento de saída em relação a seu valor de regime permanente, m³/s

\bar{H} = altura do nível em regime permanente (antes que ocorra alguma variação), m

h = pequeno desvio de nível a partir de seu valor de regime permanente, m

Como foi visto anteriormente, um sistema poderá ser considerado linear se o fluxo for laminar. Se o fluxo for turbulento, o sistema poderá ser linearizado, desde que as alterações nas variáveis sejam pequenas. Com base na hipótese de que o sistema seja linear ou linearizado, a equação diferencial desse sistema pode ser obtida a seguir. Como o fluxo de entrada menos o fluxo de saída durante um pequeno intervalo de tempo dt é igual à quantidade adicional armazenada no reservatório, temos que:

$$C dh = (q_i - q_o) dt$$

A partir da definição da resistência, a relação entre q_o e h é dada por:

$$q_o = \frac{h}{R}$$

A equação diferencial desse sistema para um valor constante de R torna-se:

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_i \quad (4.2)$$

Note que RC é a constante de tempo do sistema. Tomando a transformada de Laplace de ambos os membros da Equação (4.2) e considerando condições iniciais nulas, obtemos:

$$(RCs + 1)H(s) = RQ_i(s)$$

onde

$$H(s) = \mathcal{L}[h] \quad \text{e} \quad Q_i(s) = \mathcal{L}[q_i]$$

Se q_i for considerada a entrada e h , a saída, a função de transferência do sistema é:

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs + 1}$$

Entretanto, se q_o for admitida como a saída e a entrada permanecer a mesma, a função de transferência será:

$$\frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

onde tomamos por base a relação

$$Q_o(s) = \frac{1}{R} H(s)$$

Sistemas de nível de líquido com interação. Considere o sistema mostrado na Figura 4.2. Nesse sistema, os dois reservatórios interagem. Assim, a função de transferência do sistema não é o produto das funções de transferência de primeira ordem.

A seguir, vamos admitir apenas pequenas variações das variáveis a partir dos valores de regime permanente. Utilizando os símbolos definidos na Figura 4.2, obtém-se as seguintes equações para esse sistema:

$$\frac{h_1 - h_2}{R_1} = q^1 \quad (4.3)$$

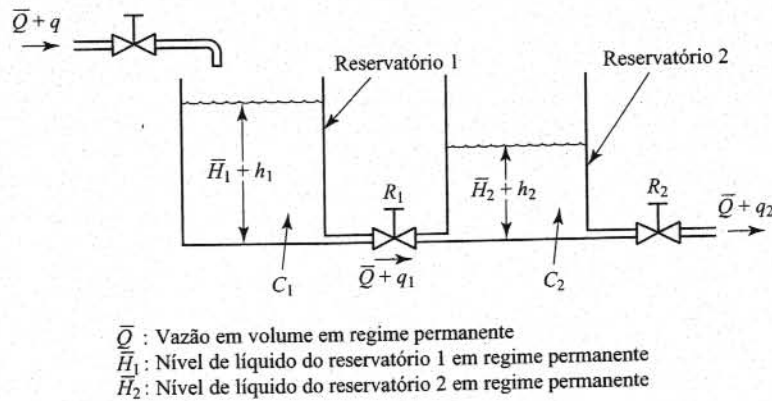


Figura 4.2 Sistema de nível de líquido com interação.

$$C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \quad (4.4)$$

$$\frac{h_2}{R_2} = q_2 \quad (4.5)$$

$$C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2 \quad (4.6)$$

Se q for considerada a entrada e q_2 , a saída, a função de transferência do sistema será:

$$\frac{Q_2(s)}{Q(s)} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) s + 1} \quad (4.7)$$

É instrutivo obter a Equação (4.7), a função de transferência do sistema interativo, pela redução do diagrama de blocos. A partir das equações (4.3) a (4.6), obtemos os elementos do diagrama de blocos, como mostra a Figura 4.3(a). Conectando os sinais corretamente, podemos construir um diagrama de blocos, como mostra a Figura 4.3(b). Esse diagrama de blocos pode ser simplificado como o da Figura 4.3(c). Simplificações adicionais resultam nas figuras 4.3(d) e (e). A Figura 4.3(e) é equivalente à Equação (4.7).

Note a similaridade e a diferença entre a função de transferência da Equação (4.7) e a que é dada pela Equação (3.72). O termo $R_2 C_1 s$ que aparece no denominador da Equação (4.7) exemplifica a interação entre os dois reservatórios. Por analogia, o termo $R_1 C_2 s$ no denominador da Equação (3.72) representa a interação entre os dois circuitos RC mostrados na Figura 3.23.

4.3 SISTEMAS PNEUMÁTICOS

Em aplicações industriais, sistemas pneumáticos e sistemas hidráulicos são, freqüentemente, comparados. Assim, antes de discutirmos os sistemas pneumáticos em detalhes, vamos fazer uma breve comparação entre esses dois tipos de sistemas.

Comparação entre sistemas pneumáticos e sistemas hidráulicos. O fluido geralmente encontrado em sistemas pneumáticos é o ar; em sistemas hidráulicos, é o óleo. E são, principalmente, as diferentes propriedades dos fluidos envolvidos que caracterizam a diferença entre esses dois sistemas. Essas diferenças podem ser relacionadas como se segue:

1. Ar e gases são compressíveis, enquanto o óleo não é (exceto em alta pressão).
2. O ar não tem a propriedade de lubrificação e geralmente contém vapor de água. O óleo tem a função de fluido hidráulico e também de lubrificador.
3. A pressão de operação normal dos sistemas pneumáticos é bem mais baixa do que a dos sistemas hidráulicos.

I. Equações Diferenciais Ordinárias: Conceitos Preliminares

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias (e.d.o.) de primeira ordem¹

$$\begin{aligned} dx/dt &= \dot{x} = f(x, y), \\ dy/dt &= \dot{y} = g(x, y). \end{aligned} \tag{1}$$

Esse sistema é dito *autônomo*, uma vez que as funções f e g não dependem explicitamente do tempo. Caso contrário (se $f = f(x, y, t)$ ou $g = g(x, y, t)$) o sistema é dito *não-autônomo*. Uma e.d.o. não-autônoma pode ser reduzida a um sistema autônomo às custas da introdução de mais uma dimensão no sistema. Para tanto, basta considerar o tempo como uma variável adicional, *i.e.*, $t = z$, tal que $dz/dt = 1$. Da mesma maneira, uma (ou mais) e.d.o. de ordem superior pode ser transformada em duas (ou mais) equações diferenciais de primeira ordem; basta considerar uma nova variável $y = \dot{x}$. Exemplifiquemos esse procedimento com a transformação da equação de movimento de um oscilador harmônico amortecido

¹Dado um campo contínuo de vetores $x \in \mathbb{R}^n$, a relação

$$\dot{x} = v(x) \tag{1a}$$

denomina-se *equação autônoma* de dimensão um. O vetor unidimensional $v(x)$ é a chamada *velocidade de fase* em x . Se $x \in \mathbb{R}^n$, (1a) representa um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A dimensão do *espaço de fases* de (1a) é a dimensão do vetor x , isto é, o número de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

e forçado em um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem acopladas. Tem-se para a equação inicial

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0/m \cos(\omega t);$$

considerando $z = t$, $\dot{z} = 1$ e $y = \dot{x}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= f(x, y, z) = (F_0/m) \cos(\omega z) - \gamma y - \omega_0^2 x, \\ \dot{z} &= 1, \end{aligned}$$

que constitui um sistema de três e.d.o. de primeira ordem acopladas e autônomas (3 graus de liberdade: x, y, z).

Nestas notas, sempre que possível, utilizam-se sistemas bidimensionais para se apresentar conceitos novos. Tais conceitos, entretanto, são estendidos trivialmente para sistemas com n dimensões. Em particular, é freqüente escrever-se vetorialmente um sistema de n equações diferenciais lineares, e.g.,

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ dx_n/dt &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2)$$

como

$$\dot{\vec{x}} = f \vec{x},$$

onde

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

e f é uma matriz quadrada. Algumas vezes esta notação vetorial é generalizada para incluir sistemas não-lineares do tipo

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (4)$$

onde \vec{F} agora representa um conjunto de *funções não-lineares* F_1, F_2, \dots, F_n nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n , de tal modo que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (5)$$

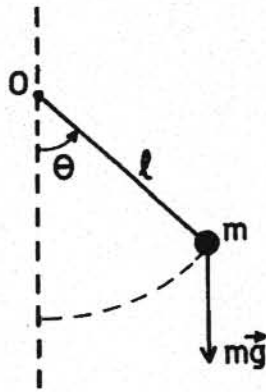


Fig. 1: O pêndulo simples.

Em geral não é possível se obter soluções analíticas para tais sistemas de equações. Muitas vezes, quando uma solução analítica é encontrada, ela é tão complicada que fica difícil interpretá-la e compreender as suas principais propriedades.

O estudo qualitativo de equações diferenciais preocupa-se em identificar características importantes de suas soluções sem resolvê-las. Tais procedimentos aplicam-se tanto a equações diferenciais lineares como não-lineares. Como veremos, é sobretudo para os sistemas não-lineares que o estudo qualitativo revela sua potencialidade. Esse estudo apoia-se em um conjunto de conceitos e teorias, mas também num razoável esforço de computação numérica. Vejamos alguns exemplos concretos.

O Pêndulo simples

Seja o sistema constituído por um corpo de massa m e uma haste rígida de comprimento l (de massa desprezível) que pode se mover livremente num plano vertical (Fig. 1).

A equação de movimento associada é

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \operatorname{sen}\theta = 0 . \tag{6}$$

Não é possível se obter uma solução para essa equação em termos de funções elementares. Entretanto, é possível identificar-se as principais características de suas soluções e compreender de modo qualitativo os possíveis movimentos deste sistema físico utilizando um *diagrama de fases*. Vejamos como se procede.

ões diferenciais de primeira
ção inicial

$$v \cos(\omega t) ;$$

ém-se

$$(wz) - \gamma y - w_0^2 x ,$$

e primeira ordem acopladas
(, z).

ilizam-se sistemas bidimen-
vos. Tais conceitos, entre-
sistemas com n dimensões.
etorialmente um sistema de

$$\dots x_n) , \tag{2}$$

$$\dots x_n) ,$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \tag{3}$$

ezes esta notação vetorial é
lineares do tipo

$$\tag{4}$$

funções não-lineares $F_1, F_2,$
tal modo que

$$\dots x_n) , \tag{5}$$

$$\dots x_n) .$$

VII. Exemplos

Os conceitos introduzidos nas seções precedentes são de larga utilização. A seguir ilustram-se, através de exemplos, alguns dos tópicos tratados até aqui.

O modelo de Lotka-Volterra é apresentado como exemplo de dinâmica de populações que apresenta comportamento cíclico. A existência de falsos centros obtidos por linearização (no caso de pontos focos elípticos) é ilustrado através de um exemplo específico. De particular interesse para o que será discutido na parte II, discutem-se o sistema de Lorenz e o mapa logístico, sistemas paradigma no estudo de caos determinístico, objetivo central destas notas. Por fim, são apresentados sucintamente alguns dos mapas mais freqüentemente encontrados na literatura.

A. Modelo de Lotka-Volterra

O modelo de Lotka-Volterra, também chamado de sistema predador-presa, fornece uma modelagem para dinâmica de populações.

Admitamos, por exemplo, a convivência de duas espécies de peixes num lago: **A** (presa) alimenta-se de plantas que existem em abundância, **B** (predador) sobrevive alimentando-se da espécie **A**. Seja $x(t)$ a população de **A** e $y(t)$ a de **B**. Admite-se que **A** tenha vida longa e alta taxa de reprodução se deixada sozinha. Assim, num intervalo de tempo Δt , o aumento da população de **A** devido ao balanço nascimentos-mortes é dado por $+kx \Delta t$, $k > 0$. A diminuição de população é $-axy \Delta t$, $a > 0$, devida ao fato que **B** se alimenta de **A** (o número de indivíduos de **A** comidos por

B é admitido ser proporcional ao número de encontros entre **A** e **B**; daí o fator xy). Os parâmetros k e a são constantes. Segue, portanto, que o aumento líquido Δx da população de **A** é dado por $\Delta x = kx \Delta t - axy \Delta t$. No limite $\Delta t \rightarrow 0$ tem-se a equação diferencial

$$\dot{x} = kx - axy, \quad (68)$$

Para a população da espécie **B** admite-se que na ausência de presa a taxa de mortalidade dessa espécie supera a de nascimentos; resulta a diminuição da população de **B** (num intervalo Δt) dada por $-Ly \Delta t$, $L > 0$; entretanto, existe uma compensação devido à presença de presas, que é proporcional ao número de encontros, isto é, $brxy \Delta t$, $b > 0$. Os parâmetros L e b são constantes. Então, para a população da espécie **B** tem-se

$$\dot{y} = -Ly + brxy. \quad (69)$$

O sistema de equações diferenciais constituído pelas eqs. (68) e (69) é o modelo de Lotka-Volterra para a dinâmica populacional do sistema predador-presa.

Os pontos fixos de (68) e (69) são dados por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx - axy = 0, \\ \dot{y} &= -Ly + brxy = 0, \end{aligned}$$

situação em que as duas populações não variam com o tempo, isto é, permanecem estacionárias. Existem dois pontos fixos: um trivial, $(0, 0)$, e outro dado por $(\bar{x}, \bar{y}) = (L/b, k/a)$, que se encontra no primeiro quadrante do plano xy .

As trajetórias de fase do sistema (68)-(69) são curvas fechadas. Com efeito, segue dessas equações

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx - L)}{x(k - ay)}, \quad (70)$$

que é uma separável. Pode-se falar então numa trajetória de fase do sistema dada por

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{bx - L}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{k - ay},$$

no domínio em que $x, y, bx - L, k - ay$ não são nulos. Segue que

$$\frac{k - ay}{y} dy = \frac{bx - L}{x} dx + C,$$

onde C é uma constante. Depois da integração resulta

$$ay - k \ln y + bx - L \ln x + C = 0. \quad (71)$$

A eq. (71) representa uma família de curvas fechadas centradas no ponto de equilíbrio $(x, y) = (L/b, k/a)$. Para cada valor da constante C tem-se uma curva no espaço de fases (Fig. 44).

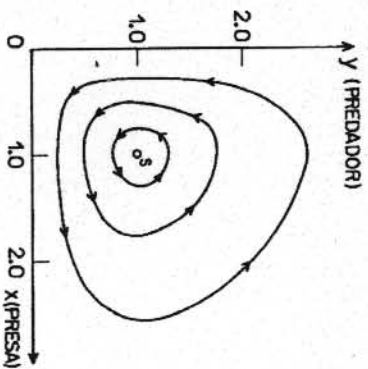
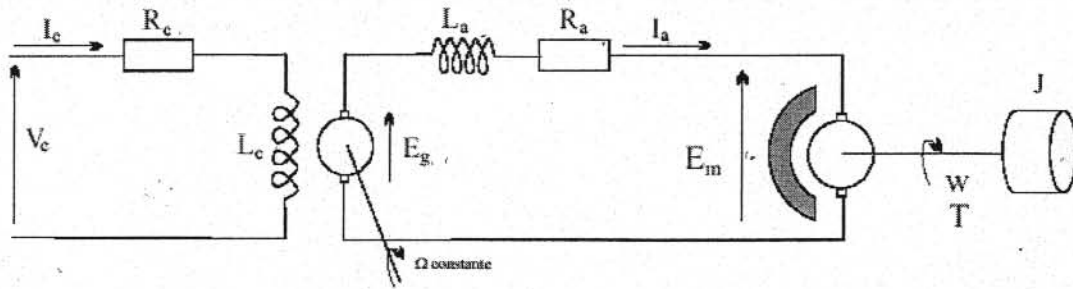


Fig. 44: Trajetórias de fase fechadas para o modelo Lotka-Volterra (sistema predador-presa).

Resumindo, as conclusões com relação ao sistema Lotka-Volterra são: (1) existe um *único estado de equilíbrio* para $x > 0, y > 0$; (2) as populações do predador e da presa são funções periódicas do tempo, com o mesmo período, que depende das condições iniciais (trajetórias de fase fechadas). A análise atenta da Fig. 44 permite compreender a dinâmica do sistema predador-presa modelado por (68) e (69). Parte-se do ponto em que a população **A** (variável x) é máxima. Como há abundância de alimento para **B**, essa espécie começa a apresentar um crescimento populacional ao mesmo tempo que **A** diminui. A partir de um certo ponto, quando a população de **B** é máxima, começa a haver falta de alimentos para essa espécie, que sofre uma redução brusca na sua população. Com uma população baixa de predadores a espécie **A** recompõe-se até atingir novamente seu valor máximo e o ciclo recomeça.

2- Dado o seguinte sistema eletro-mecânico:

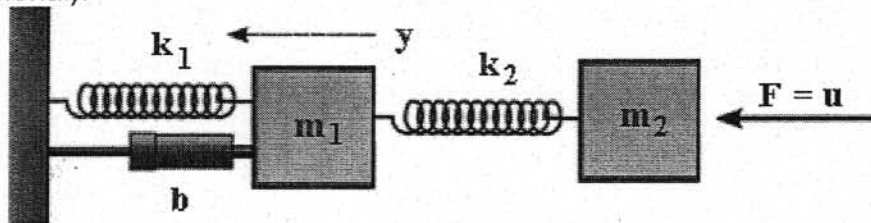


Sabendo que: $E_g = K_g \cdot i_c$, $E_m = K_m \cdot w$, $T = K_m \cdot i_a$ e que $T = J \cdot dw/dt$.

