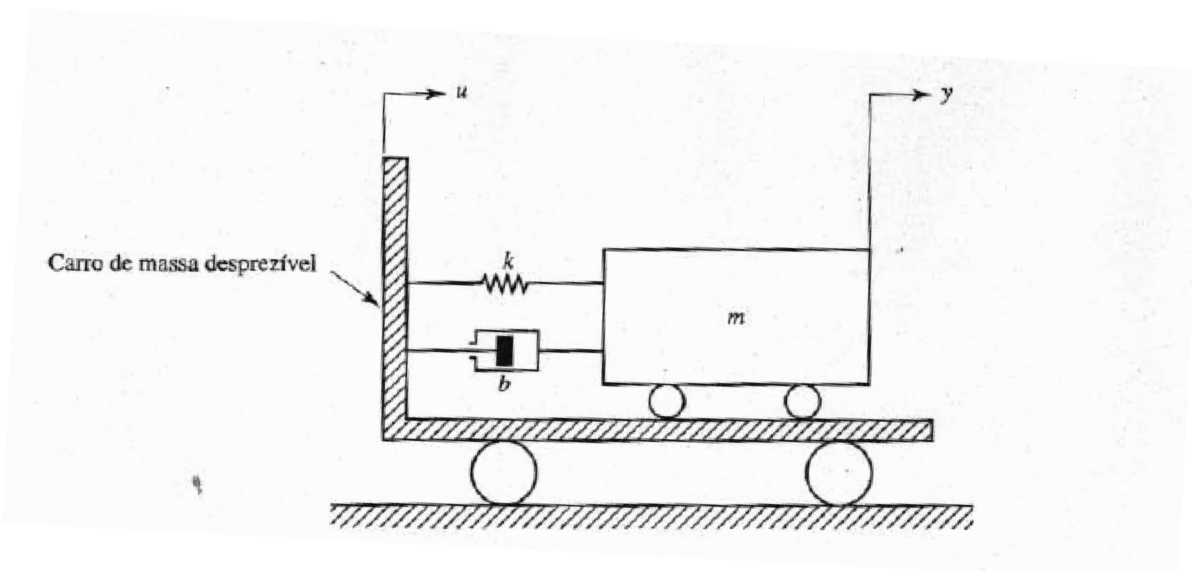
CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S01 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor montado em um carro

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor montado em um carro de massa desprezível, como mostra a figura abaixo. Um amortecedor é um dispositivo que produz um atrito ou amortecimento hidráulico. Nesse sistema, *m* representa a massa, *b,* o coeficiente de atrito viscoso, e *k,* seja a constante da mola.



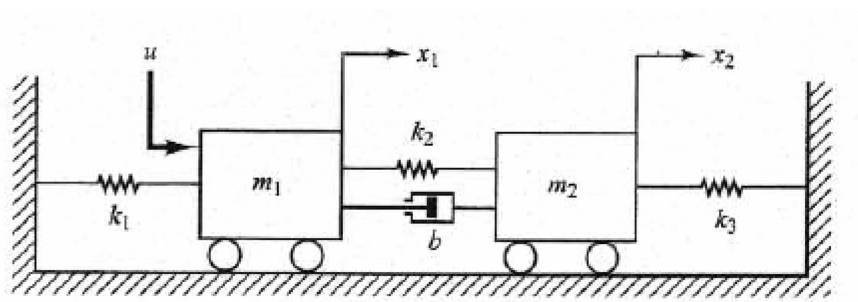
Equação Diferencial é dada por:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S02 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor montado em um carro de massa desprezível, como mostra a figura abaixo. Um amortecedor é um dispositivo que produz um atrito ou amortecimento hidráulico. Nesse sistema, *m* representa a massa, *b,* o coeficiente de atrito viscoso, e *k,* seja a constante da mola.



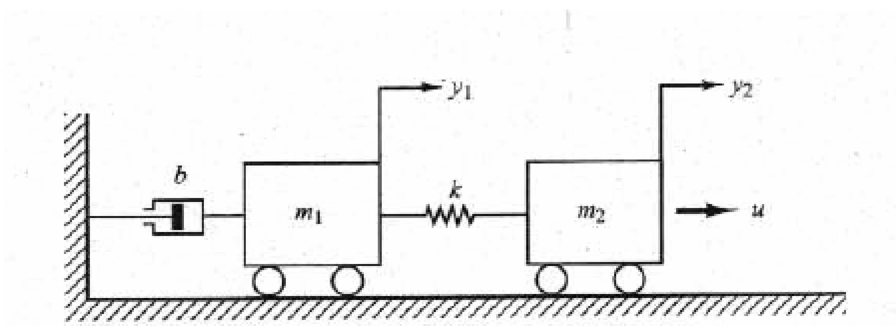
Equação Diferencial é dada por:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S03 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor montado em um carro de massa desprezível, como mostra a figura abaixo. Um amortecedor é um dispositivo que produz um atrito ou amortecimento hidráulico. Nesse sistema, *m* representa a massa, *b,* o coeficiente de atrito viscoso, e *k,* seja a constante da mola.