- Escrever o sistema de equações lineares de primeira ordem que representa a dinâmica do sistema.
- Escrever a dinâmica na forma matricial compacta $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, onde $u = V_c$ e $y = w$.
- Determinar a função de transferência do sistema.
- Determinar os e-valores (auto-valores) da matriz A.

$$\frac{y}{u} = \frac{w}{V_c}$$

3 – Dado o seguinte sistema mecânico (desconsiderar a ação da força gravitacional):



a) Escrever a função de transferência $G(s) = Y(s)/U(s)$ (literal).

b) Sendo $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $b = 3$, $m_1 = 4$ e $m_2 = 5$, escrever a dinâmica na forma matricial compacta $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$

c) Determinar os e-valores da matriz A .

Vamos definir

x_1 = deslocamento da carcaça relativo ao espaço inercial
 x_0 = deslocamento da massa m relativa ao espaço inercial
 $y = x_0 - x_1$ = deslocamento da massa m relativamente à carcaça

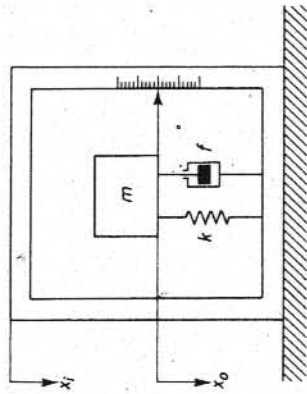


Fig. 4.21 Diagrama esquemático de um sismógrafo.

(Note que, desde que há a produção de uma deflexão estacionária na mola devido à gravidade, medimos o deslocamento x_0 da massa m em relação à posição de equilíbrio estático.) A equação para este sistema é dada por

$$m\ddot{x}_0 + f(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + k(x_0 - x_1) = 0$$

Substituindo $x_0 = y + x_1$ nesta última equação, obtemos uma equação diferencial em y . (Note que y é um sinal que podemos realmente medir.)

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_1 \quad (4.31)$$

Tomando a transformada de Laplace da Eq. (4.31), supondo condições iniciais nulas, obtemos

$$[ms^2 + fs + k]Y(s) = -ms^2X_1(s)$$

Considerando x_1 como entrada e y como saída, a função de transferência é

$$\frac{Y(s)}{X_1(s)} = \frac{-ms^2}{ms^2 + fs + k} \\ = -\frac{s^2}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Para entradas em baixa potência, a massa m segue a carcaça para cima e para baixo, e a deflexão da mola é muito pequena. Se a entrada x_1 consistir em sinais cujas frequências são muito menores do que $\sqrt{k/m}$, então a função de transferência pode ser aproximada por

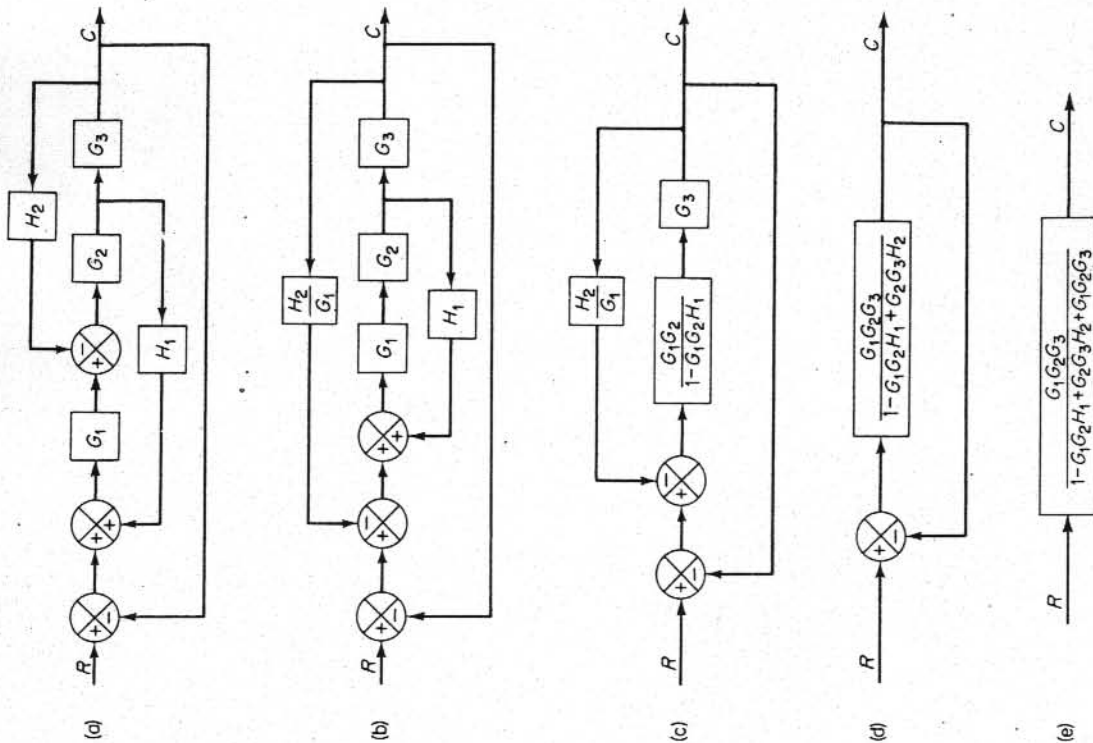


Fig. 4.20 (a) Sistemas de múltiplos laços; (b)-(e) redução sucessiva do diagrama de blocos indicado em (a).

SISTEMAS MECÂNICOS E ELETROMECÂNICOS

Sismógrafo. A Fig. 4.21 mostra um diagrama esquemático de um sismógrafo. Um sismógrafo indica o deslocamento de sua carcaça em relação ao espaço inercial. É utilizada para medir deslocamentos de terra durante terremotos (abalos sísmicos).

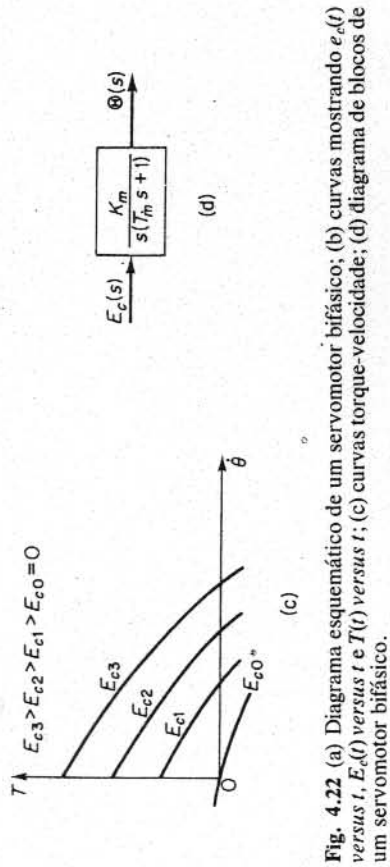
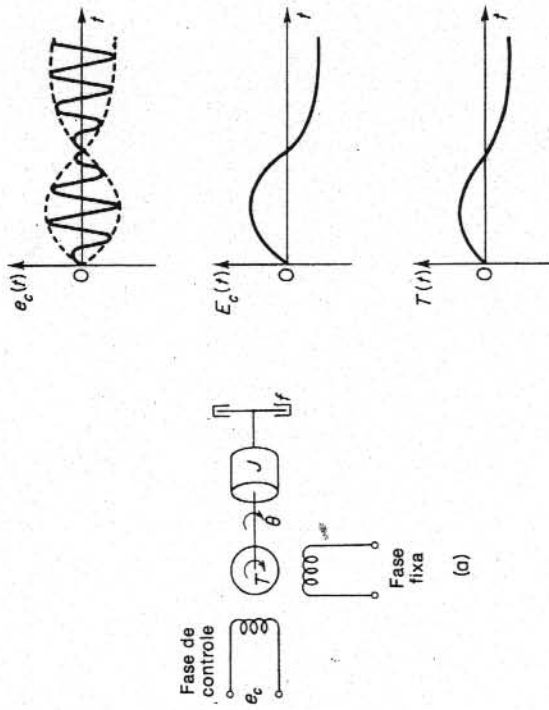


Fig. 4.22 (a) Diagrama esquemático de um servomotor bifásico; (b) curvas mostrando $e_c(t)$ versus t , $E_c(t)$ versus t e $T(t)$ versus t ; (c) curvas torque-velocidade; (d) diagrama de blocos de um servomotor bifásico.

velocidade. Se se admite a hipótese de que as curvas são equidistantes para todas as tensões de controle, então o servomotor pode ser considerado linear.

A Fig. 4.22(c) mostra um conjunto de curvas torque-velocidade para vários valores de tensões de controle. A curva torque-velocidade correspondente à tensão de controle nula passa pela origem. Desde que a inclinação desta curva normalmente é negativa, se a tensão da fase de controle torna-se igual a zero, o motor desenvolve aquele torque necessário para parar a rotação.

O servomotor fornece um grande torque na velocidade nula. Este torque é necessário para aceleração rápida. Da Fig. 4.22(c), verificamos que o torque T gerado é uma função da velocidade angular θ do eixo do motor e da tensão de controle E_c . A equação para a curva torque-velocidade é

$$T = -K_n \dot{\theta} + K_c E_c \quad (4.33)$$

onde K_n e K_c são constantes positivas. A equação de equilíbrio de torque para o servomotor bifásico é

$$T = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} \quad (4.34)$$

onde J é o momento de inércia do motor e a carga referida ao eixo do motor e f é o coeficiente de fricção-viscosa do motor e da carga referida ao eixo do motor. Das Eqs. (4.33) e (4.34) obtemos a seguinte equação:

$$J\ddot{\theta} + (f + K_n)\dot{\theta} = K_c E_c$$

Notando que a tensão de controle E_c é a entrada e o deslocamento do eixo do motor é a saída, verificamos que a função de transferência do sistema é dada por

$$\frac{\Theta(s)}{E_c(s)} = \frac{K_c}{Js^2 + (f + K_n)s} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)} \quad (4.35)$$

onde

$$K_m = K_c / (f + K_n) = \text{constante de ganho do motor}$$

$$T_m = J / (f + K_n) = \text{constante de tempo do motor}$$

A Fig. 4.22(d) mostra um diagrama de blocos para este sistema. A partir da função de transferência deste sistema, podemos ver que $(f + K_n)s$ é um termo de fricção-viscosa produzido pelo motor e carga. Portanto, K_n , o negativo da inclinação da curva torque-velocidade, junto com f define a fricção-viscosa equivalente do conjunto motor e carga. Para curvas torque-velocidade mais inclinadas, o amortecimento do motor é maior. Se a inércia do rotor é suficientemente baixa, então, em grande parte da faixa de frequência temos $|T_m s| \ll 1$ e o servomotor atua como um integrador.

A função de transferência dada pela Eq. (4.35) é baseada na hipótese de que o servomotor é linear. Na prática, entretanto não é exatamente assim. Para curvas torque-velocidade não exatamente paralelas e equidistantes, o valor de K_n não é constante e, portanto, os valores de K_m e T_m também não são constantes; eles variam com a tensão de controle.

Motores c.c. controlados por armadura. Um motor c.c. é empregado em um sistema de controle quando é exigida uma quantidade apreciável de potência no eixo. Os motores c.c. são muito mais eficientes do que os servomotores c.a. bifásicos.

Os motores c.c. possuem campos excitados separadamente. São ou controlados por armadura com campo fixo ou controlados por campo com corrente de armadura fixa. Por exemplo, motores c.c. usados em instrumentos empregam um campo por magneto-permanente fixo, e o sinal de controle é aplicado aos terminais da armadura.

As características de desempenho do motor c.c. controlado por armadura assemelham-se às características idealizadas do servomotor c.a. bifásico.

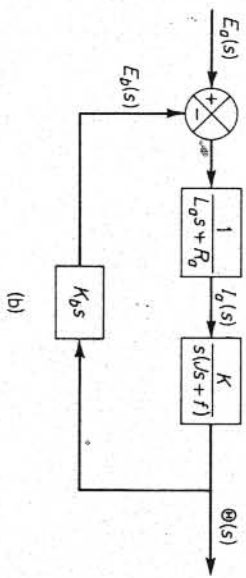
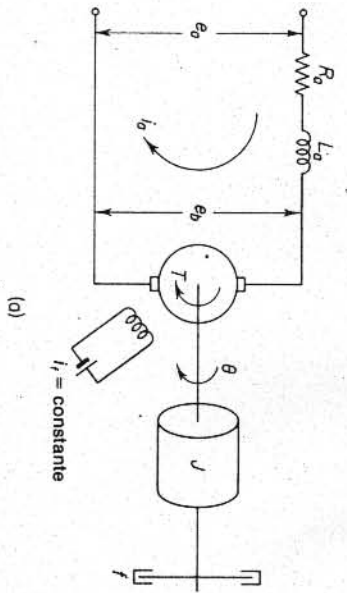


Fig. 4.23 (a) Diagrama esquemático de um motor c.c. controlado por armadura; (b) diagrama de blocos.

Considere o motor c.c. controlado por armadura indicado na Fig. 4.23(a). Neste sistema,

- R_a = resistência do enrolamento da armadura, ohms
- L_a = indutância do enrolamento da armadura, henrys
- i_a = corrente do enrolamento da armadura, ampères
- i_f = corrente de campo, ampères
- e_a = tensão aplicada na armadura, volts
- e_b = força contra eletromotriz, volts
- θ = deslocamento angular do eixo do motor, radianos
- T = torque fornecido pelo motor, N · m
- J = momento de inércia equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg·m²
- f = coeficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg·m/rad/s

O torque T fornecido pelo motor é proporcional ao produto da corrente de armadura i_a e o fluxo no entreferro de ar ψ , que por sua vez é proporcional à corrente de campo ou

$$\psi = K_f i_f$$

onde K_f é uma constante: O torque T pode, portanto, ser escrito

$$T = K_f i_f K_1 i_a$$

onde K_1 é a constante.

No motor c.c. controlado por armadura, a corrente de campo é mantida constante. Para uma corrente de campo constante, resulta um fluxo constante, e o torque torna-se diretamente proporcional à corrente de armadura, de modo que

$$T = K i_a$$

onde K é a constante de torque do motor. Quando a armadura está girando, é induzida na armadura uma tensão proporcional ao produto do fluxo e da velocidade angular. Para um fluxo constante, a tensão induzida e_b é diretamente proporcional à velocidade angular $d\theta/dt$. Portanto,

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \quad (4.36)$$

onde K_b é a constante de força-contra-eletromotriz.

A velocidade de um motor c.c. controlado por armadura é controlada pela tensão de armadura e_a . A tensão de armadura e_a é suprida por um amplificador (ou por um gerador, que é suprido por um amplificador). A equação diferencial para o circuito de armadura é

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (4.37)$$

A corrente de armadura produz o torque que é aplicado à inércia e à fricção; portanto,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K i_a \quad (4.38)$$

Supondo que todas as condições iniciais são nulas e considerando as transformadas de Laplace das Eqs. (4.36), (4.37) e (4.38), obtemos as seguintes equações:

$$K_b s \Theta(s) = E_a(s) \quad (4.39)$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) + E_b(s) = E_a(s) \quad (4.40)$$

$$(J s^2 + f s) \Theta(s) = T(s) = K I_a(s) \quad (4.41)$$

Considerando $E_a(s)$ como a entrada e $\Theta(s)$ como a saída podemos construir os diagramas de blocos das Eqs. (4.39), (4.40) e (4.41), como indicado na Fig. 4.23(b). O eixo da força-contra-eletromotriz é visto como sendo o sinal de realimentação proporcional à velocidade do motor. Esta força-contra-eletromotriz aumenta o amortecimento efetivo do sistema. A função de transferência deste sistema é dada por

$$\Theta(s) = \frac{K_1}{s(L_a J s^2 + (L_a f + R_a J) s + R_a f + \frac{K K_b}{J})} \quad (4.42)$$

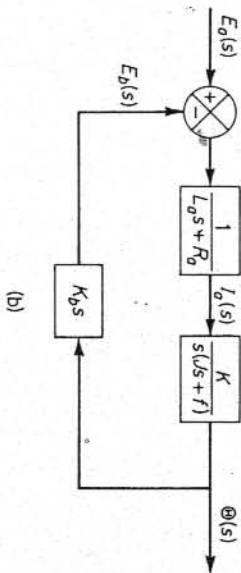
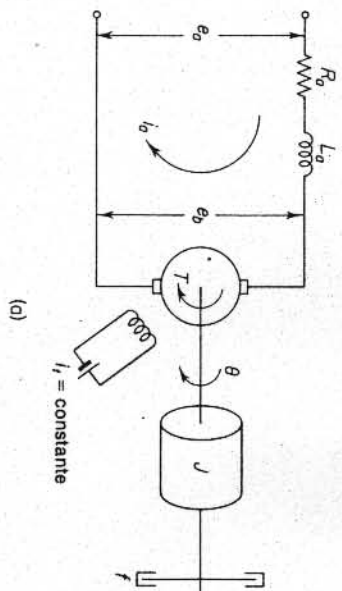


Fig. 4.23 (a) Diagrama esquemático de um motor c.c. controlado por armadura; (b) diagrama de blocos.

Considere o motor c.c. controlado por armadura indicado na Fig. 4.23(a). Neste sistema,

- R_a = resistência do enrolamento da armadura, ohms
- L_a = indutância do enrolamento da armadura, henrys
- i_a = corrente do enrolamento da armadura, ampères
- i_f = corrente de campo, ampères
- e_a = tensão aplicada na armadura, volts
- e_b = força contra eletromotriz, volts
- θ = deslocamento angular do eixo do motor, radianos
- T = torque fornecido pelo motor, N · m
- J = momento de inércia equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg-m²
- f = coeficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg-m/rad/s

O torque T fornecido pelo motor é proporcional ao produto da corrente de armadura i_a e o fluxo no entreferro de ar ψ , que por sua vez é proporcional à corrente de campo ou

$$\psi = K_f i_f$$

onde K_f é uma constante. O torque T pode, portanto, ser escrito

$$T = K_f i_f K_i i_a$$

onde K_i é a constante.

No motor c.c. controlado por armadura, a corrente de campo é mantida constante. Para uma corrente de campo constante, resulta um fluxo constante, e o torque torna-se diretamente proporcional à corrente de armadura, de modo que

$$T = K_i i_a$$

onde K é a constante de torque do motor. Quando a armadura está girando, é induzida na armadura uma tensão proporcional ao produto do fluxo e da velocidade angular. Para um fluxo constante, a tensão induzida e_b é diretamente proporcional à velocidade angular $d\theta/dt$. Portanto,

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \quad (4.36)$$

onde K_b é a constante de força-contrá-eletromotriz.

A velocidade de um motor c.c. controlado por armadura é controlada pela tensão de armadura e_a . A tensão de armadura e_a é suprida por um amplificador (ou por um gerador, que é suprido por um amplificador). A equação diferencial para o circuito de armadura é

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \quad (4.37)$$

A corrente de armadura produz o torque que é aplicado à inércia e à fricção; portanto,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K_i i_a \quad (4.38)$$

Supondo que todas as condições iniciais são nulas e considerando as transformadas de Laplace das Eqs. (4.36), (4.37) e (4.38), obtemos as seguintes equações:

$$K_b s \Theta(s) = E_a(s) \quad K_i = K_t \quad (4.39)$$

$$(L_a s + R_a) I_a(s) + E_b(s) = E_a(s) \quad (4.40)$$

$$(J s^2 + f s) \Theta(s) = T(s) = K_i I_a(s) \quad (4.41)$$

Considerando $E_a(s)$ como a entrada e $\Theta(s)$ como a saída podemos construir os diagramas de blocos das Eqs. (4.39), (4.40) e (4.41), como indicado na Fig. 4.23(b). O efeito da força-contrá-eletromotriz é visto como sendo o sinal de realimentação proporcional à velocidade do motor. Esta força-contrá-eletromotriz aumenta o amortecimento efetivo do sistema. A função de transferência deste sistema é dada por

$$\Theta(s) = \frac{K_t^2}{s [L_a J s^2 + (L_a f + R_a J) s + R_a f + K K_b]} \quad (4.42)$$

$$K = \frac{kA}{\Delta X} \quad \text{para condução}$$

$$= HA \quad \text{para convecção}$$

onde

- k = condutividade térmica, cal/m s °C
- A = área normal ao fluxo de calor, m²
- ΔX = espessura do condutor, m
- H = coeficiente de convecção, cal/m² s °C

Para transferência de calor por radiação, o fluxo de calor é dado por

$$q = K_r(\theta_1^4 - \theta_2^4)$$

onde

- q = taxa de fluxo de calor, cal/s
- K_r = coeficiente que depende da emissividade, dimensão e configuração da superfície que emana o calor e da superfície que o recebe
- θ_1 = temperatura absoluta do emissor, °K
- θ_2 = temperatura absoluta do receptor, °K

Desde que a constante K_r é um número muito pequeno, a transferência de calor por radiação somente é apreciável se a temperatura do emissor for muito alta.

A resistência térmica R para a transferência de calor entre duas substâncias pode ser definida como segue:

$$R = \frac{\text{variação na diferença de temperatura, } ^\circ\text{C}}{\text{variação na taxa de fluxo de calor, cal/s}}$$

A resistência térmica para transferência de calor por condução ou convecção é dada por

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{K}$$

Desde que a condutividade térmica e o coeficiente de convecção são praticamente constantes, a resistência térmica tanto para condução como para convecção é constante. A resistência térmica para transferência de calor por radiação é dada por

$$R = \frac{d(\Delta\theta)}{dq} = \frac{1}{4K_r\bar{\theta}^3}$$

onde

$\bar{\theta}$ = diferença de temperatura efetiva do emissor e receptor

A resistência de radiação não é constante; ela varia. Pode ser considerada constante apenas para um pequeno intervalo de condições de operação.

A capacitância térmica C é definida por

$$C = \frac{\text{variação no calor armazenado, cal}}{\text{variação na temperatura, } ^\circ\text{C}}$$

ou

$$C = Wc_p$$

onde

- W = massa da substância considerada, kg
- c_p = calor específico da substância, cal/°C·kg

Sistemas térmicos. Considere o sistema mostrado na Fig. 4.31. É suposto que o tanque é isolado para eliminar perda de calor para o ar na vizinhança. Também é suposto que não há armazenamento de calor na isolação e que o líquido no tanque é perfeitamente misturado de modo a estar em uma temperatura uniforme. Conseqüentemente uma temperatura única é usada para descrever a temperatura do líquido no tanque e do líquido saindo do tanque.

Vamos definir

- θ_0 = temperatura em regime estacionário do líquido entrando, °C
- θ_1 = temperatura em regime estacionário do líquido saindo, °C
- G = taxa de fluxo do líquido em regime estacionário, kg/s
- M = massa do líquido no tanque, kg
- c = calor específico do líquido, cal/kg °C
- R = resistência térmica, °C·s/cal
- C = capacitância térmica, cal/°C
- H = taxa de entrada de calor em regime estacionário, cal/°C

Suponha que a temperatura do líquido entrante é mantida constante e que a taxa de entrada de calor é subitamente variada de H para $H + h_1$, onde h_1 representa uma pequena variação na taxa de entrada de calor. A taxa de saída de calor variará então gradualmente desde H até $H + h_0$. A temperatura do líquido que sai também variará desde θ_0 até $\theta_0 + \theta$. Para este caso, h_0 , C e R são obtidas, respectivamente, por

$$h_0 = Gc\theta$$

$$C = Mc$$

$$R = \frac{\theta}{h_0} = \frac{1}{Gc}$$

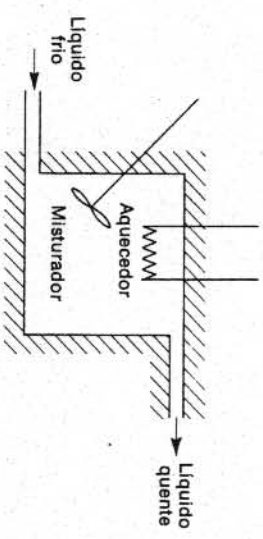


Fig. 4.31 Sistema térmico.

A equação diferencial para este sistema é

$$C \frac{d\theta}{dt} = h_1 - h_0$$

que pode ser reescrita como

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_1$$

Note que a constante de tempo do sistema é igual a RC ou M/G segundos. A função de transferência relacionando θ e h_1 é dada por

$$\Theta(s) = \frac{R}{RCs + 1}$$

onde

$$\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)] \quad \text{e} \quad H_1(s) = \mathcal{L}[h_1(t)]$$

Na prática, a temperatura do líquido que entra pode flutuar e atuar como um distribuidor de carga. (Se uma temperatura de saída constante é desejada, um controlador automático pode ser instalado para ajustar a taxa de fluxo de entrada de calor de maneira a compensar as flutuações na temperatura do líquido de entrada.) Se a temperatura do líquido fluindo na entrada for subitamente variada desde Θ_0 , até $\Theta_1 + \theta_1$, enquanto a taxa de entrada de calor H e a taxa de fluxo de líquido G são mantidas constantes, então a taxa de fluxo de saída de calor variará desde \bar{H} para $H + h_0$, e a temperatura do líquido que flui na saída variará desde Θ_0 para $\Theta_0 + \theta$. A equação diferencial para este caso é

$$C \frac{d\theta}{dt} = Gc\theta_1 - h_0$$

que pode ser reescrita

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_1$$

A função de transferência relacionando θ e θ_1 é dada por

$$\Theta(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

onde

$$\Theta(s) = \mathcal{L}[\theta(t)] \quad \text{e} \quad \Theta_1(s) = \mathcal{L}[\theta_1(t)]$$

Se o sistema térmico apresentado está sujeito tanto a variações na temperatura do líquido que flui na entrada como na taxa de entrada de calor, enquanto a taxa do fluxo de líquido é mantida constante, a variação θ na temperatura do líquido que flui na saída pode ser dada pela seguinte equação:

$$RC \frac{d\theta}{dt} + \theta = \theta_1 + Rh_1$$

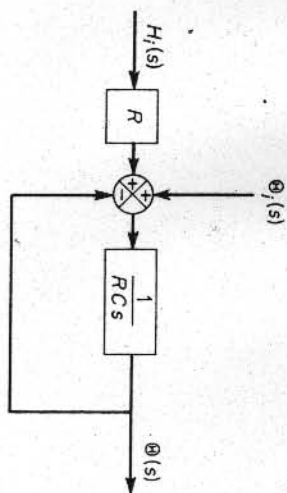


Fig. 4.32 Diagrama de blocos do sistema indicado na Fig. 4.31.

Um diagrama de blocos correspondente a este caso é mostrado na Fig. 4.32. (Note que o sistema envolve duas entradas. Discutiremos sistemas de múltiplas-entradas-múltiplas-saídas na Seção 4.6.)

4.6 SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS E MATRIZES DE TRANSFERÊNCIA

Na Seção 4.2, a função de transferência foi definida para sistema de entrada única-saída única. Nesta seção estenderemos a representação de função de transferência a sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Matrizes de transferência. Considere um sistema com m entradas e n saídas. Podemos considerar as m entradas como sendo os componentes de um vetor. Denominaremos este vetor por vetor de entrada. Analogamente podemos considerar as n saídas como componentes de um vetor de saída. A matriz que relaciona a transformada de Laplace do vetor de saída com a transformada de Laplace do vetor de entrada é denominada a matriz de transferência entre o vetor de saída e o vetor de entrada.

Considere o sistema mostrado na Fig. 4.33. Este sistema tem duas entradas e duas saídas. Da Fig. 4.33, a relação entre as saídas e as entradas é dada por

$$\begin{aligned} X_1(s) &= G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ X_2(s) &= G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{aligned}$$

onde $G_{ij}(s)$ é a função de transferência relacionando a i -ésima saída com a j -ésima entrada. Utilizando a notação matriz-vetor, podemos escrever esta relação de transferência como sendo

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Um sistema possuindo múltiplas entradas e múltiplas saídas é chamado sistema *multivariável*. Se um sistema deste tipo possuir m entradas e n saídas, e se a função de transferência entre a i -ésima saída e a j -ésima entrada for dada por $G_{ij}(s)$,

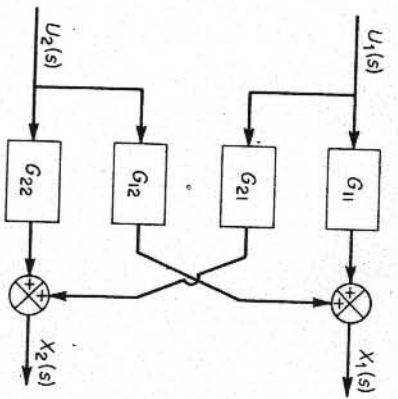


Fig. 4.33 Sistema de múltiplas entradas-múltiplas saídas.

então à transformada de Laplace da i -ésima saída é relacionada com as transformadas de Laplace das m entradas por

$$X_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \dots + G_{im}(s)U_m(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Note que na definição de $G_{ij}(s)$, somente a j -ésima entrada é considerada e todas as outras entradas são supostas nulas. Na forma matricial, a transformada de Laplace do vetor de saída é relacionada com a transformada de Laplace do vetor de entrada pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

A Eq. (4.65) indica as interações entre as m entradas e as n saídas. A Eq. (4.65) pode ser reescrita como

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}(s)$ é a transformada de Laplace do vetor de saída, $\mathbf{U}(s)$ é a transformada de Laplace do vetor de entrada, e $\mathbf{G}(s)$ é a matriz de transferência entre $\mathbf{X}(s)$ e $\mathbf{U}(s)$.

Exemplo 4.2 Considere o sistema mecânico mostrado na Fig. 4.34. Suponhamos que o sistema está inicialmente no repouso.

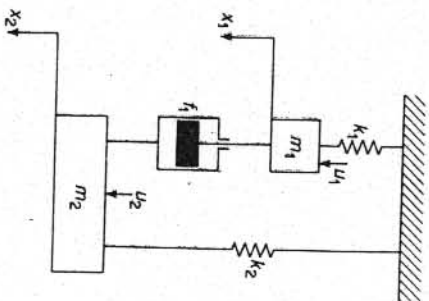


Fig. 4.34 Sistema mecânico.

Este sistema possui duas entradas $u_1(t)$ e $u_2(t)$ e duas saídas $x_1(t)$ e $x_2(t)$. As equações que descrevem a dinâmica do sistema são

$$m_1 \ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 = u_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + f_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 x_2 = u_2$$

Considerando as transformadas de Laplace destas duas equações e substituindo as condições iniciais nulas, obtemos

$$(m_1 s^2 + f_1 s + k_1) X_1(s) - f_1 s X_2(s) = U_1(s)$$

$$(m_2 s^2 + f_1 s + k_2) X_2(s) - f_1 s X_1(s) = U_2(s)$$

Na forma matriz-vetor, obtemos

$$\begin{bmatrix} m_1s^2 + f_1s + k_1 & -f_1s \\ -f_1s & m_2s^2 + f_1s + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Vamos definir

$$\Delta = (m_1s^2 + f_1s + k_1)(m_2s^2 + f_1s + k_2) - f_1^2s^2 \neq 0$$

Então, premultiplicando pela inversa da matriz 2×2 na Eq. (4.66), obtemos

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2s^2 + f_1s + k_2}{\Delta} & \frac{f_1s}{\Delta} \\ \frac{f_1s}{\Delta} & \frac{m_1s^2 + f_1s + k_1}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

A matriz 2×2 desta última equação é a matriz de transferência entre as saídas e as entradas. Obviamente, as respostas temporais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dadas por

$$x_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{m_2s^2 + f_1s + k_2}{\Delta} U_1(s) + \frac{f_1s}{\Delta} U_2(s) \right] \quad (4.67)$$

$$x_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{f_1s}{\Delta} U_1(s) + \frac{m_1s^2 + f_1s + k_1}{\Delta} U_2(s) \right] \quad (4.68)$$

Para determinar as respostas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ para $u_1 \neq 0, u_2 = 0$ (ou $u_1 = 0, u_2 \neq 0$), simplesmente substituímos $U_2(s) = 0$ (ou $U_1(s) = 0$) nas Eqs. (4.67) e (4.68).

Exemplo 4.3 O sistema mostrado na Fig. 4.35 possui duas entradas, a entrada de referência e a entrada de distúrbio e uma saída. Obtenha a matriz de transferência entre a saída e as entradas.

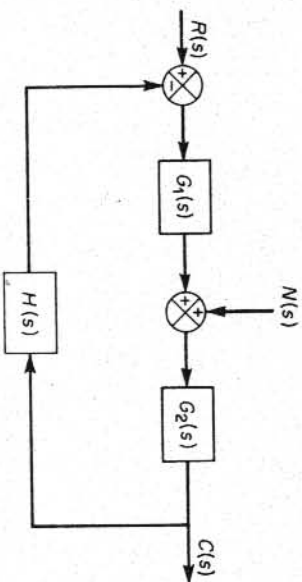


Fig. 4.35 Sistema possuindo duas entradas e uma saída.

A transformada de Laplace da saída $C(s)$ pode ser obtida como

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

Na forma matriz-vetor,

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} & \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

A matriz de transferência entre a saída $C(s)$ e as entradas $R(s)$ e $N(s)$ é a matriz 1×2 dada na Eq. (4.69).

Comentários. Nesta seção, apresentamos uma definição da matriz de transferência e deduzimos as matrizes de transferência para dois sistemas. A representação por matriz de transferência para sistemas multivariáveis é uma extensão da representação por função de transferência de sistemas de entrada-única-saída-única. A análise e controle ótimo de sistemas multivariáveis pode ser conduzida mais convenientemente pelo uso de variáveis de estado. Consequentemente, adiantemos a análise de sistemas multivariáveis para os Caps. 14-16, onde estudaremos a abordagem no espaço de estados para a análise e otimização de sistemas de controle.