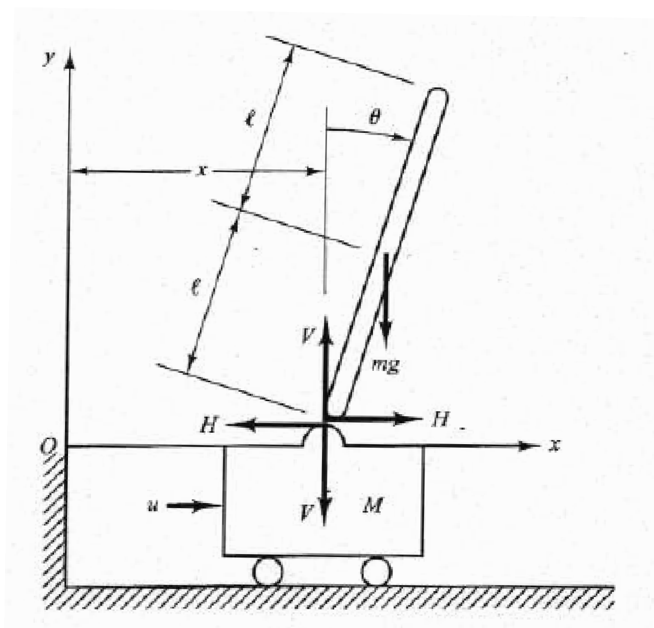
Equação Diferencial é dada por:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + k(y_1 - y_2) &= 0 \\
m_2\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) &= u
\end{aligned}
$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S04 - Sistema Mecânico Pêndulo Invertido

Um pêndulo invertido montado em um carro motorizado é mostrado na figura abaixo. O pêndulo invertido é instável, pois pode cair a qualquer instante, para qualquer direção, a menos que uma força adequada de controle seja aplicada a ele. A força de controle u é aplicada ao carro. Considere que o centro de gravidade da haste do pêndulo esteja situado no centro geométrico dele.



Equação Diferencial é dada por:

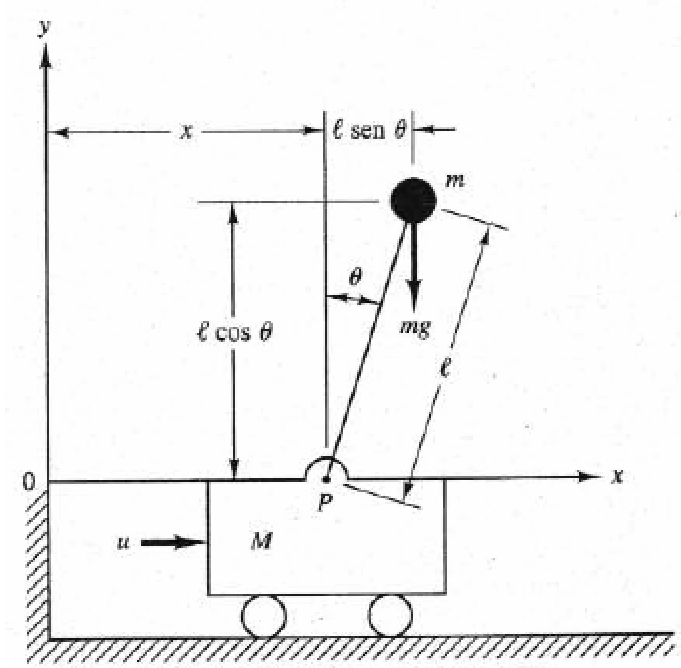
$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S05 - Sistema Mecânico Pêndulo Invertido

Um pêndulo invertido montado em um carro motorizado é mostrado na figura abaixo. Nesse sistema a massa está concentrada no topo da haste, o centro de gravidade é o centro da bola do pêndulo.



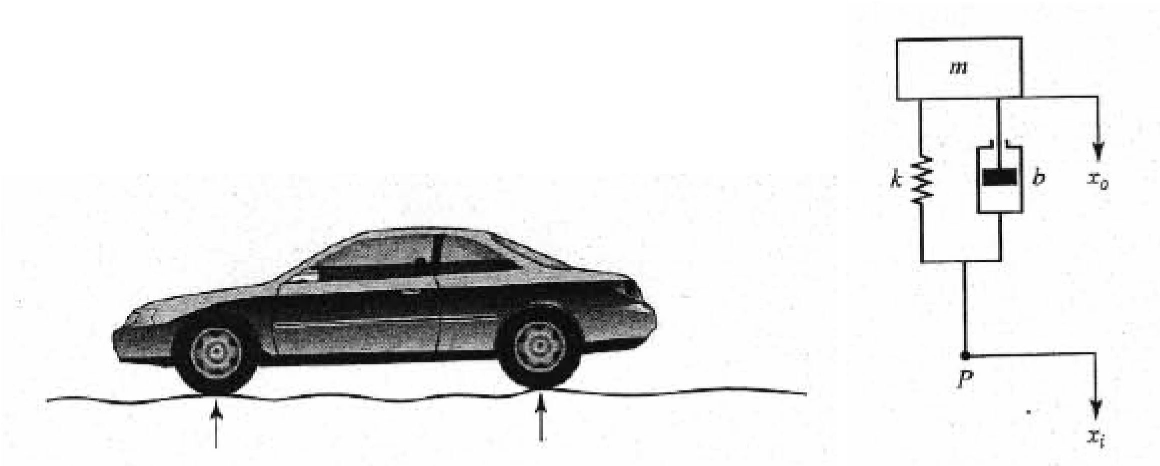
Equação Diferencial é dada por:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u$$
$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S06 - Sistema Mecânico Simplificado de Suspensão de um Automóvel

Uma versão simplificada do sistema de suspensão de um automóvel é mostrada na figura abaixo. Admite-se que o movimento x_i no ponto P seja a entrada do sistema e o movimento vertical x_0 do carro seja a saída.



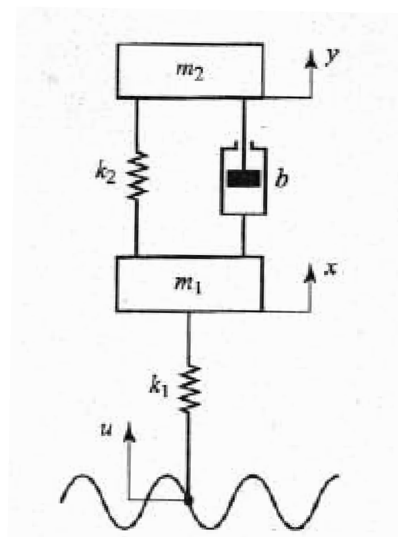
Equação Diferencial é dada por:

$$m\ddot{x}_o + b(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + k(x_o - x_i) = 0$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S07 - Sistema Mecânico Simplificado de Suspensão de um Automóvel ou Motocicleta

Uma versão simplificada da suspensão de um automóvel ou de uma motocicleta é mostrada na figura abaixo. Suponha que os deslocamentos x e y sejam medidos a partir das respectivas posições de repouso que ocorrem na ausência da entrada u.



Equação Diferencial é dada por:

$$m_1\ddot{x} = k_2(y - x) + b(\dot{y} - \dot{x}) + k_1(u - x)$$
$$m_2\ddot{y} = -k_2(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x})$$

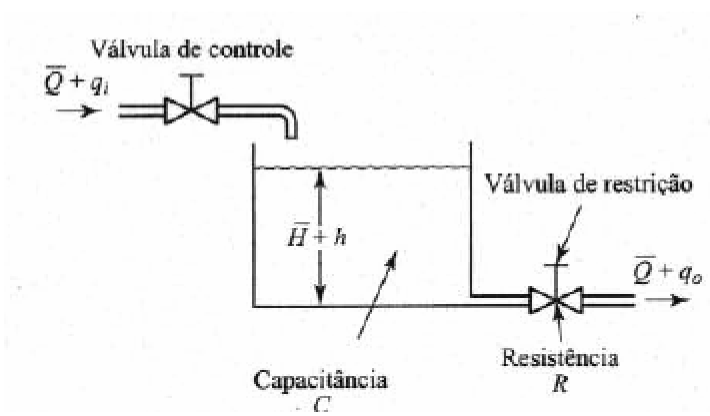
CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S08 - Sistema de Nível de Líquidos

Considere o sistema de nível de líquido da figura abaixo. Nesse sistema, o líquido flui em uma válvula de restrição, na lateral do reservatório. A resistência no escoamento laminar é constante e análoga aa resistência elétrica. Neste sistema,

q_i = pequeno desvio da taxa de escoamento de entrada em realação a seu valor de regime permanente, m^3 /s

h = pequeno desvio de nível a partir de seu valor de regime permanente, m



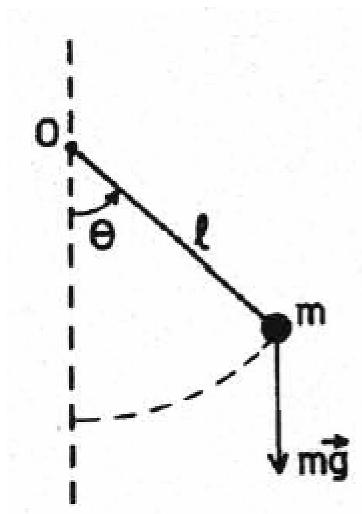
Equação Diferencial desse sistema para um valor constante R é dada por:

$$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S09 - Sistema Mecânico Pêndulo Simples

Seja o sistema constituído por um corpo de massa m e uma haste rígida de comprimento l (de massa desprezível) que pode se mover livremente num plano vertical de acordo com a figura abaixo.



Equação Diferencial é dada por:

$$m\ell^2\,\ddot{\theta} + mg\ell\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

SISTEMA S10 - Sistema Populacional Predador-Presa

Admita a convivência de duas espécies de peixes em um lago: **A (presa)** alimenta-se de plantas que existem em abundância, **B (predador)** sobrevive alimentando-se da espécie **A.** O sistema de equações diferenciais constituídos pelas equações abaixo é o modelo de Lotka-Volterra para a dinâmica populacional do sistema predador-presa. Seja $x(t)$ a população de **A** e $y(t)$ a de **B**. O número de indivíduos de **A** comidos por **B** é admitido ser proporcional ao inúmero de encontros entre **A** e **B**; daí o fator xy. Para a população de **B** admite-se que na ausência de presa a taxa de mortalidade dessa espécie supera a de nascimentos; resulta a diminuição da população de **B** (num intervalo Δt). Os parâmetros k ,a e L,b são constantes.

$$\dot{x} = kx - axy$$

$$\dot{y} = -Ly + bxy$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S11 - Sistema Mecânico Sismógrafo

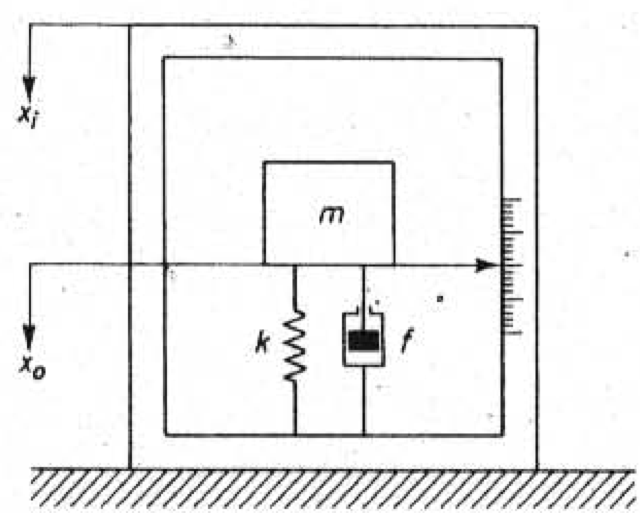
Um sismógrafo indica o deslocamento de sua carcaça em relação ao espaço inercial. É utilizada para medir deslocamentos de terra durante terremotos (abalos sísmicos). A figura abaixo indica o diagrama esquemático de um sismógrafo.