4.7 GRÁFICOS DE FLUXO DE SINAL

O diagrama de blocos é útil para representar graficamente sistemas de controle. Entretanto, para um sistema muito complicado, o processo de redução de diagramas de blocos se torna muito demorado. Uma abordagem alternativa para determinar as relações entre as variáveis do sistema, de um sistema de controle complicado, é a abordagem por gráfico de fluxo de sinal, devida a S. J. Mason.

Gráficos de fluxo de sinal. Um gráfico de fluxo de sinal é um diagrama que representa um conjunto de equações algébricas lineares simultâneas. Quando se aplica o método do gráfico de fluxo de sinal para análise de sistemas de controle, devem-se inicialmente transformar as equações diferenciais lineares em equações algébricas em s .

Um gráfico de fluxo de sinal consiste em uma rede na qual os nós são ligados por ramos diretos. Cada nó representa uma variável do sistema e cada ramo ligado entre dois nós atua como um multiplicador de sinal. Note que o sinal flui em apenas um sentido. O sentido do fluxo do sinal é indicado por uma seta colocada no ramo, e o fator de multiplicação é indicado ao longo do ramo. O gráfico de fluxo de sinal indica o fluxo de sinais de um ponto de um sistema para um outro e fornece as relações entre os sinais.

Como é de esperar, um gráfico de fluxo de sinal contém essencialmente a mesma informação do diagrama de blocos. A vantagem do uso de um gráfico de fluxo de sinal para representar um sistema de controle é que uma fórmula de ganho, denominada fórmula de ganho de Mason, é disponível fornecendo as relações entre as variáveis do sistema sem exigir uma redução do gráfico.

Definições. Antes de discutirmos sobre os aspectos de gráficos de fluxo de sinal, devemos definir alguns termos.

Nó. Um nó é um ponto representando uma variável ou um sinal.

Transmitância. A transmitância é um ganho entre dois nós.

Ramo. Um ramo é um segmento de reta orientado unindo dois nós. O ganho de um ramo é uma transmitância.

Nó de entrada ou fonte. Um nó de entrada ou fonte é um nó que possui apenas ramos eferentes (que saem do nó). Corresponde a uma variável independente.

Note que devido ao fato de os três laços possuírem um ramo comum, não há laços que não se tocam. Conseqüentemente, o determinante Δ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) \\ &= 1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 \end{aligned}$$

O cofator Δ_1 do determinante ao longo do caminho direto ligando o nó de entrada e o nó de saída é obtido pela remoção dos laços que tocam este caminho. Desde que o caminho P_1 toca todos os três laços, obtemos

$$\Delta_1 = 1$$

Portanto, o ganho global, entre a entrada $R(s)$ e a saída $C(s)$, ou a função de transferência em malha-fechada, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 - G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3} \end{aligned}$$

que é a mesma expressão da função de transferência em malha-fechada obtida pela redução do diagrama de blocos. A fórmula do ganho de Mason fornece o ganho global $C(s)/R(s)$ sem uma redução do gráfico.

Exemplo 4.5 Considere o sistema indicado na Fig. 4.42. Obtenha a função de transferência em malha-fechada $C(s)/R(s)$ usando a fórmula de ganho de Mason.

Neste sistema há três caminhos diretos entre a entrada $R(s)$ e a saída $C(s)$. Os ganhos dos caminhos diretos são

$$\begin{aligned} P_1 &= G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 \\ P_2 &= G_1 G_6 G_4 G_5 \\ P_3 &= G_1 G_2 G_7 \end{aligned}$$

Há quatro laços individuais. Os ganhos destes laços são

$$\begin{aligned} L_1 &= -G_4 H_1 \\ L_2 &= -G_2 G_7 H_2 \\ L_3 &= -G_6 G_4 G_5 H_2 \\ L_4 &= -G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 \end{aligned}$$

O laço L_1 não toca o laço L_2 . Conseqüentemente, o determinante Δ é dado por

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1 L_2 \quad (4.75)$$

O cofator Δ_1 é obtido de Δ removendo os laços que tocam o caminho P_1 . Portanto, removendo L_1, L_2, L_3, L_4 e $L_1 L_2$ da Eq. (4.75), obtemos

$$\Delta_1 = 1$$

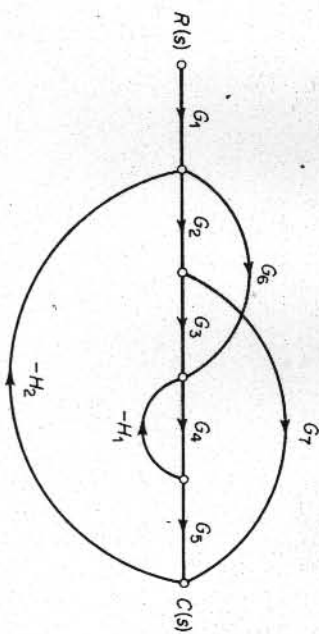


Fig. 4.42 Gráfico do fluxo de sinal para um sistema.

Analogamente, o cofator Δ_2 é

$$\Delta_2 = 1$$

O cofator Δ_3 é obtido removendo-se L_2, L_3, L_4 e $L_1 L_2$ da Eq. (4.75), resultando

$$\Delta_3 = 1 - L_1$$

A função de transferência em malha-fechada $C(s)/R(s)$ é então

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= P = \frac{1}{\Delta} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3) \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 + G_1 G_6 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_7 (1 + G_4 H_1)}{1 + G_4 H_1 + G_2 G_7 H_2 + G_6 G_4 G_5 H_2 + G_1 H_1 G_2 G_7 H_2 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2} \end{aligned}$$

Comentários conclusivos. A aplicação usual dos gráficos de fluxo de sinal é em diagramação de sistemas. O conjunto de equações descrevendo um sistema linear é representado por um gráfico do fluxo de sinal estabelecendo os nós que representam as variáveis do sistema e interconectando os nós com transmitâncias, diretas ou com pesos, que representam as relações entre as variáveis. Uma fórmula de ganho de Mason pode ser utilizada para estabelecer a relação entre uma entrada e uma saída. (Alternativamente, as variáveis no sistema podem ser eliminadas uma a uma com técnicas de redução.) A fórmula de ganho de Mason é especialmente útil na redução de grandes e complexos diagramas de sistemas em um passo, sem exigir reduções passo-a-passo.

PROBLEMAS TÍPICOS E SOLUÇÕES

Problema A.4.1 A Fig. 4.43 mostra um diagrama esquemático de um acelerômetro. Suponha que a carga do acelerômetro está firmemente acoplada a uma estrutura de uma aeronave. (O acelerômetro indica a aceleração de sua carga em relação ao espaço inercial.) O ângulo de inclinação θ medido a partir da linha horizontal é suposto constante durante o intervalo de tempo de medida.

Mostre que para entradas em baixas frequências, a aceleração da carga, relativamente ao espaço inercial, pode ser determinada pelo deslocamento da massa m em relação à sua cargaça.

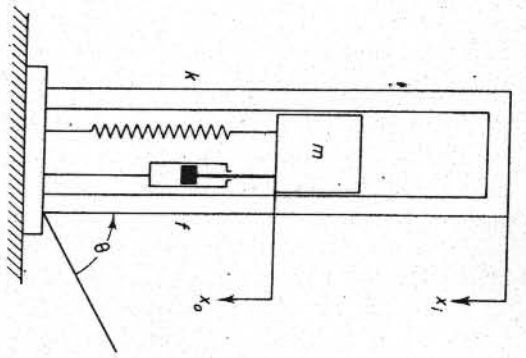


Fig. 4.43 Diagrama esquemático de um acelerômetro.

Solução. Vamos definir

$$x_1 = \text{deslocamento da carga em relação ao espaço inercial}$$

$$x_0 = \text{deslocamento da massa } m \text{ relativa ao espaço inercial}$$

$$y = x_0 - x_1 = \text{deslocamento da massa } m \text{ relativamente à carga}$$

A equação para este sistema é

$$m\ddot{x}_0 + f(\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + k(x_0 - x_1) - mg \sin \theta = 0$$

Em termos de y , obtemos

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_1 + mg \sin \theta$$

Desde que θ é suposto constante, durante o intervalo de tempo de medida, $mg \sin \theta$ é constante, e é possível calibrar o deslocamento e definir uma nova variável z tal que

$$z = y - \frac{mg}{k} \sin \theta$$

Então, obtemos

$$m\ddot{z} + f\dot{z} + kz = -m\ddot{x}_1$$

Se a aceleração de entrada (a aceleração da carga relativamente ao espaço inercial) \ddot{x}_1 é considerada a entrada do sistema e o deslocamento z é considerado a saída, então a função de transferência do sistema torna-se

$$\frac{Z(s)}{s^2 X_1(s)} = -\frac{1}{s^2 + \frac{f}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$\frac{Z(s)}{s^2 X_1(s)} = -\frac{m}{k}$$

o que significa que $z = y - (mg/k) \sin \theta$ é aproximadamente proporcional à aceleração da entrada lentamente variada. Portanto, para entradas em baixa frequência, a aceleração da carga relativamente ao espaço inercial pode ser dada por

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m} \left(y - \frac{mg}{k} \sin \theta \right)$$

Note que este tipo de acelerômetro possui uma frequência natural não amortecida suficientemente alta $\sqrt{k/m}$ comparada com a máxima frequência da entrada a ser medida.

Problema A.4.2 Transmissões com engrenagens são normalmente utilizadas em servomecanismos para reduzir a velocidade, para ampliar o torque ou para obter a mais eficiente transferência de potência casando o elemento excitador com uma dada carga.

Considere o sistema por transmissão com engrenagens mostrado na Fig. 4.44. Neste sistema, uma carga é alimentada por um motor através de uma transmissão por engrenagens. Supondo que a dureza do eixo da transmissão por engrenagem é infinita (e ainda não haja folga nem deformação elástica) e que o número de dentes em cada engrenagem é proporcional ao raio da engrenagem, obtenha o momento de inércia equivalente e a fricção equivalente referidos ao eixo do motor e referidos ao eixo da carga.

Na Fig. 4.44, os números de dentes nas engrenagens 1, 2, 3 e 4 são N_1, N_2, N_3 e N_4 , respectivamente. Os deslocamentos angulares dos eixos 1, 2 e 3 são θ_1, θ_2 e θ_3 , respectivamente. Portanto, $\theta_2/\theta_1 = N_1/N_2$ e $\theta_3/\theta_2 = N_2/N_3$. O momento de inércia e a fricção viscosa de cada componente da transmissão por engrenagem são denotados por $J_1, f_1; J_2, f_2; J_3, f_3$, respectivamente. (J_s e f_s incluem o momento de inércia e a fricção da carga.)

Solução. Para este sistema de transmissão por engrenagem, podemos obter as três equações seguintes: Para o primeiro eixo,

$$J_1 \ddot{\theta}_1 + f_1 \dot{\theta}_1 + T_1 = T_m \quad (4.76)$$

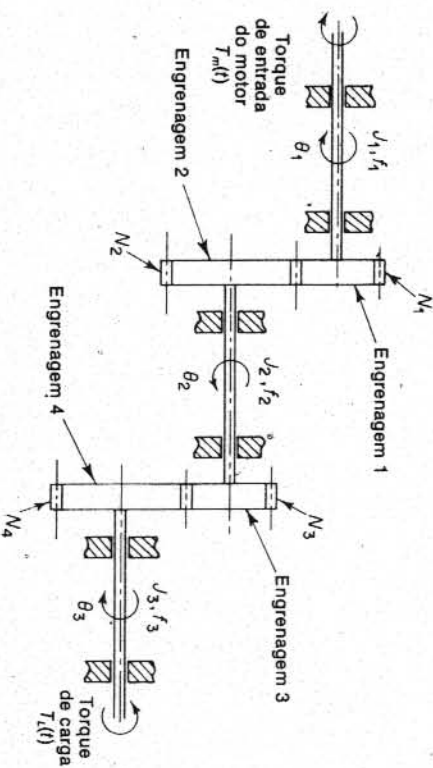


Fig. 4.44 Sistema de transmissão por engrenagens.

effects must be considered, as will be discussed in Chapter 4. The action of an ideal pulley is illustrated in the following example.

EXAMPLE 2.7

Find and compare the equations describing the systems shown in Figure 2.18(a) and Figure 2.19(a). Let $x_1 = x_2 = 0$ correspond to the condition when the springs are neither stretched nor compressed.

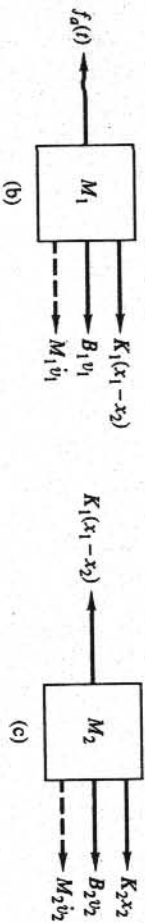
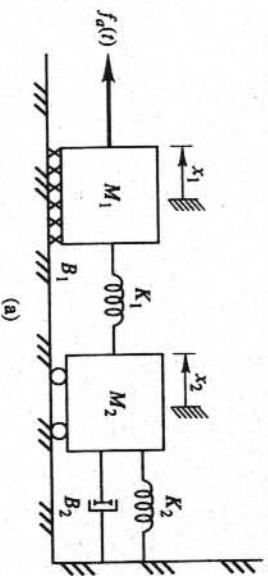


FIGURE 2.18 (a) Translational system for Example 2.7. (b), (c) Free-body diagrams.

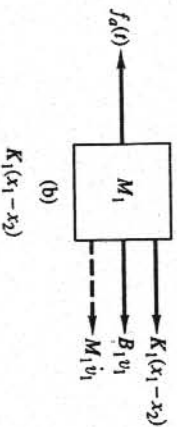
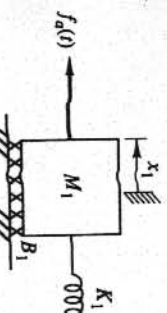
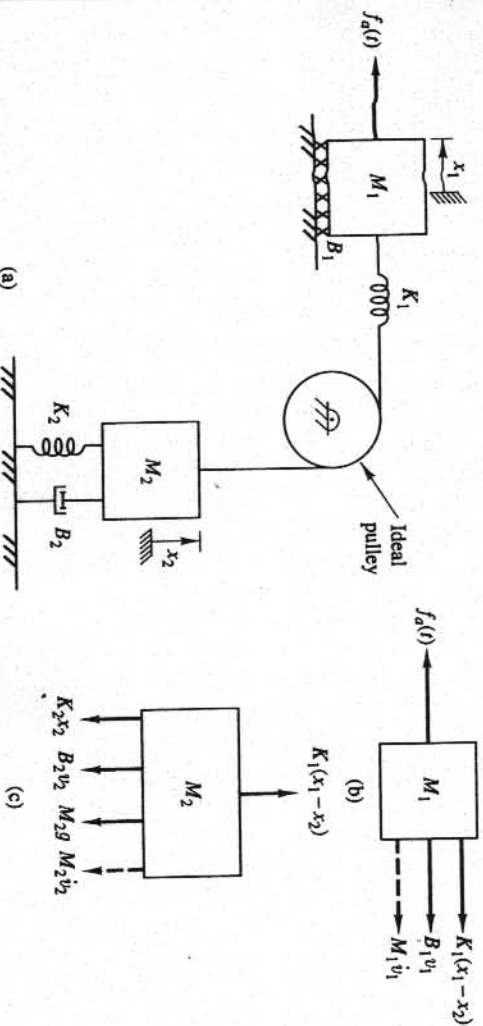


FIGURE 2.19 (a) Translational system with an ideal pulley added. (b), (c) Free-body diagrams.

2.4 Obtaining the System Model

Solution

Free-body diagrams for the system in part (a) of Figure 2.18 are parts (b) and (c). Note that the spring K_1 exerts equal but opposite forces on M_1 and M_2 . Summing the forces shown in the diagrams gives

$$M_1 \dot{v}_1 + B_1 v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_d(t)$$

$$M_2 \dot{v}_2 + B_2 v_2 + K_2 x_2 = K_1(x_1 - x_2)$$

When an ideal pulley is added to give the system in Figure 2.19, the free-body diagram for M_1 , which is repeated in part (b) of Figure 2.19, remains unchanged. To draw the diagram for M_2 , we note that the cable moves with the same motion because it cannot stretch. Hence the cable does not affect the magnitude of the forces exerted by K_1 passes through the cable and is exerted directly on M_2 but merely changes the direction of the force on M_2 to be upward. Hence the free-body diagram for M_2 is shown in Figure 2.19(c). Summing the forces in its parts (b) and (c) of the figure gives

$$M_1 \dot{v}_1 + B_1 v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_d(t)$$

$$M_2 \dot{v}_2 + B_2 v_2 + K_2 x_2 + M_2 g = K_1(x_1 - x_2)$$

As expected, (28) and (29) are identical except for the presence of the gravitational force $M_2 g$.