Definição das variáveis:

x_i = deslocamento da carcaça relativo ao espaço inercial

x_0 = deslocamento da massa m relativa ao espaço inercial

$y = x_0 - x_i$ = deslocamento da massa m relativamente à carcaça



A equação para este sistema é dada por:

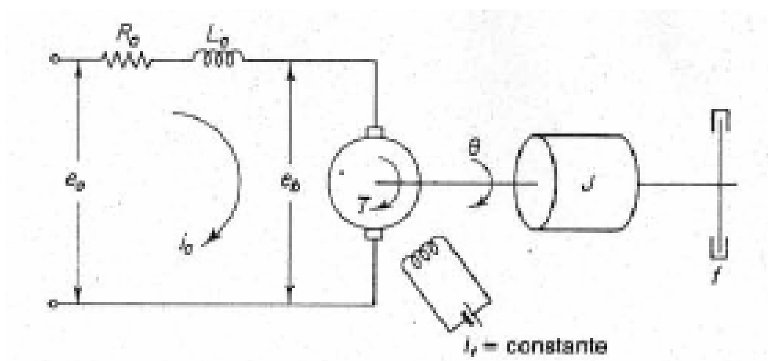
$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_i$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S12 - Sistema Eletro-Mecânico

Considere o sistema eletro-mecânico o motor c.c. controlado por armadura indicado na figura abaixo. Neste sistema,

R_a = resistência do enrolamento da armadura, ohms
L_a = indutância do enrolamento da armadura, henrys
i_a = corrente do enrolamento da armadura, ampères
e_a = tensão aplicada na armadura, volts
e_b = força contra eletromotriz, volts
θ = deslocamento angular do eixo do motor, radianos
T =torque fornecido pelo motor, N . m
J = momento de inércia equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg.m^2
f = coeficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e da carga referida ao eixo do motor, kg.m/rad/s



As equações diferenciais para este sistema são

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt}$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T = K i_a$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S13 - Sistema Térmico

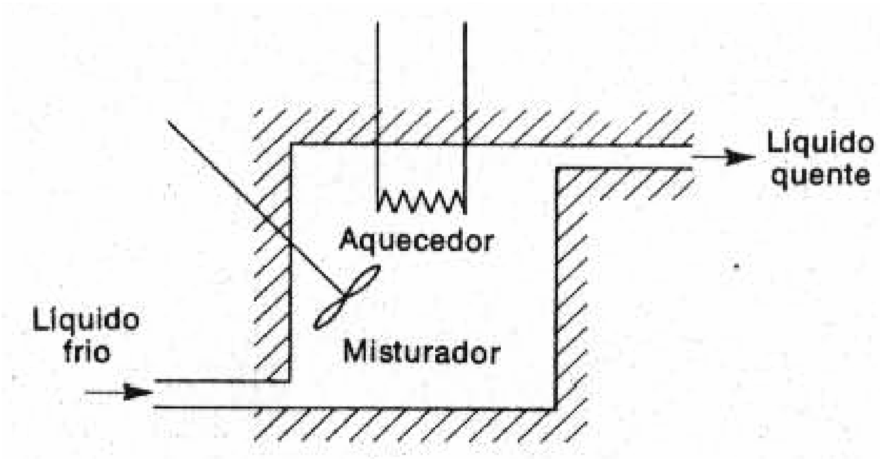
Considere o sistema térmico indicado na figura abaixo. Neste sistema,

R = resistência térmica, ºCs/cal

C = capacitância térmica, cal/ºC

θ = variação de temperatura

h_i = pequena variação na taxa de entrada de calor



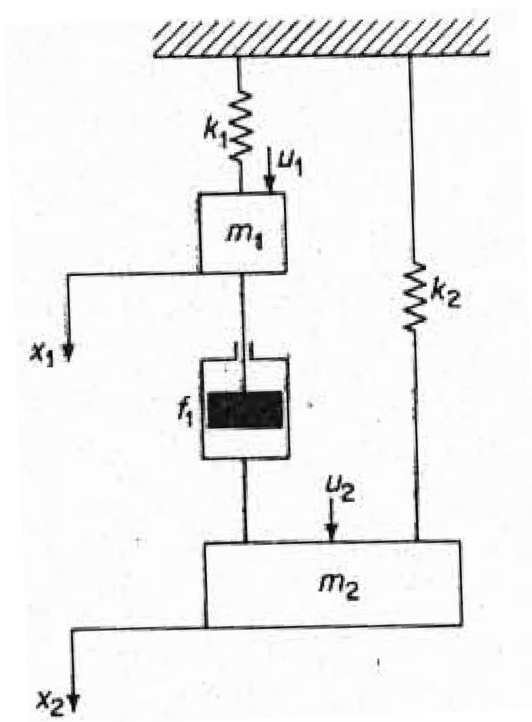
A equação diferencial para este sistema é dada por:

$$RC\frac{d\theta}{dt} + \theta = Rh_i$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S14 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere o sistema mecânico massa-mola-amortecedor mostrado na figura abaixo. Suporemos que o sistema está inicialmente em repouso.