It is important to be aware of a significant difference between the equations given by (28) and (29) for the last example. The difference involves the elongation or compression, respectively, of the spring K_1 . Equations (28) are valid for Figure 2.18(a) for all values of x_1 and x_2 . For the system in Figure 2.19(a), however, the free-body diagram in Figure 2.19(c) is valid only if the cable exerts a downward force on M_2 for a negative value of $x_1 - x_2$. This implies that the cable would tend to push apart the masses if they were attached to its ends, which is not physically possible. In such a case, the cable would buckle, become detached from the pulley, and exert no force on M_2 . Thus (29) can be used only when $x_1 - x_2 \geq 0$. The engineer should always examine the analytical or computer solution to be sure that the results correspond to conditions for which the equations are valid.

Parallel Combinations

In some cases, two or more springs or dashpots can be replaced by an equivalent element.

often several satisfactory choices. The examples also show that finding the state-variable equations is not made significantly more difficult when some of the system's elements are nonlinear.

EXAMPLE 3.2

Find the state-variable equations for the system shown in Figure 3.2(a), which is identical to Figure 2.13(a). Write output equations for the tensile force f_{K_2} in the spring K_2 and for the total momentum m_T of the masses.

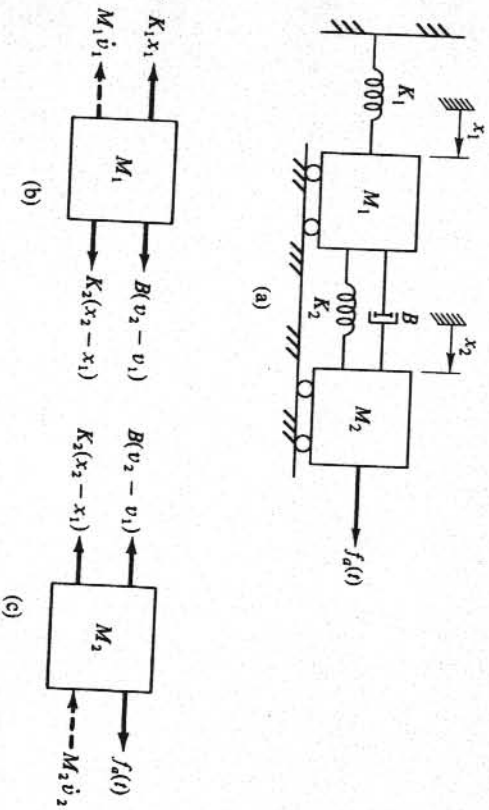


FIGURE 3.2 (a) Translational system for Example 3.2. (b), (c) Free-body diagrams.

Solution

An appropriate choice of state variables is x_1 , v_1 , x_2 and v_2 , because we can express the velocity of each mass and the elongation of each spring in terms of these four variables and because none of these variables can be expressed in terms of the other three. Because $\dot{x}_1 = v_1$ and $\dot{x}_2 = v_2$, two of the four state-variable equations are available immediately.

The free-body diagrams for the two masses are repeated from Example 2.2 in Figure 3.2(b) and Figure 3.2(c), with all forces labeled in terms of the state variables and the input. By D'Alembert's law,

$$M_1 \dot{v}_1 + K_1 x_1 - K_2(x_2 - x_1) - B(v_2 - v_1) = 0$$

$$M_2 \dot{v}_2 + K_2(x_2 - x_1) + B(v_2 - v_1) = f_a(t)$$

which may be solved for \dot{v}_1 and \dot{v}_2 , respectively. The state-variable equations are

$$\dot{x}_1 = v_1 \quad (3a)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{M_1} [- (K_1 + K_2)x_1 - Bv_1 + K_2x_2 + Bv_2] \quad (3b)$$

3.1 State-Variable Equations

$$\dot{x}_2 = v_2 \quad (3c)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{M_2} [K_2x_1 + Bv_1 - K_2x_2 - Bv_2 + f_a(t)] \quad (3d)$$

If we know the element values, the input $f_a(t)$ for $t \geq 0$, and the initial conditions $x_1(0)$, $v_1(0)$, $x_2(0)$, and $v_2(0)$, then we can solve this set of simultaneous first-order differential equations for x_1 , v_1 , x_2 , and v_2 for all $t \geq 0$. The output equations are

$$\begin{aligned} f_{K_2} &= K_2(x_2 - x_1) \\ m_T &= M_1 v_1 + M_2 v_2 \end{aligned} \quad (4)$$

EXAMPLE 3.3

As an alternative choice of state variables for the system in Figure 3.2(a), use the relative displacement x_R and the relative velocity v_R of mass M_2 with respect to M_1 , in place of x_2 and v_2 . Again find the state-variable and output equations.

Solution

We choose the four state variables x_1 , v_1 , x_R , and v_R , where

$$\begin{aligned} x_R &= x_2 - x_1 \\ v_R &= v_2 - v_1 \end{aligned}$$

The free-body diagrams when the forces are labeled in terms of these variables are shown in Figure 3.3. Remember that the inertial forces depend on the absolute accelerations of the respective masses. By D'Alembert's law,

$$\begin{aligned} M_1 \dot{v}_1 + K_1 x_1 - K_2 x_R - B v_R &= 0 \\ M_2 \dot{v}_1 + M_2 \dot{v}_R + B v_R + K_2 x_R &= f_a(t) \end{aligned}$$



FIGURE 3.3 Free-body diagrams for Example 3.3 using relative displacement and

Because there are only three energy-storing elements in the modified system, however, we would expect to need only three state variables, rather than the four that appear in (3). Two of the three state variables can be chosen to be v_1 and v_2 , which are related to the kinetic energy stored in the masses. We choose the third to be the elongation of the spring K_2 , which is related to the potential energy in that element and which is $x_R = x_2 - x_1$. One of the state-variable equations is $\dot{x}_R = v_2 - v_1$. The other two follow from (3b) and (3d), with $K_1 = 0$ and with $x_2 - x_1$ replaced by x_R :

$$\begin{aligned}\dot{x}_R &= v_2 - v_1 \\ \dot{v}_1 &= \frac{1}{M_1} [K_2 x_R - B v_1 + B v_2] \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{M_2} [-K_2 x_R + B v_1 - B v_2 + f_a(t)]\end{aligned}\quad (8)$$

The only variables on the right side of these equations are state variables and the input $f_a(t)$, as is required. The output equations are

$$\begin{aligned}f_{K_2} &= K_2 x_R \\ m_T &= M_1 v_1 + M_2 v_2\end{aligned}\quad (9)$$

An alternative form of the state-variable model can be found by letting $K_1 = 0$ in (6) and (7). Because the only state variables that are needed are v_1 , x_R , and v_R , we can omit the first equation in (6). Then the state-variable and output equations become

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \frac{1}{M_1} (K_2 x_R + B v_R) \\ \dot{x}_R &= v_R \\ \dot{v}_R &= \frac{1}{M_1 M_2} [-K_2 (M_1 + M_2) x_R - B (M_1 + M_2) v_R + M_1 f_a(t)]\end{aligned}\quad (10)$$

and

$$\begin{aligned}f_{K_2} &= K_2 x_R \\ m_T &= (M_1 + M_2) v_1 + M_2 v_R\end{aligned}\quad (11)$$

Finally, suppose that one of the outputs of interest is x_1 . It is not possible to express x_1 as an algebraic function of only x_R , v_1 , v_2 , and $f_a(t)$. Thus we cannot construct a suitable output equation based on (8). Similarly, because x_1 cannot be expressed as an algebraic function of only v_1 , x_R , v_R , and $f_a(t)$, we cannot write a suitable output equation based on (10). Hence, if x_1 is specified as one of the outputs of interest, three state variables are not

sufficient. We would need to consider x_1 as an additional state variable and add the equation $\dot{x}_1 = v_1$ to either (8) or (10).

The previous example shows why an additional state variable that is not related to energy storage is sometimes needed. The following example illustrates how the number of state variables can be less than the number of energy-storing elements when the system's stored energy can be expressed by a reduced number of variables.

EXAMPLE 3.6

Find a state-variable model for the linear system shown in Figure 3.4(a).

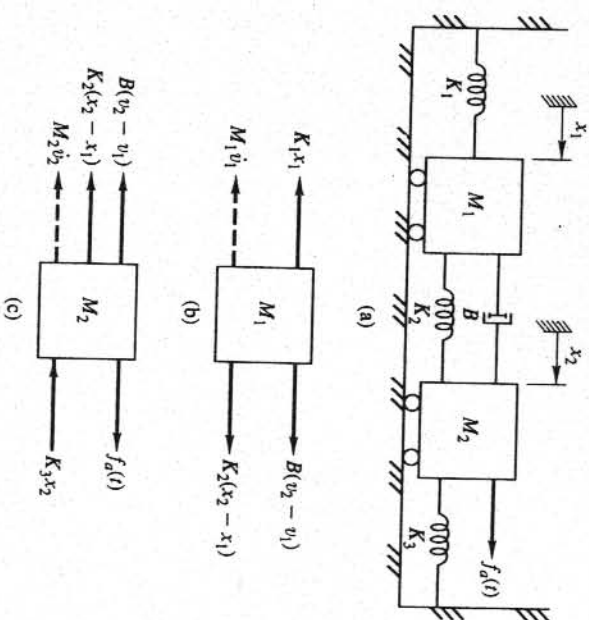


FIGURE 3.4 (a) Translational system with fewer state variables than energy-storing elements. (b), (c) Free-body diagrams.

Solution

Although there are three springs, their elongations are not all independent and can be specified in terms of the two displacement variables x_1 and x_2 . The elongations of K_1 , K_2 , and K_3 are x_1 , $x_2 - x_1$, and $-x_2$, respectively. The free-body diagrams for the two masses, which are shown in Figures 3.4(b) and 3.4(c), are the same as those in Figure 3.2 except for the additional force associated with K_3 . By D'Alembert's law,

$$\begin{aligned}M_1 \dot{v}_1 + (K_1 + K_2) x_1 + B v_1 - K_2 x_2 - B v_2 &= 0 \\ M_2 \dot{v}_2 - K_2 x_1 - B v_1 + (K_2 + K_3) x_2 + B v_2 &= f_a(t)\end{aligned}$$

By solving these equations for \dot{v}_1 and \dot{v}_2 , we can write the following four state-variable equations:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 \\ \dot{v}_1 &= \frac{1}{M_1} [-(K_1 + K_2)x_1 - Bv_1 + K_2x_2 + Bv_2] \\ \dot{x}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_2 &= \frac{1}{M_2} [K_2x_1 + Bv_1 - (K_2 + K_3)x_2 - Bv_2 + f_a(t)] \end{aligned} \quad (12)$$

If the outputs of interest are the tensile force f_k and the total momentum m_T , then the output equations are again given by (4).

In the following example, two springs and a dashpot are attached to a massless junction. The system contains three energy-storing elements and normally requires three state variables. However, when the dashpot is removed from the massless junction, the number of state variables is reduced.

EXAMPLE 3.7

Find the state-variable model for the system shown in Figure 3.5(a). The input is the force $f_a(t)$, and the output is the displacement x_2 of the massless junction A. Repeat the problem when the dashpot B_2 is removed.

Solution

A satisfactory choice of state variables is x_1 , v_1 , and x_2 , because these three variables determine the elongations of the springs and the velocity of the mass. One of the three state-variable equations is $\dot{x}_1 = v_1$.

To obtain the other two equations, we draw free-body diagrams for both the mass and the junction point, as shown in Figure 3.5(b) and Figure 3.5(c). Because the point A is massless, no inertial force is present in its free-body diagram. Summing the forces shown in these diagrams gives

$$M\dot{v}_1 + B_1v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_a(t) \quad (13a)$$

$$B_2\dot{x}_2 + K_2x_2 + K_1(x_2 - x_1) = 0 \quad (13b)$$

Solving (13) for \dot{v}_1 and \dot{x}_2 , we arrive at the state-variable equations

$$\dot{x}_1 = v_1 \quad (14a)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{M} [-K_1x_1 - B_1v_1 + K_1x_2 + f_a(t)] \quad (14b)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{B_2} [K_1x_1 - (K_1 + K_2)x_2] \quad (14c)$$

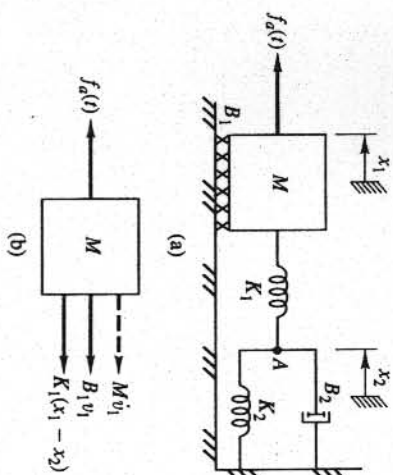


FIGURE 3.5 (a) Translational system containing a massless junction. (b), (c) Free-body diagrams.

Because the only output is one of the state variables, we shall not write separate output equation.

Removing the dashpot corresponds to setting $B_2 = 0$. We cannot make this substitution in (14c), because division by zero is an invalid mathematical operation. However, replacing B_2 by zero in (13) gives

$$M\dot{v}_1 + B_1v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_a(t)$$

$$K_2x_2 + K_1(x_2 - x_1) = 0$$

The second of these equations is purely algebraic and can be solved in terms of x_1 :

$$x_2 = \left(\frac{K_1}{K_1 + K_2} \right) x_1$$

The displacements x_1 and x_2 are now proportional to each other, so cannot both be state variables. If we choose x_1 and v_1 as the state variables, we still have $\dot{x}_1 = v_1$. To find the second state-variable equation substitute (16) into (15a) and solve for \dot{v}_1 . Thus

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 \\ \dot{v}_1 &= \frac{1}{M} \left[- \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} \right) x_1 - B_1v_1 + f_a(t) \right] \end{aligned}$$

As required, the variables appearing on the right sides of these equations are either state variables or the input.

The system for $B_2 = 0$ is shown in Figure 3.6. From the discussion associated with Example 2.10 and Figure 2.23(a), we see that the two s

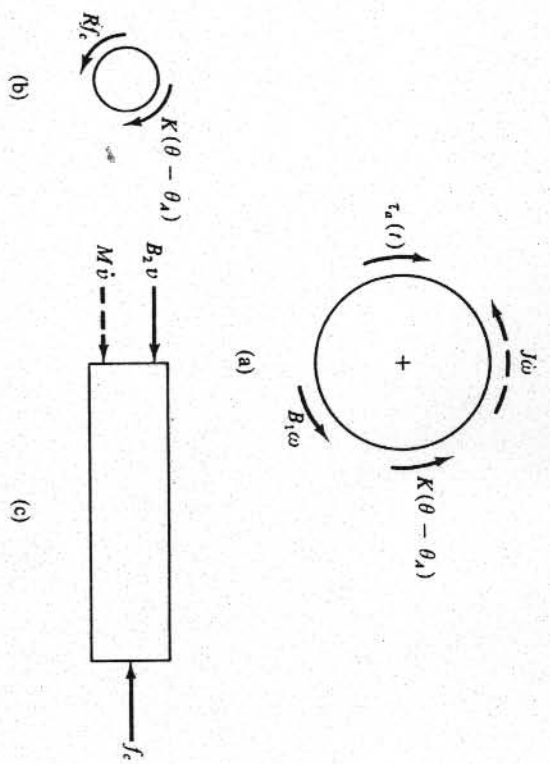


FIGURE 4.28 Free-body diagrams for Example 4.11. (a) Rotor. (b) Pinion gear. (c) Mass.

In addition, the geometric relationship

$$R\theta_A = x \quad (62)$$

must hold because of the contact between the rack and the pinion gear.

The fact that there are three energy-storing elements corresponding to the parameters J , M , and K suggests that the three variables ω , v , and $\theta_R = \theta - \theta_A$ might constitute a satisfactory set of state variables. However, the displacement x of the mass, which is usually of interest and which is one of the specified outputs, cannot be expressed as an algebraic function of ω , v , θ_R , and the input. Thus we need four state variables, which we choose to be θ , ω , x , and v . Using (62) to eliminate θ_A in (61a) gives

$$J\dot{\omega} + B_1\omega + K\theta - \frac{K}{R}x - \tau_a(t) = 0$$

and using (62) and (61b) to eliminate f_c in (61c) results in

$$M\dot{v} + B_2v + \frac{K}{R^2}x - \frac{K}{R}\theta = 0$$

Thus the desired state-variable equations are

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J} \left[-K\theta - B_1\omega + \frac{K}{R}x + \tau_a(t) \right] \\ \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{M} \left(\frac{K}{R}\theta - \frac{K}{R^2}x - B_2v \right) \end{aligned} \quad (63)$$

The outputs x and v are also state variables. The output equation for f_c can be found by substituting (62) into (61b). It is

$$f_c = \frac{K}{R} \left(\theta - \frac{x}{R} \right)$$

► EXAMPLE 4.12

In the system shown in Figure 4.29, the mass and spring are connected to the disk by a flexible cable. Actually, the spring might be used to represent the stretching of the cable. The mass M is subjected to the external force

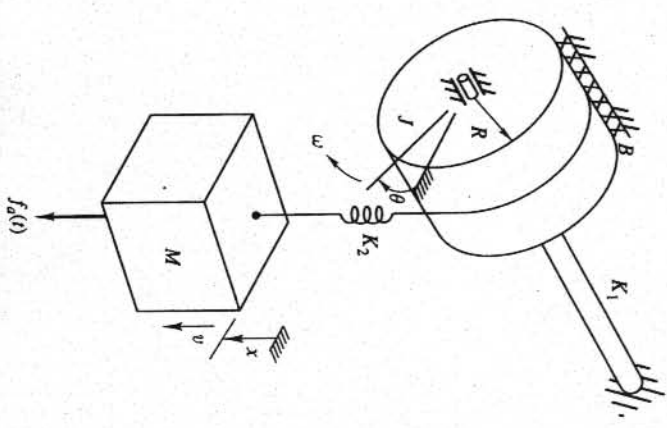


FIGURE 4.29 System for Example 4.12 with translational and rotational elements.