As equações que descrevem a dinâmica do sistema são

$$m_1\ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 = u_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 + f_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 x_2 = u_2$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

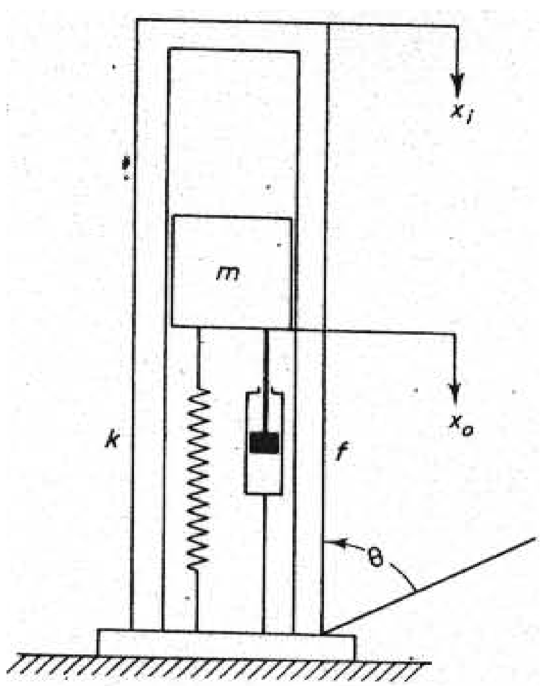
SISTEMA S15 - Sistema Mecânico Acelerômetro

Suponha que a carcaça do acelerômetro está firmemente aclopada a uma estrutura de uma aeronave. O acelerômetro indica a aceleração de sua carcaça em relação ao espaço inercial. O diagrama esquemático de um acelerômetro é mostrado na figura abaixo. Nesse sistema,

x_i = deslocamento da carcaça em relação ao espaço inercial

x_0 = deslocamento da massa m relativa ao espaço inercial

$y = x_0 - x_i$ = deslocamento da massa m relativamente à carcaça



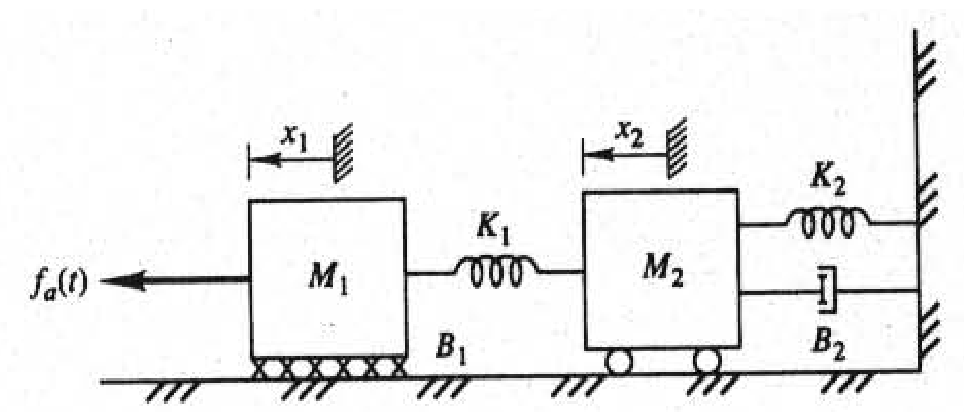
A equação para este sistema é

$$m\ddot{y} + f\dot{y} + ky = -m\ddot{x}_1 + mgsen\theta$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S16 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor ilustrado na figura abaixo. Onde x indica a posição e v a velocidade.



As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

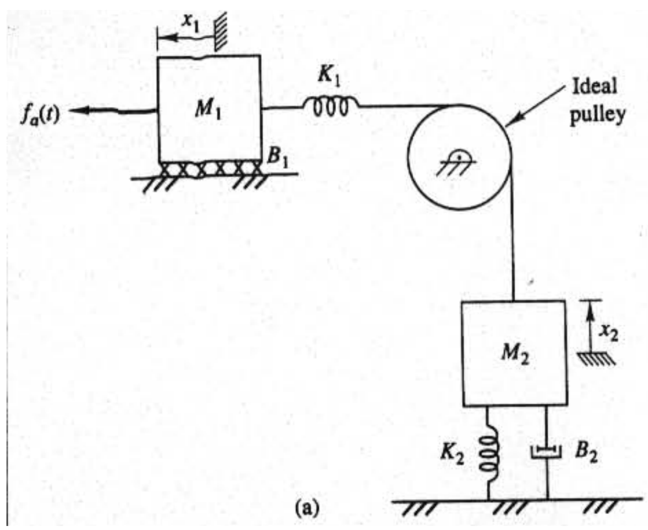
$$M_1 \dot{v}_1 + B_1 v_1 + k_1(x_1 - x_2) = f_a(t)$$

$$M_2 \dot{v}_2 + B_2 v_2 + K_2 x_2 = K_1(x_1 - x_2)$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S17 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor ilustrado na figura abaixo. Onde x indica a posição e v a velocidade.



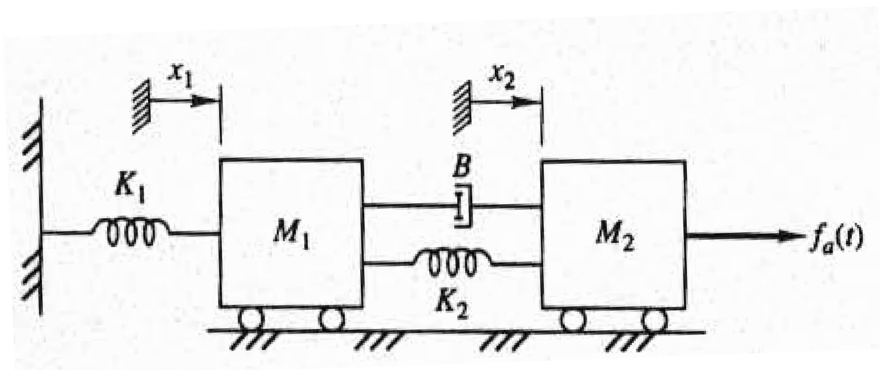
As equações que descrevem a dinâmica para este sistema são

$$M_1 \dot{v}_1 + B_1 v_1 + k_1(x_1 - x_2) = f_a(t)$$
$$M_2 \dot{v}_2 + B_2 v_2 + K_2 x_2 + M_2 g = K_1(x_1 - x_2)$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S18 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor ilustrado na figura abaixo. Onde x indica a posição e v a velocidade.



As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

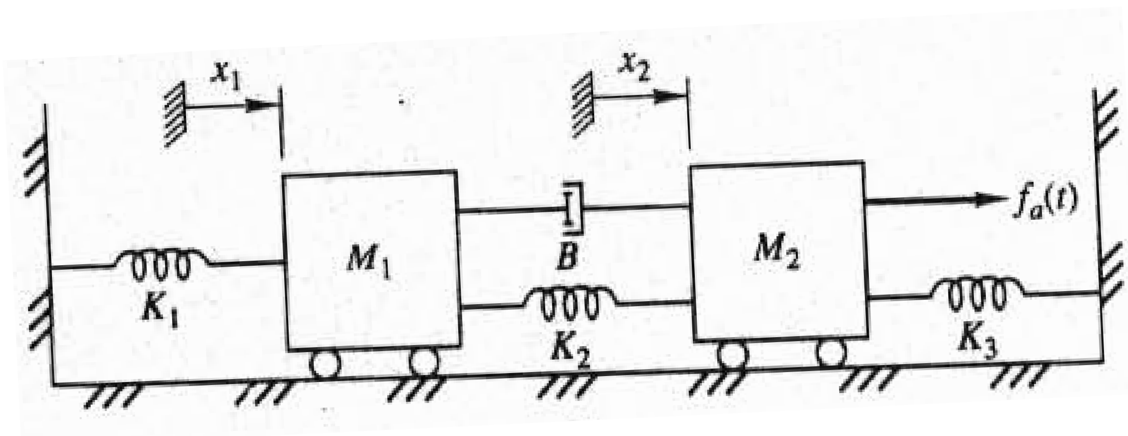
$$M_1 \dot{v}_1 + K_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) - B(v_2 - v_1) = 0$$

$$M_2 \dot{v}_2 + K_2(x_2 - x_1) + B(v_2 - v_1) = f_a(t)$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S19 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor ilustrado na figura abaixo. Onde x indica a posição e v a velocidade.



As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

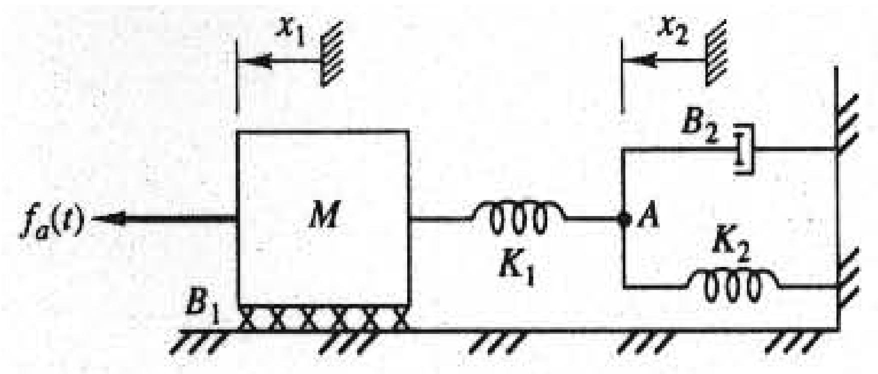
$$M_1 \dot{v}_1 + (k_1 + k_2)x_1 + Bv_1 - K_2 x_2 - Bv_2 = 0$$

$$M_2 \dot{v}_2 - K_2 x_1 - Bv_1 + (K_2 + K_3)x_2 + Bv_2 = f_a(t)$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S20 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor ilustrado na figura abaixo. Onde x indica a posição e v a velocidade.