$f_a(t)$ in addition to the gravitational force. Let θ and x be measured from references corresponding to the position where the shaft K_1 is not twisted and the spring K_2 is not stretched. Find the state-variable model, treating $f_a(t)$ and the weight of the mass as inputs and the angular displacement θ and the tensile force in the cable as outputs.

Solution

The free-body diagrams for the disk and the mass are shown in Figure 4.30, where f_2 denotes the force exerted by the spring. The downward displacement of the top end of the spring is $R\theta$, so

$$f_2 = K_2(x - R\theta) \quad (64)$$

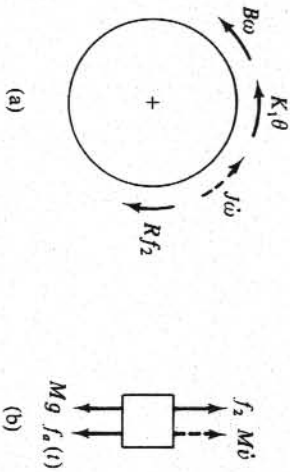


FIGURE 4.30 Free-body diagrams for Example 4.12. (a) Disk. (b) Mass.

Because of the four energy-storing elements corresponding to the parameters K_1 , J , K_2 , and M , we select θ , ω , x , and v as the state variables. From the free-body diagrams and with (64), we can write

$$J\dot{\omega} + B\omega + K_1\theta - RK_2(x - R\theta) = 0 \quad (65a)$$

$$M\dot{v} + K_2(x - R\theta) = f_a(t) + Mg \quad (65b)$$

Note that the reaction force $f_2 = K_2(x - R\theta)$ of the cable on the mass is not the same as the total external force $f_a(t) + Mg$ on the mass. As indicated by (65b), the difference is the inertial force $M\dot{v}$. Only if the mass were negligible would the external force be transmitted directly through the spring. From (65) and the identities $\dot{\theta} = \omega$ and $\dot{x} = v$, we can write the state-variable equations

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J}[-(K_1 + K_2R^2)\theta - B\omega + K_2Rx] \\ \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{M}[K_2R\theta - K_2x + f_a(t) + Mg] \end{aligned} \quad (66)$$

The only output that is not a state variable is the tensile force in the cable, for which the output equation is given by (64).

In order to emphasize the effect of the weight Mg , suppose that $f_a(t) = 0$ and that the mass and disk are not moving. Let θ_0 denote the constant angular displacement of the disk and x_0 the constant displacement of the mass under these conditions. Then (65) becomes

$$\begin{aligned} K_1\theta_0 &= RK_2(x_0 - R\theta_0) \\ K_2(x_0 - R\theta_0) &= Mg \end{aligned} \quad (67)$$

from which

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{RMg}{K_1} \\ x_0 &= \frac{Mg}{K_2} + \frac{R^2Mg}{K_1} \end{aligned} \quad (68)$$

These expressions represent the constant displacements caused by the gravitational force Mg .

Now reconsider the case where $f_a(t)$ is nonzero and where the system is in motion. Let

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \phi \\ x &= x_0 + z \end{aligned} \quad (69)$$

so that ϕ and z represent the additional angular and vertical displacements caused by the input $f_a(t)$. Note that $\omega = \dot{\theta} = \dot{\phi}$ and $v = \dot{x} = \dot{z}$. Substituting (69) into (65) gives

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + B\omega + K_1(\theta_0 + \phi) - RK_2(x_0 + z - R\theta_0 - R\phi) &= 0 \\ M\dot{v} + K_2(x_0 + z - R\theta_0 - R\phi) &= f_a(t) + Mg \end{aligned}$$

Using (67) to cancel those terms involving θ_0 , x_0 , and Mg , we are left with

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} + B\omega + K_1\phi - RK_2(z - R\phi) &= 0 \\ M\dot{v} + K_2(z - R\phi) &= f_a(t) \end{aligned}$$

so the corresponding state-variable equations are

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J}[-(K_1 + K_2R^2)\phi - B\omega + K_2Rz] \\ \dot{z} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{M}[K_2R\phi - K_2z + f_a(t)] \end{aligned} \quad (70)$$

We see that (66) and (70) have the same form, except that in the latter case the term Mg is missing and θ and x have been replaced by ϕ and z . As

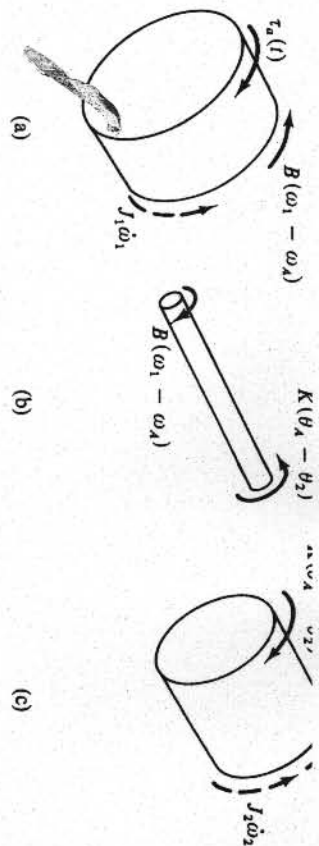


FIGURE 4.20 Free-body diagrams for Example 4.5.

Setting the algebraic sum of the torques on each diagram equal to zero yields the three equations

$$J_1 \dot{\omega}_1 + B(\omega_1 - \omega_A) - \tau_A(t) = 0 \quad (38a)$$

$$B(\omega_1 - \omega_A) - K(\theta_A - \theta_2) = 0 \quad (38b)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - K(\theta_A - \theta_2) + \tau_L(t) = 0 \quad (38c)$$

Using (36), we can rewrite (38) as

$$J_1 \dot{\omega}_1 + B(\omega_1 - \omega_A) - \tau_A(t) = 0 \quad (39a)$$

$$B(\omega_1 - \omega_A) = K\theta_R \quad (39b)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - K\theta_R + \tau_L(t) = 0 \quad (39c)$$

Substituting (39b) into (39a) and repeating (39c) give

$$J_1 \dot{\omega}_1 + K\theta_R - \tau_A(t) = 0 \quad (40)$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - K\theta_R + \tau_L(t) = 0$$

Also from (39b),

$$\omega_A = \omega_1 - \frac{K}{B}\theta_R \quad (41)$$

Substituting (41) into (37) and rearranging (40) give the three state-variable equations

$$\dot{\theta}_R = -\frac{K}{B}\theta_R + \omega_1 - \omega_2 \quad (42a)$$

$$\dot{\omega}_1 = \frac{1}{J_1}[-K\theta_R + \tau_A(t)] \quad (42b)$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{1}{J_2}[K\theta_R - \tau_L(t)] \quad (42c)$$

equation is not needed as part of the state-variable model.

To obtain the input-output equation, we first rewrite (38) in terms of the angular velocities ω_1 , ω_2 , and ω_A and the torques $\tau_A(t)$ and $\tau_L(t)$. Differentiating (38b) and (38c) and noting that $\dot{\theta}_2 = \omega_2$ and $\dot{\theta}_A = \omega_A$, we have

$$J_1 \dot{\omega}_1 + B(\omega_1 - \omega_A) = \tau_A(t)$$

$$B(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_A) - K(\omega_A - \omega_2) = 0$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - K(\omega_A - \omega_2) + \tau_L = 0$$

By using the p -operator technique to eliminate ω_A and ω_1 from these equations, we can obtain the input-output equation

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_2 + \frac{K}{B}\dot{\omega}_2 + K\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)\omega_2 \\ = \frac{K}{J_1 J_2}\tau_A(t) - \frac{1}{J_2}\ddot{\tau}_L - \frac{K}{B J_2}\dot{\tau}_L - \frac{K}{J_1 J_2}\tau_L(t) \end{aligned} \quad (43)$$

Although this result can be viewed as a second-order differential equation in ω_2 , we will need three initial conditions if we are to determine ω_2 rather than the acceleration $\dot{\omega}_2$. Note that if the load torque $\tau_L(t)$ were given as an algebraic function of ω_2 , as it would be in practice, ω_2 would appear in (43). Then the input-output equation would be strictly third-order.

The next three examples contain either a lever or a pendulum that does not rotate about its midpoint. In Example 4.6 the mass of the lever is assumed to be negligible. The pendulum in the next example is approximated by a point mass at the end of a rigid bar. The final example includes a lever whose mass is uniformly distributed along the bar.

EXAMPLE 4.6

Find the state-variable equations for the system shown in Figure 4.21(a). Also find the output equation when the output is defined to be the force exerted on the pivot by the lever. The input is the displacement $x_4(t)$ of the right end of the spring K_2 ; it affects the mass M through the lever. The lever has a fixed pivot and is assumed to be massless yet rigid. Its angular rotation θ is small so that only horizontal motion need be considered. In a practical situation, the springs K_1 and K_2 might represent the stiffness of the lever and of associated linkages that have a certain degree of flexibility.

Solution

The displacements x_2 and x_3 are directly proportional to the angle θ and hence to one another. Furthermore, the two springs appear to form a series

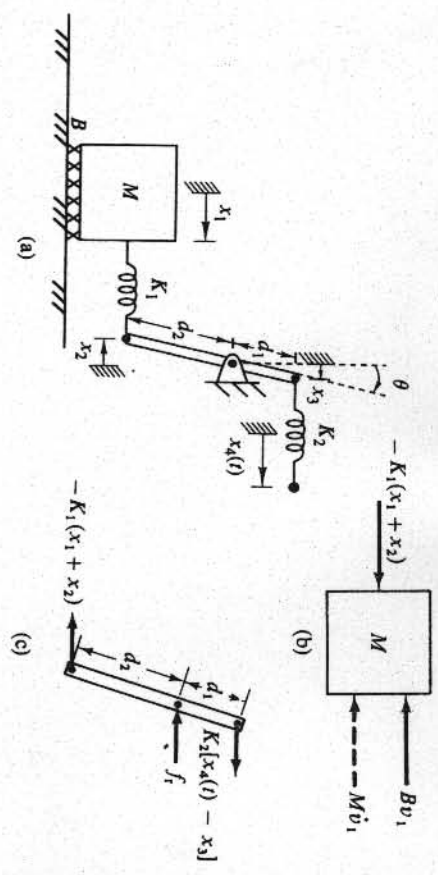


FIGURE 4.21 (a) Translational system containing a lever. (b), (c) Free-body diagrams.

combination somewhat similar to the one shown in Figure 2.24(a), because the lever has no mass. Hence we can express x_2, x_3 , and θ as algebraic functions of x_1 and $x_4(t)$. Thus we will select only x_1 and v_1 as state variables, with $x_4(t)$ being the input. By inspection, we determine that one of the required state-variable equations is $\dot{x}_1 = v_1$.

The next step is to draw free-body diagrams for the mass M and the lever, as shown in Figure 4.21(b) and Figure 4.21(c). We must pay particular attention to the signs of the force arrows and to the expressions for the elongations of the springs. For example, the elongation of spring K_1 is $-(x_1 + x_2)$ because of the manner in which the displacements have been defined. Summing the forces on the mass M yields

$$M\dot{v}_1 + Bv_1 + K_1(x_1 + x_2) = 0 \quad (44)$$

The forces on the lever are those exerted by the springs and the reaction force f_r of the pivot. Because the lever's angle of rotation θ is small, the motion of the lever ends can be considered to be translational, obeying the relationships $\theta = x_2/d_2 = x_3/d_1$ and

$$x_3 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)x_2 \quad (45)$$

To obtain a second lever equation that involves x_1 and x_2 but not f_r , we sum moments about the pivot point, getting

$$K_2[x_4(t) - x_3]d_1 - K_1(x_1 + x_2)d_2 = 0 \quad (46)$$

Equations (45) and (46) can also be obtained directly from (12) and (14). In order to solve (44) for v_1 as a function of only the state variables and the input, we must first express x_2 in terms of x_1 and $x_4(t)$. Substituting (45)

into (46) and solving for x_2 , we obtain the algebraic expression

$$x_2 = \frac{(d_1/d_2)K_2x_4(t) - K_1x_1}{K_1 + (d_1/d_2)^2K_2} \quad (47)$$

We find the second of the two state-variable equations by substituting (47) into (44) and rearranging terms so as to solve for v_1 . Doing this, we find that the state-variable equations are

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 \\ v_1 &= -\frac{1}{M} \left[Bv_1 + \alpha K_1x_1 + \alpha \left(\frac{d_2}{d_1}\right) K_1x_4(t) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2} \quad (49)$$

To develop the output equation expressing f_r as an algebraic function of the state variables and the input, we first sum the forces on the lever in Figure 4.21(c) to obtain

$$f_r = K_2[x_4(t) - x_3] + K_1(x_1 + x_2) \quad (50)$$

Substituting (45) and (47) into (50) gives

$$f_r = \left[K_1 + \left(K_2 - \frac{d_2^2}{d_1} K_1 \right) \left(\frac{\alpha d_2 K_1}{d_1 K_2} \right) \right] x_1 + \left[K_2 + \alpha \left(\frac{d_2}{d_1} K_1 - K_2 \right) \right] x_4(t)$$

which has the desired form.

In the last example it is instructive to consider the special case where $d_1 = d_2$, which corresponds to having the lever pivoted at its midpoint. From (49), $\alpha K_1 = K_1 K_2 / (K_1 + K_2)$, which is the equivalent spring constant for a series connection of the two springs, as in (2.37). Furthermore, the reader can readily verify that (48) reduces to the equations describing the system shown in Figure 4.22(a), in which the massless junction A replaces the lever. In turn, this system is equivalent to that shown in Figure 4.22(b), where a single spring with the coefficient $K_{eq} = K_1 K_2 / (K_1 + K_2)$ replaces the series spring connection. Note, in determining the motion of M , that the lever changes the effective direction of the displacement input $x_4(t)$.

In each of the next two examples, an object with mass M rotates about an axis that does not pass through the center of mass. In order to obtain a complete description of all the forces acting on such an object, we would have to consider the motion of its center of mass. The acceleration of this point has one component tangential to the direction of motion and another component perpendicular to it, directed toward the pivot point. The force corresponding to the tangential acceleration is accounted for by the

These equations are to be linearized about the nominal trajectory $[x_{01}(t), x_{02}(t)]$, which is the solution to the equations with initial conditions $x_1(0) = x_2(0) = 1$ and input $u(t) = 0$.