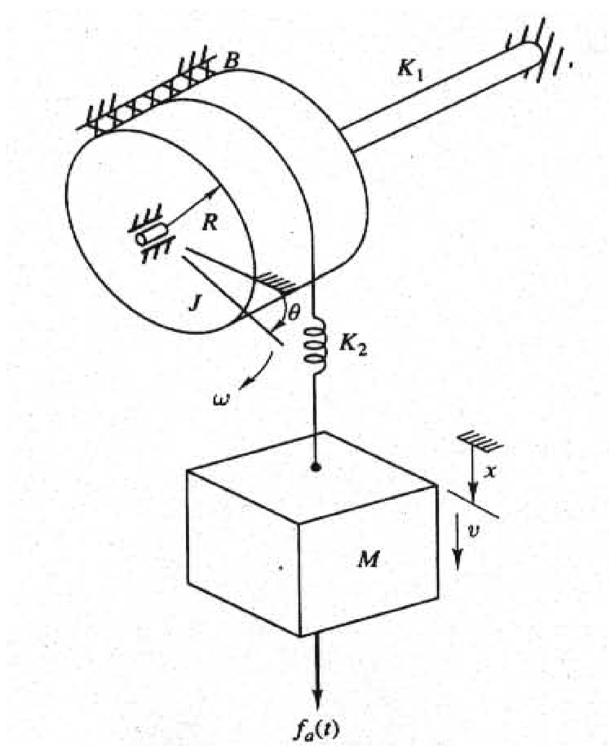
As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

$$M\dot{v}_1 + B_1 v_1 + K_1(x_1 - x_2) = f_a(t)$$
$$B_2\dot{x}_2 + K_2 x_2 + K_1(x_2 - x_1) = 0$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S21 - Sistema Mecânico Translacional e Rotacional

Considere um sistema translacional e rotacional ilustrado na figura abaixo. Elementos mecânicos rotacionais são elementos forçados a girar em torno de um eixo. Em sistemas mecânicos translacionais, realizamos a análise através do equilíbrio de forças. Neste caso, x indica a posição e v a velocidade.



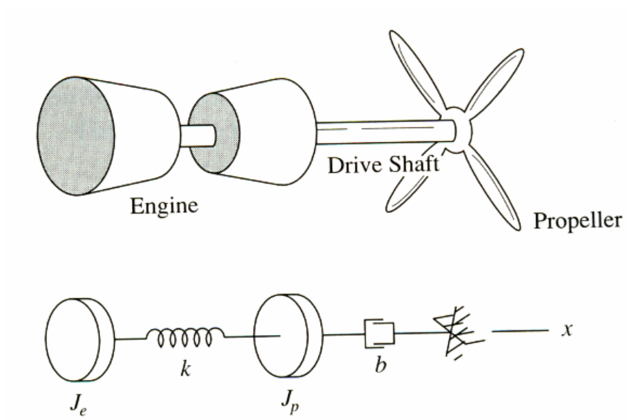
As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

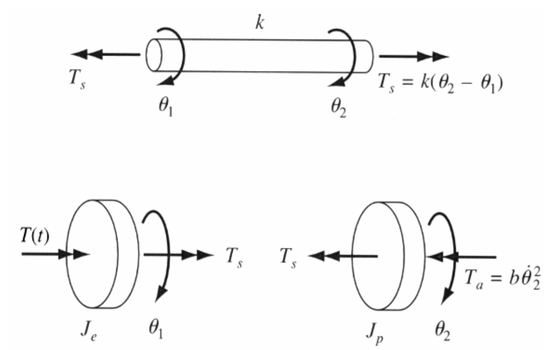
$$J\dot{\omega} + B\omega + K_1\theta - RK_2(x - R\theta) = 0$$
$$M\dot{v} + K_2(x - R\theta) = f_a(t) + Mg$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S22 - Sistema Rotacional Motor-propulsor

A figura abaixo mostra uma representação de um propulsor de um avião de forma simplificada. O momento de inércia do motor é representado por *Je* e o momento de inércia da hélice é representado por *Jp*. O torque aplicado pelo motor é definido como *T(t).*





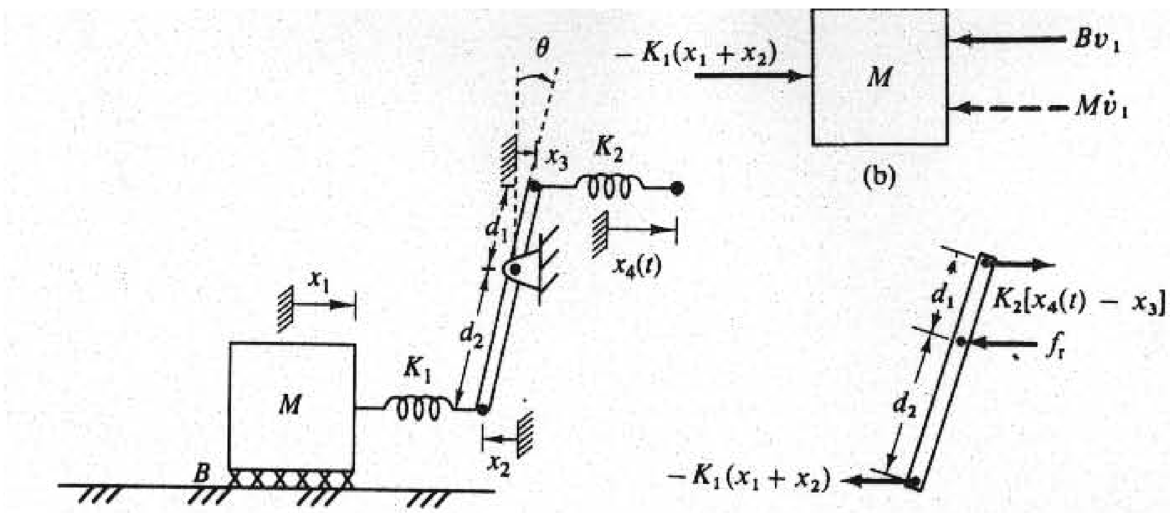
As equações que descrevem a dinâmica para este sistema são

$$T(t) = J_e.\ddot{\theta}_1 + k(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$
$$k(\theta_1(t) - \theta_2(t)) = J_P.\ddot{\theta}_2 + b.\dot{\theta}_2$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S23 - Sistema Translacional contendo uma Alavanca

Considere um sistema translacional contendo uma alavanca mostrada na figura abaixo. Onde x indica a posição e v a velocidade.