Integrating both sides of Eq. (4-121) with respect to t , we have

$$x_2(t) = x_2(0) = 1 \tag{4-122}$$

Then Eq. (4-120) gives

$$x_1(t) = -t + 1 \tag{4-123}$$

Therefore, the nominal trajectory about which Eqs. (4-120) and (4-121) are to be linearized is described by

$$x_{01}(t) = -t + 1 \tag{4-124}$$

$$x_{02}(t) = 1 \tag{4-125}$$

Now evaluating the coefficients of Eq. (4-107), we get

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial x_1(t)} = 0 \quad \frac{\partial f_1(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{2}{x_{02}^3(t)} \quad \frac{\partial f_2(t)}{\partial x_1(t)} = u(t) \quad \frac{\partial f_2(t)}{\partial u(t)} = x_1(t) \tag{4-126}$$

Equation (4-107) gives

$$\Delta \dot{x}_1(t) = \frac{2}{x_{02}^3(t)} \Delta x_2(t) \tag{4-127}$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = u_0(t) \Delta x_1(t) + x_{01}(t) \Delta u(t) \tag{4-128}$$

By substituting Eqs. (4-124) and (4-125) into Eqs. (4-127) and (4-128), the linearized equations are

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - t \end{bmatrix} \Delta u(t) \tag{4-129}$$

which is a set of linear state equations with time-varying coefficients. ◀

► **EXAMPLE 4-11** Figure 4-47 shows the diagram of a magnetic-ball suspension system. The objective of the system is to control the position of the steel ball by adjusting the current in the electromagnet through the input voltage $e(t)$. The differential equations of the system are

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)} \tag{4-130}$$

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \tag{4-131}$$

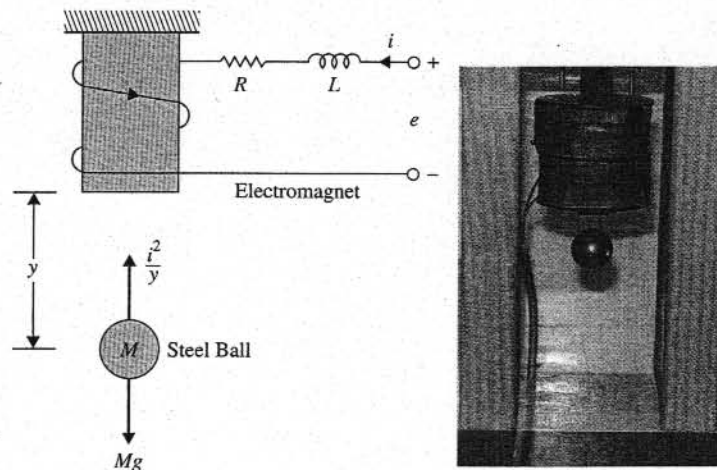


Figure 4-47 Magnetic-ball-suspension system.

where

$$\begin{aligned} e(t) &= \text{input voltage} & y(t) &= \text{ball position} \\ i(t) &= \text{winding current} & R &= \text{winding resistance} \\ L &= \text{winding inductance} & M &= \text{mass of ball} \\ g &= \text{gravitational acceleration} \end{aligned}$$

Let us define the state variables as $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = dy(t)/dt$, and $x_3(t) = i(t)$. The state equations of the system are

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad (4-132)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = g - \frac{1}{M} x_3^2(t) \quad (4-133)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{R}{L} x_3(t) + \frac{1}{L} e(t) \quad (4-134)$$

Let us linearize the system about the equilibrium point $y_0(t) = x_{01} = \text{constant}$. Then,

$$x_{02}(t) = \frac{dx_{01}(t)}{dt} = 0 \quad (4-135)$$

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = 0 \quad (4-136)$$

The nominal value of $i(t)$ is determined by substituting Eq. (4-136) into Eq. (4-130). Thus,

$$i_0(t) = x_{03}(t) = \sqrt{Mgx_{01}} \quad (4-137)$$

The linearized state equation is expressed in the form of Eq. (4-108), with the coefficient matrices A^* and B^* evaluated as

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_{03}^2}{Mx_{01}^2} & 0 & \frac{-2x_{03}}{Mx_{01}} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{g}{x_{01}} & 0 & -2\left(\frac{g}{Mx_{01}}\right)^{1/2} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad (4-138)$$

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4-139)$$

▶ 4-8 SYSTEMS WITH TRANSPORTATION LAGS (TIME DELAYS)

Thus far the systems considered all have transfer functions that are quotients of polynomials. In practice, pure time delays may be encountered in various types of systems, especially systems with hydraulic, pneumatic, or mechanical transmissions. Systems with computer control also have time delays, since it takes time for the computer to execute numerical operations. In these systems, the output will not begin to respond to an input until after a given time interval. Figure 4-48 illustrates systems in which transportation lags or pure time delays are observed. Figure 4-48(a) outlines an arrangement in which two different fluids are to be mixed in appropriate proportions. To assure that a homogeneous solution is measured, the monitoring point is located some distance from the mixing point. A time delay therefore exists between the mixing point and the place where the change in concentration is detected. If the rate of flow of the mixed solution is v inches

and design problems. A representation of the relationships existing among the system variables in a form of mathematical equations is a mathematical model of the system.

Two types of mathematical models are introduced in this chapter, input-output models and state models. Both types of models carry essentially the same information about the system dynamics, but the sets of model differential equations are different from each other in several respects. These differences carry serious implications on practical usefulness and applicability of the types of models in various engineering problems.

4.2 Input-Output Models

Consider the single-input single-output dynamic system shown in Figure 4.1. In general, the relationship between the input and output signals of the system can be represented by a m th-order differential equation of the following form

$$a_n \left(\frac{d^m y}{dt^m} \right) + a_{n-1} \left(\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right) + \dots + a_1 \left(\frac{dy}{dt} \right) + a_0 y = f \left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{du}{dt}, u, t \right) \quad (4.1)$$

where $m \leq n$ for existing and realizable engineering systems because of inherent inertia of those systems. Also, having $m > n$ is physically impossible because it would imply the ability to "predict the future" of the system input. A set of n initial conditions, $y(0^+), \dot{y}(0^+), \dots, y^{(n-1)}(0^+)$, must be known in order to solve the equation for a given input $u(t), t \geq 0$.

The model parameters, a_0, a_1, \dots, a_n , may be functions of y, u , and/or t , in which case the system is nonlinear. If the system is stationary, the model parameters are constant and the model differential equation can then be written as

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= \\ f \left(\frac{d^m u}{dt^m}, \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}}, \dots, \frac{du}{dt}, u \right) &\quad (4.2) \end{aligned}$$

where f may be a nonlinear function.

For a stationary linear model, the function f on the right hand side of Equation (4.2) is a sum of terms linear with respect to u and its derivatives.



$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (4.3)$$

where b_0, b_1, \dots, b_m are constants. As before, the order of the highest derivative of the input variable cannot be greater than the order of the highest derivative of the output variable, $m \leq n$.

Equations (4.1), (4.2), and (4.3) represent general forms of input-output models for single-input single-output dynamic systems.

EXAMPLE 4.1

Derive input-output equations for the mechanical system shown in Figure 4.2 using force $F_1(t)$ as the input variable and displacements $x_1(t)$ and $x_2(t)$ as the output variables. The symbols r_1 and r_2 represent spring relaxed positions in the gravity field.

Solution

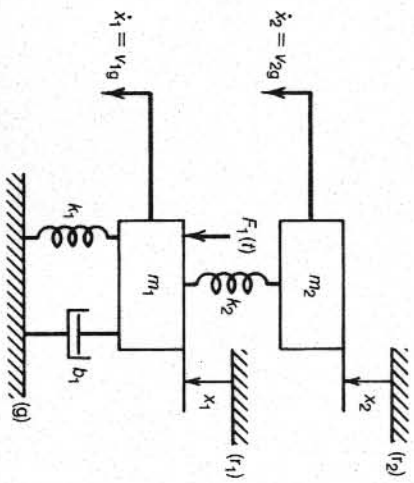
The equation of motion for mass m_1 is

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1(t)$$

The equation of motion for mass m_2 is

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Combining the equations for the two masses and eliminating x_1 yields the input-output equation for the system.



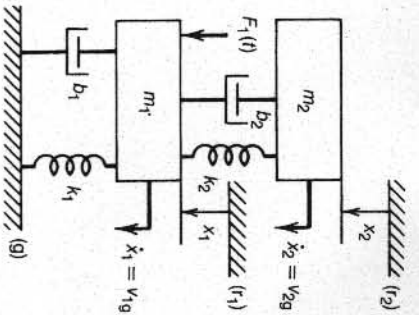


FIGURE 4.3 Mechanical system considered in Example 4.2.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x_2}{dt^4} + \left(\frac{b_1}{m_1}\right) \frac{d^3 x_2}{dt^3} + \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right) \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ + \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2}\right) \frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}\right) x_2 = \left(\frac{k_2}{m_1 m_2}\right) F_1(t) \end{aligned}$$

The preceding fourth-order differential equation can be solved provided the initial conditions, $x_2(0)$, $(dx_2/dt)|_{t=0}$, $(d^2 x_2/dt^2)|_{t=0}$, $(d^3 x_2/dt^3)|_{t=0}$, and the input variable, $F_1(t)$ for $t \geq 0$, are known.

Similarly, the input-output equation relating x_1 to $F_1(t)$ is

$$\begin{aligned} \frac{d^4 x_1}{dt^4} + \left(\frac{b_1}{m_1}\right) \frac{d^3 x_1}{dt^3} + \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1}\right) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(\frac{b_1 k_2}{m_1 m_2}\right) \frac{dx_1}{dt} \\ + \left(\frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}\right) x_1 = \left(\frac{1}{m_1}\right) \frac{d^2 F_1}{dt^2} + \left(\frac{k_2}{m_1 m_2}\right) F_1(t) \end{aligned}$$

The process of deriving the input-output equation in Example 4.1 will become considerably more complicated if an additional damper b_2 is included between the two masses, as shown in Figure 4.3.

EXAMPLE 4.2

Derive an input-output equation for the mechanical system shown in Figure 4.3, using x_2 as the output variable.

Solution

The equations of motion for masses m_1 and m_2 now take the form

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (b_1 + b_2) \frac{dx_1}{dt} + (k_1 + k_2)x_1 - b_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2 x_2 = F_1(t)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_2 \frac{dx_2}{dt} + k_2 x_2 - b_2 \frac{dx_1}{dt} - k_2 x_1 = 0$$

The unwanted variable x_1 cannot be eliminated from these equations using simple substitutions as in Example 4.1 because the derivatives of both x_1 and x_2 are present in each equation. In such case an operator D can be introduced, defined as

$$D^k x(t) = \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Using the D operator, the differential equations of motion can be rearranged into the following form

$$\begin{aligned} m_1 D^2 x_1 + (b_1 + b_2) D x_1 + (k_1 + k_2) x_1 - b_2 D x_2 - k_2 x_2 = F_1(t) \\ m_2 D^2 x_2 + b_2 D x_2 + k_2 x_2 - b_2 D x_1 - k_2 x_1 = 0 \end{aligned}$$

From the last equation, x_1 can be expressed as

$$x_1 = \left(\frac{m_2 D^2 + b_2 D + k_2}{b_2 D + k_2} \right) x_2$$

Substituting into the operator equation for mass m_1 yields

$$\begin{aligned} m_1 m_2 D^4 x_2 + (m_2 b_1 + m_2 b_2 + m_1 b_2) D^3 x_2 + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2 + b_1 b_2) D^2 x_2 \\ + (b_1 k_2 + b_2 k_1) D x_2 + k_1 k_2 x_2 = b_2 D F_1 + k_2 F_1 \end{aligned}$$

Using the inverse of the definition of the D operator to transform this equation back to the time domain gives the input-output equation for the system.

$$\begin{aligned} (m_1 m_2) \frac{d^4 x_2}{dt^4} + (m_2 b_1 + m_2 b_2 + m_1 b_2) \frac{d^3 x_2}{dt^3} \\ + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2 + b_1 b_2) \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ + (b_1 k_2 + b_2 k_1) \left(\frac{dx_2}{dt} \right) + k_1 k_2 x_2 = b_2 \frac{dF_1}{dt} + k_2 F_1 \end{aligned}$$

Example 4.2 demonstrates that by inserting a damper between the two masses the process of deriving the input-output equation becomes considerably more complicated. In the next example a two-input, two-output system will be considered. Two separate input-output equations, one for each output variable, will have to be derived.

EXAMPLE 4.3

Consider again the mechanical system shown in Figure 4.2. The system is now subjected to two external forces, $F_1(t)$ and $F_2(t)$. The displacements of both

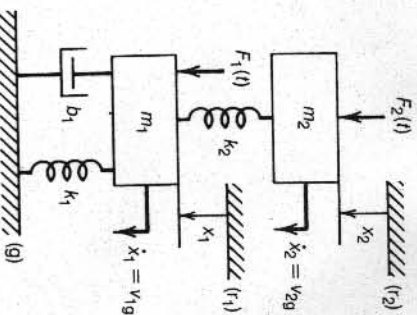


FIGURE 4.4 Two-input two-output system considered in Example 4.3.

masses are of interest and therefore $x_1(t)$ and $x_2(t)$ will be the two output variables of this system. The system is shown in Figure 4.4. The pair of differential equations of motion for the two masses are

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_1$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 x_2 - k_2 x_1 = F_2$$

By combining the above two equations the separate input-output equations for $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are obtained

$$m_1 m_2 \frac{d^4 x_1}{dt^4} + m_2 b_1 \frac{d^3 x_1}{dt^3} + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 k_2 \frac{dx_1}{dt} + k_1 k_2 x_1 = m_2 \frac{d^2 F_1}{dt^2} + k_2 F_1 + k_2 F_2$$

and

$$m_1 m_2 \frac{d^4 x_2}{dt^4} + m_2 b_1 \frac{d^3 x_2}{dt^3} + (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + b_1 k_2 \frac{dx_2}{dt} + k_1 k_2 x_2 = k_2 F_1 + m_1 \frac{d^2 F_2}{dt^2} + b_1 \frac{dF_2}{dt} + (k_1 + k_2) F_2$$

Note that the two input-output equations are independent of each other and can be solved separately. On the other hand, the coefficients of each of the terms on the left-hand sides are the same, regardless of which system variable is chosen as the output.



FIGURE 4.5 Multi-input multi-output system.

In general, a linear system with l inputs and p outputs shown schematically in Figure 4.5 is described by p independent input-output equations given below.

$$a_{1n} y_1^{(n)} + \dots + a_{11} \dot{y}_1 + a_{10} y_1 = f_1(u_1^{(m)}, \dots, u_l, u_1, u_2^{(m)}, \dots, u_2, u_2^{(m)}, \dots, u_l^{(m)}, \dots, u_l, u_1, t)$$

$$a_{2n} y_2^{(n)} + \dots + a_{21} \dot{y}_2 + a_{20} y_2 = f_2(u_1^{(m)}, \dots, u_l, u_1, u_2^{(m)}, \dots, u_2, u_2^{(m)}, \dots, u_l^{(m)}, \dots, u_l, u_1, t)$$

$$\vdots$$

$$a_{pn} y_p^{(n)} + \dots + a_{p1} \dot{y}_p + a_{p0} y_p = f_p(u_1^{(m)}, \dots, u_l, u_1, u_2^{(m)}, \dots, u_2, u_2^{(m)}, \dots, u_l^{(m)}, \dots, u_l, u_1, t)$$

where $m \leq n$ and a superscript enclosed in parentheses denotes the order of a derivative. If a system is assumed to be stationary, time t does not appear explicitly on the right hand side of Equation (4.4).

The functions f_1, f_2, \dots, f_p are linear combinations of terms involving the system inputs and their derivatives. The input-output model for a linear, stationary, multi-input multi-output system can be presented in a more compact form

$$\sum_{i=0}^n a_{1i} y_1^{(i)} = \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^m b_{1jk} u_j^{(m)}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^n a_{pi} y_p^{(i)} = \sum_{j=1}^l \sum_{k=0}^m b_{pjk} u_j^{(m)}$$

Note that some of the a and b coefficients may be equal to zero; also that $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{p1}, i = 1, 2, \dots, n$.

The input-output equations, even for relatively simple multi-input multi-output models become extremely complicated. Moreover, as will be shown in Chapter 5, analytical methods for solving input-output equations are practical only for low-order, single-input single-output models. In fact, most numerical methods for solving

LINEAR STATE-SPACE MODELS AND SOLUTIONS OF THE STATE EQUATIONS

Topics covered

- State-Space Models
- Solutions of the State Equations
- System Responses
- Sensitivity Analysis of the Matrix Exponential Problem
- Numerical Methods for Computing the Matrix Exponential and the Integral involving an Matrix Exponential
- Computation of the Frequency Response Matrix

5.1 INTRODUCTION

A finite-dimensional time-invariant linear continuous-time dynamical system may be described using the following system of first-order ordinary differential equations:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

The input and the output of the system are defined in continuous-time over the interval $[0, \infty)$. The system is, therefore, known as a **continuous-time system**. The discrete-time analog of this system is the system of difference equations:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k), \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k).\end{aligned}$$

We will consider in this book only time-invariant systems, that is, the matrices A , B , C , and D will be assumed constant matrices throughout the book.

It is first shown in Section 5.2 how some simple familiar physical systems can be described in state-space forms. Very often the mathematical model of a system is not obtained in first-order form; it may be a system of nonlinear equations, a system of **second-order differential equations** or **partial differential equations**. It is shown how such systems can be reduced to the standard first-order state-space forms. The computational methods for the state equations are then considered both in time and frequency domain.

The major computational component of the time-domain solution of a continuous-time system is the matrix exponential e^{At} . Some results on the sensitivity of this matrix and various well-known methods for its computation: the Taylor series method, the Padé approximation method, the methods based on decompositions of A , the ordinary-differential equation methods, etc., are described in Section 5.3. A comparative study of these methods is also included. **The Padé method (Algorithm 5.3.1) (with scaling and squaring) and the method, based on the Real Schur decomposition of A (Algorithm 5.3.2), are recommended for practical use.** This section concludes with an algorithm for numerically computing an integral with a matrix exponential (Algorithm 5.3.3).

Section 5.4 describes the state-space solution of a **discrete-time system**. The major computational task here is computation of various powers of A .

In **Section 5.5**, the problem of computing the **frequency response matrix** for many different values of the frequencies is considered. The computation of the frequency response matrix is necessary to study various system responses in frequency domain. A widely used method (Algorithm 5.5.1), based on the one-time reduction of the state matrix A to a Hessenberg matrix, is described in detail and the references to the other recent methods are given.

Reader's Guide for Chapter 5

The readers familiar with basic concepts and results of modeling and state-space systems can skip Sections 5.2, 5.4, and 5.5.1.

5.2 STATE-SPACE REPRESENTATIONS OF CONTROL SYSTEMS

5.2.1 Continuous-Time Systems

Consider the dynamical system represented by means of the following system of ordinary first-order differential equations:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (5.2.2)$$

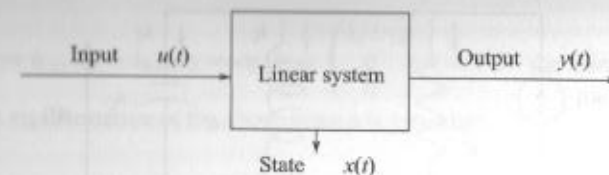


FIGURE 5.1: Representation of a continuous-time state-space model.

In this description,

$x(t)$ is an n -dimensional vector, called the system **state**,

$u(t)$ is an m -dimensional vector ($m \leq n$), called the system **input**,

$y(t)$ is an r -dimensional vector, called the system **output**.

The vector $x(t_0)$ is the **initial condition** of the system. The components of $x(t)$ are called **state variables**.

The matrices A , B , C , and D are **time-invariant matrices**, respectively, of dimensions $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$, and $r \times m$. The above representation is known as a time-invariant **continuous-time state-space model** of a dynamical system.

Schematically, the model is represented in Figure 5.1.

Clearly, at a given time t , the variables arriving at the system would form the input, those internal to the system form the state, while the others that can be measured directly comprise the output.

The space $X \subseteq \mathbb{R}^n$, where all the states lie for all $t \geq 0$ is called the **state-space**, the Eq. (5.2.1) is called the **state equation** and the Eq. (5.2.2) is called the **output equation**. If $m = r = 1$, the system is said to be a **single-input single-output (SISO) system**. A **multi-input multi-output (MIMO) system** is similarly defined. If a system has more than one input or more than one output it is referred to be a **multivariable system**. The system represented by the Eqs. (5.2.1) and (5.2.2) is sometimes written compactly as (A, B, C, D) or as (A, B, C) , in case D is not used in modeling. Sometimes $\dot{x}(t)$ and $x(t)$ will be written just as \dot{x} and x for the sake of convenience. Similarly, $u(t)$ and $y(t)$ will be written as u and y , respectively.

We provide below a few examples to illustrate the state-space representations of some simple systems.

Example 5.2.1 (A Parallel RLC Circuit). Consider a parallel RLC circuit excited by the current source $u(t)$ and with output $y(t)$ (Figure 5.2).

The current and voltage equations governing the circuit are:

$$u = i_R + i_L + i_C; \quad i_C = C \frac{dec}{dt}; \quad e_C = L \frac{di_L}{dt} = Ri_R.$$

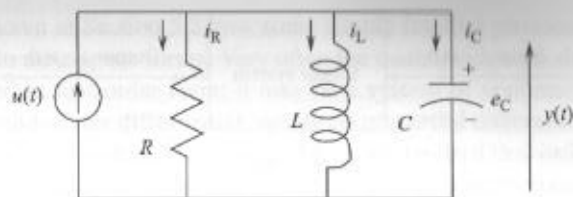


FIGURE 5.2: A parallel RLC circuit.

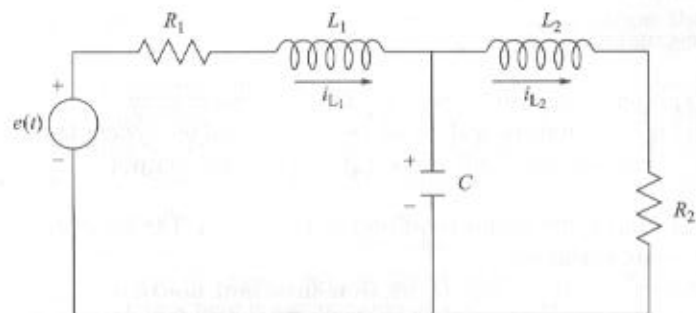


FIGURE 5.3: An expanded RLC circuit.

Defining the states by $x_1 := i_{L_1}$ and $x_2 := e_C$, the state and output equations are, respectively:

$$\dot{x} = Ax + bu \quad \text{and} \quad y = cx,$$

where $x = [x_1, x_2]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix}, \quad c = [0 \ 1].$$

Example 5.2.2. Consider again another electric circuit, as shown in Figure 5.3:

The state variables here are taken as voltage across the capacitor and the current through the inductor. The state equations are

$$L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -R_1 i_{L_1}(t) - e_C(t) + e(t),$$

$$L_2 \frac{di_{L_2}(t)}{dt} = -R_2 i_{L_2}(t) + e_C(t),$$

$$C \frac{de_C(t)}{dt} = i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t).$$

Setting $x_1 = i_{L_1}$, $x_2 = i_{L_2}$, $x_3 = e_C$, $b = \begin{pmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = e(t)$, the matrix form of the state-space representation of the above system is given by:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/L_1 & 0 & 1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & 1/C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + bu(t).$$

First-Order State-Space Representation of Second-Order Systems

Mathematical models of several practical problems, especially those arising in vibrations of structures, are second-order differential equations.

We show by means of a simple example of a spring-mass system how the equations of motion represented by a second-order differential equation can be converted to a first-order state-space representation.

Example 5.2.3. (A Spring-Mass System). Consider the spring-mass system shown in Figure 5.4 with equal spring constants k and masses m_1 and m_2 . Let force u_1 be applied to mass m_1 and u_2 be applied to mass m_2 .

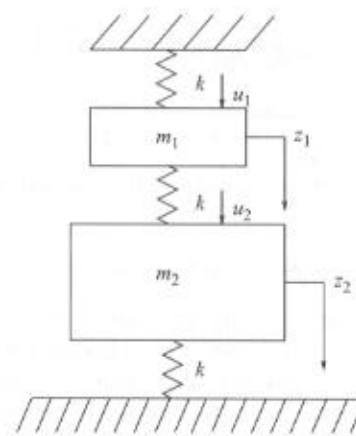


FIGURE 5.4: A spring-mass system.

The equations of motion for the system are:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k(z_1 - z_2) + kz_1 &= u_1, \\ m_2 \ddot{z}_2 - k(z_1 - z_2) + kz_2 &= u_2, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

or in matrix form:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Set

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Then, we have

$$M\ddot{z} + Kz = u, \quad (5.2.5)$$

where

$$M = \text{diag}(m_1, m_2), \quad K = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Let us make a change of variables from z to x as follows:

Set

$$x_1 = z \quad \text{and} \quad x_2 = \dot{z}.$$

Then, in terms of the new variables, the equations of motion become

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ M\dot{x}_2 &= -Kx_1 + u, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

or

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{pmatrix} u, \quad (5.2.7)$$

where

$$x = (x_1, x_2)^T = (z, \dot{z})^T.$$

Equation (5.2.7) is a first-order representation of the second-order system (5.2.4).

State-Space Representations of Nonlinear Systems

Mathematical models of many real-life applications are nonlinear systems of differential equations. Very often it is possible to linearize a nonlinear system, and then after linearization, the first-order state-space representation of transformed linear system can be obtained. We will illustrate this by means of the following well-known examples (see Luenberger 1979; Chen 1984; Szidarovszky and Bahill 1991; etc.).

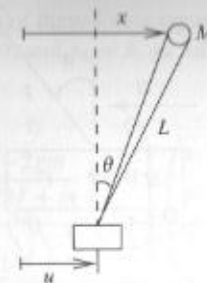


FIGURE 5.5: Balancing of a stick.

Example 5.2.4. (Balancing a Stick). Consider the simple problem of balancing a stick on your hand as shown in the Figure 5.5:

Here L is the length of the stick, and M is the mass of the stick concentrated on the top. The input $u(t)$ is the position of the hand. Then, the position of the top of the stick is

$$x(t) = L \sin \theta(t) + u(t).$$

The torque due to gravity acting on the mass is $MgL \sin \theta(t)$. The rotational inertia of the mass on the stick is $ML^2 \ddot{\theta}(t)$. The shift of the inertial term down to the pivot point is $\ddot{u}(t)ML \cos \theta(t)$. Thus, we have:

$$MgL \sin \theta(t) = ML^2 \ddot{\theta}(t) + \ddot{u}(t)ML \cos \theta(t).$$

The above equations are clearly nonlinear. We now linearize these equations by assuming that θ is small. We then can take $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = \theta$.

This gives us

$$x(t) = L\theta(t) + u(t)$$

and

$$MgL\theta(t) = ML^2 \ddot{\theta}(t) + \ddot{u}(t)ML.$$

Eliminating $\theta(t)$ from these two equations, we obtain

$$\ddot{x}(t) = (g/L)(x(t) - u(t)).$$

We can now write down the first-order state-space representation by setting $v(t) = \dot{x}(t)$. The first-order system is then:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{L} \end{pmatrix} u(t).$$

Example 5.2.5. (A Cart with an Inverted Pendulum). Next we consider a similar problem (Figure 5.6), but this time with some more forces exerted (taken from Chen (1984, pp. 96–98)).

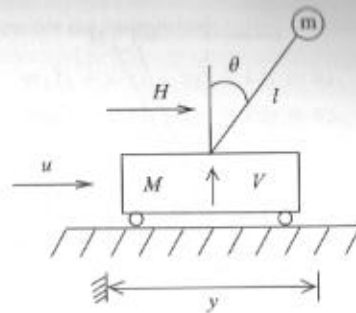


FIGURE 5.6: A cart with an inverted pendulum.

In Figure 5.6, a cart is carrying an inverted pendulum with mass m and length l . Let M be the mass of the cart. Let H and V be, respectively, the horizontal and vertical forces exerted by the cart on the pendulum. Newton's law applied to the linear movements gives:

$$M\ddot{y}(t) = u - H,$$

$$H = m\ddot{y} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta (\dot{\theta})^2,$$

and

$$mg - V = ml(-\sin \theta \ddot{\theta} - \cos \theta (\dot{\theta})^2).$$

Newton's law applied to the rotational movement of the pendulum gives:

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl \sin \theta + Vl \sin \theta - Hl \cos \theta.$$

These are nonlinear equations. We now linearize them by making the same assumptions as before; that is, we assume that θ is small so that we can take $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$. Dropping the terms involving θ^2 , $\dot{\theta}^2$, $\theta\dot{\theta}$, and $\theta\ddot{\theta}$, and setting $\sin \theta = \theta$, and $\cos \theta = 1$, we obtain, from above, by eliminating V and H

$$(M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u$$

and

$$2l\ddot{\theta} - 2g\theta + \ddot{y} = 0.$$

Solving for \ddot{y} and $\ddot{\theta}$, we obtain

$$\ddot{y} = -\frac{2gm}{2M + m}\theta + \frac{2}{2M + m}u,$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g(M + m)\theta}{(2M + m)l} - \frac{1}{(2M + m)l}u.$$

The state-space representations of these linear equations can now be written down by setting $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$, and $x_4 = \dot{\theta}$, as follows:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2gm}{2M + m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2g(M + m)}{(2M + m)l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{2M + m} \\ 0 \\ \frac{1}{(2M + m)l} \end{pmatrix} u,$$

$$y = (1, 0, 0, 0)x.$$

The nonlinear equations in Examples 5.2.4 and 5.2.5 are special cases of the general nonlinear equations of the form:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), & \tilde{x}(t_0) &= \tilde{x}_0, \\ \tilde{y}(t) &= h(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \end{aligned}$$

where f and h are vector functions. We will now show how these equations can be written in the standard first-order state-space form (Sayed 1994).

Assume that the nonlinear differential equation:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0$$

has a unique solution and this unique solution is also continuous with respect to the initial condition.

Let $\tilde{x}_{\text{nom}}(t)$ denote the unique solution corresponding to the given input $\tilde{u}_{\text{nom}}(t)$ and the given initial condition $\tilde{x}_{\text{nom}}(t_0)$.

Let the nominal data $\{\tilde{u}_{\text{nom}}(t), \tilde{x}_{\text{nom}}(t)\}$ be perturbed so that

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_{\text{nom}}(t) + u(t)$$

and $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_{\text{nom}}(t_0) + x(t_0)$, where $\|u(t)\|$ and $\|x(t_0)\|$ are small; $\|u(t)\| = \sup_t \|u(t)\|_2$.

Assume further that

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_{\text{nom}}(t) + x(t), \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_{\text{nom}}(t) + y(t),$$

where $\|x\|$ and $\|y\|$ are small.

These nonlinear equations can then be linearized (assuming that f and h are smooth enough) by expanding f and h around $(\bar{u}_{nom}(t), \bar{x}_{nom}(t))$, giving rise to a time-invariant linear state-space model of the form:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

where

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right|_{(\bar{x}_{nom}(t), \bar{u}_{nom}(t))}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right|_{(\bar{x}_{nom}(t), \bar{u}_{nom}(t))},$$

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \right|_{(\bar{x}_{nom}(t), \bar{u}_{nom}(t))}, \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{u}} \right|_{(\bar{x}_{nom}(t), \bar{u}_{nom}(t))}.$$

Example 5.2.6. (The Motion of a Satellite (Sayed 1994)). Suppose that a satellite of unit mass orbits the earth at a distance $d(t)$ from its center (figure 5.7). Let $\theta(t)$ be the angular position of the satellite at time t , and the three forces acting on the satellite are: a radial force $u_1(t)$, a tangential force $u_2(t)$, and an attraction force $\alpha/d^2(t)$, where α is a constant.

The equations of motion are given by

$$\ddot{d}(t) = d(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{\alpha}{d^2(t)} + u_1(t),$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{d}(t)\dot{\theta}(t)}{d(t)} + \frac{u_2(t)}{d(t)}.$$

Let's define the state variable as

$$\bar{x}_1(t) = d(t), \quad \bar{x}_2(t) = \dot{d}(t), \quad \bar{x}_3(t) = \theta(t), \quad \bar{x}_4(t) = \dot{\theta}(t)$$

and the output variables as

$$\bar{y}_1(t) = d(t), \quad \bar{y}_2(t) = \theta(t).$$

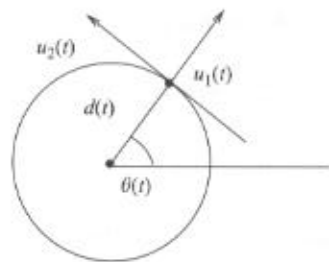


FIGURE 5.7: The motion of a satellite.

The state-space model is then given by:

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\bar{x}}_3(t) \\ \dot{\bar{x}}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_1(t)\bar{x}_4^2(t) - \frac{\alpha}{\bar{x}_1^2(t)} + u_1(t) \\ \bar{x}_4(t) \\ \frac{-2\bar{x}_2(t)\bar{x}_4(t)}{\bar{x}_1(t)} + \frac{u_2(t)}{\bar{x}_1(t)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{pmatrix}$$

and the initial conditions are:

$$\bar{x}_0 = \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \\ \bar{x}_3(0) \\ \bar{x}_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(0) \\ 0 \\ \theta(0) \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ 0 \\ \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}.$$

The above is still a nonlinear model of the form:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0,$$

$$\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t).$$

Linearizing this nonlinear model around the initial point $(\bar{x}(0), \bar{u}(0))$, where $\bar{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, we obtain the linear model:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t),$$

where

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} \right|_{(\bar{x}(0), \bar{u}(0))}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega_0^2 & 0 & 0 & 2d_0\omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\frac{\omega_0}{d_0} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \right|_{(\bar{x}(0), \bar{u}(0))} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_0} \end{pmatrix},$$

and

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \right|_{(\bar{x}(0), \bar{u}(0))} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

State-Space Representation of Systems Modeled by Partial Differential Equations

Mathematical models of many engineering problems such as those arising in fluid dynamics, mechanical systems, heat transfer, etc., are partial differential equations. The discretizations of these equations naturally lead to state-space models. We illustrate the idea by means of the following example.

Example 5.2.7. Consider the partial differential equation

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{P}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{EI} F(x, t),$$

which models the **deflection of a prismatic beam** (Soong (1990, pp. 180–181)). Let $y(x, t)$ be the transverse displacement of a typical segment of the beam that is located at a distance x from the end, and $F(x, t)$ be the applied force. EI is the flexural rigidity, and P is the density of the material of the beam per unit length. Let L be the length of the beam.

Assume that the solution $y(x, t)$ can be written as

$$y(x, t) = \sum_{j=1}^n v_j(x) p_j(t)$$

($n = \infty$ in theory, but in practice it is large but finite). Also assume that

$$F(x, t) = \sum_{j=1}^r \delta(x - a_j) u_j(t),$$

where $\delta(\cdot)$ is the Dirac delta function.

That is, we assume that the force is point-wise and is exerted at r points of the beam.

Substituting these expressions of $y(x, t)$ and $F(x, t)$ in the partial differential equation, it can be shown that the state equation for the beam in the standard

form is:

$$\dot{z}(t) = \Lambda z(t) + Bu(t),$$

where $z(t) = (p_1, \dot{p}_1, p_2, \dot{p}_2, \dots, p_n, \dot{p}_n)^T$ is the $2n$ -dimensional state vector,

$$\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n), \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

The matrices B_j and the vector u are defined by:

$$B_j = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v_j(a_1) & v_j(a_2) & \cdots & v_j(a_r) \end{pmatrix}_{n \times r} \quad \text{and} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}.$$

5.2.2 Discrete-Time Systems

A linear time-invariant discrete-time system may be represented by means of a system of difference equations:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (5.2.8)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (5.2.9)$$

As before, $x(k)$ is the n -dimensional **state vector**, $u(k)$ is the m -dimensional **input vector**; and A , B , C and D are time-invariant matrices of dimensions $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$, and $r \times m$, respectively. The inputs and outputs of a discrete-time system are defined only at discrete time instants.

Sometimes we will write the above equations in the form:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad (5.2.10)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k. \quad (5.2.11)$$

5.2.3 Descriptor Systems

The system represented by Eqs. (5.2.1) and (5.2.2) is a special case of a more general system, known as the **descriptor system**.