As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

$$\dot{x} = v_1$$

$$\dot{v}_1 = -\frac{1}{M}[Bv_1 + \alpha K_1 x_1 + \alpha\left(\frac{d_2}{d_1}\right)K_1 x_4(t)]$$

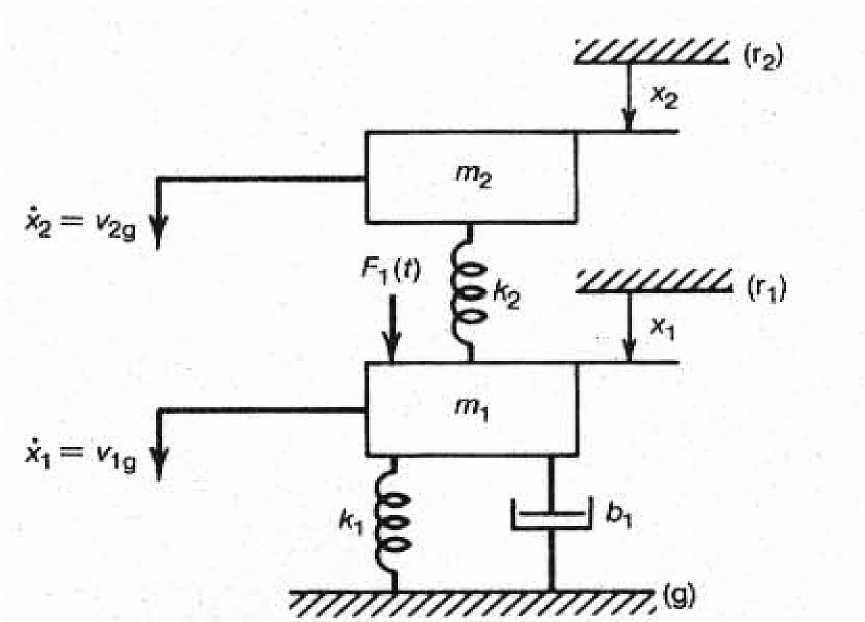
onde

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{K_1}{K_2}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2}$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S24 - Sistema Mecânico Massa-Mola-Amortecedor

Considere um sistema mecânico massa-mola-amortecedor ilustrado na figura abaixo.



As equações diferenciais que descrevem a dinâmica para este sistema são

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0$$

CCI-22 Matemática Computacional / 2008

SISTEMA S25 - Sistema Mecânico Levitador

Considere um levitador magnético que consegue fazer com que uma bola levite no ar, sem contato físico qualquer com outra superfície. Neste sistema,

R = resistência do enrolamento

L = indutância do enrolamento

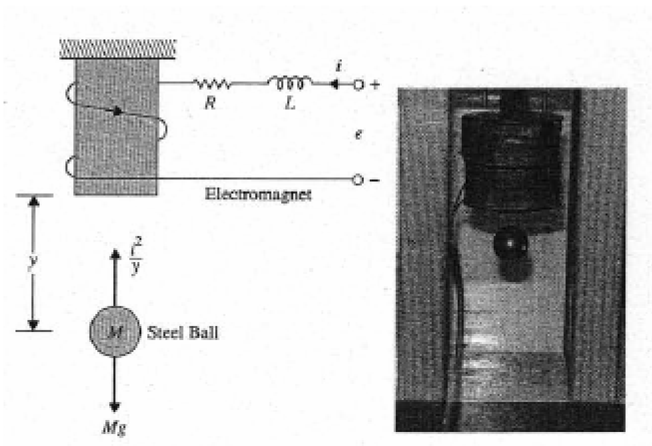
$i(t)$ = corrente do enrolamento

$e(t)$ = tensão aplicada

$y(t)$ = posição da bola

g = aceleração gravitacional

m = massa da bola



As equações que descrevem a dinâmica para este sistema são

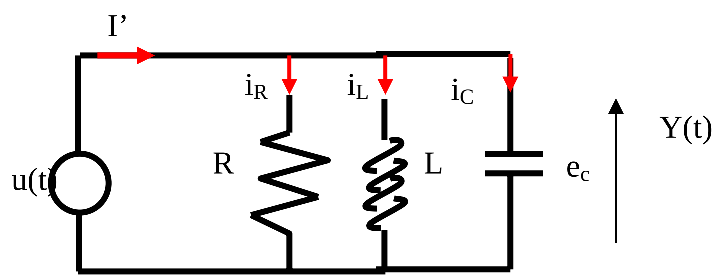
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y(t)}$$

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

CCI-22 Matemática Computacional/ 2008

SISTEMA S26 - Sistema Elétrico Circuito RLC

Considere um sistema elétrico um circuito RLC em paralelo conforme a figura abaixo.



As equações que descrevem a dinâmica para este sistema são

$$u = i_r + i_l + i_c$$

$$i_c = C\frac{de_c}{dt}$$

$$e_c = L\frac{di_l}{dt} = Ri_r$$