

CC222 – Visão Computacional

Transformações 3D e Projeções

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Prof. Carlos Henrique Q. Forster – Sala 121 IEC

forster@ita.br

ramal 5981

Tópicos da aula

- Geometria Projetiva Tridimensional
- Transformações em 3D
- Representação de Rotações
- Transformação de Corpo rígido em 3D
- Projeção ortográfica
- Projeção perspectiva
- Pontos de fuga
- Bases afins e projetivas
- Razão Cruzada

Livro para acompanhar essa aula

Mathematical Elements for Computer Graphics (2nd edition)

D. F. Rogers, J. A. Adams

McGraw-Hill

Capítulos 2 e 3 pp 61-206

Fundamentos de Geometria Computacional

Resende, R. J., Stolfi, J.

IX Escola de Computação, Recife, 1994

Capítulo 2 pp 25-76

Geometria Projetiva 3D

\mathbb{T}^3 é o espaço projetivo orientado.

Pontos

Os pontos são representados por quádruplas de coordenadas homogêneas

$[x \ y \ z \ w]^T$ das quais se exclui $[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e correspondem ao ponto $[x/w \ y/w \ z/w]^T$ em coordenadas cartesianas para $w > 0$, à direção do vetor (x, y, z) se $w = 0$ ou ao ponto $[x/w \ y/w \ z/w]^T$ do além se $w < 0$.

Plano

Planos são definidos por quádruplas de coeficientes homogêneos $\langle X, Y, Z, W \rangle$ e um ponto $[x \ y \ z \ w]^T$ pertence ao plano se $Xx + Yy + Zz + Ww = 0$.

Um plano divide os espaço em dois lados. De acordo com o sinal da expressão $Xx + Yy + Zz + Ww$ um ponto $[x \ y \ z \ w]^T$ está do lado positivo ou do lado negativo do plano.

O plano no infinito é definido como $\Omega = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, que define o aquém do espaço como os pontos que $w > 0$ e o além, $w < 0$.

Orientação do tetraedro

$$\Delta(p_0, p_1, p_2, p_3) = -\text{sgn} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & w_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & w_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Obtenção do plano por 3 pontos $p_0 \vee p_1 \vee p_2 = [X \ Y \ Z \ W]$,

$$X = - \begin{vmatrix} w_0 & y_0 & z_0 \\ w_1 & y_1 & z_1 \\ w_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, Y = \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & z_0 \\ w_1 & x_1 & z_1 \\ w_2 & x_2 & z_2 \end{vmatrix}, Z = - \begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, W = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Obtenção do ponto intersecção de 3 planos (que não possuem reta comum) pela fórmula dual.

Transformações Geométricas em 3D

**Transformação 4x4 de coordenadas homogêneas
(transformação projetiva em 3D)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & i & j & n \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{bmatrix}$$

Partes da matriz de transformação:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} \text{ Transformação linear em 3D.}$$

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \text{ Vetor de translação em 3D.}$$

$$[p \quad q \quad r] \text{ perspectiva.}$$

$$[s] \text{ escala global}$$

Escala em 3D

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x' = ax \\ y' = ey \\ z' = jz \end{cases}$$

Exemplo: aplicar escala ao paralelepípedo

$$\begin{bmatrix} 1/2 & & & \\ & 1/3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala global

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1/2 \end{bmatrix} \text{ equivale à } \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Translação3D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x' = x + l \\ y' = y + m \\ z' = z + n \end{cases}$$

Reflexo 3D

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Reflexo em relação ao plano } xy.$$

Cisalhamento

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 1 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x' = x + cz \\ y' = y + fz \\ z' = z \end{cases} \text{ Desloca } x \text{ e } y \text{ em função de } z.$$

Cisalhamentos nos outros planos são análogos.

Rotações em 3D

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo x no sentido anti-horário.

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo y no sentido anti-horário.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Rotação em torno do eixo z no sentido anti-horário.}$$

O determinante é 1.

As linhas são vetores ortonormais (unitários e ortogonais).

Por isso $R^T = R^{-1}$

A composição de rotações é associativa, mas não é comutativa.

A mudança da ordem das rotações pode dar resultados diferentes.

Exemplo: Rotação de 90 graus em x e em y.

Depois em ordem inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ -1 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício: Composição de Transformações

Rotação em torno de um eixo arbitrário.

Eixo passa por $[x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$ com cossenos de direção (c_x, c_y, c_z) .

Rotação por um ângulo δ .

- 1- Transladar de $(-x_0, -y_0, -z_0)$ para eixo passar pela origem.
- 2- Rotacionar em torno do eixo x até eixo no plano xz.
- 3- Rotacionar em torno do eixo y até eixo coincidir com eixo z.
- 4- Rotacionar δ em torno do eixo z
- 5- Transformação 3 inversa
- 6- Transformação 2 inversa
- 7- Transformação 1 inversa

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & & -x_0 \\ & 1 & -y_0 \\ & & 1 & -z_0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{c_z}{d}, \sin \alpha = \frac{c_y}{d}$$

$$T_2 = R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z/d & -c_y/d & 0 \\ 0 & c_y/d & c_z/d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos \beta = d, \sin \beta = c_x$$

$$T_3 = R_y = \begin{bmatrix} d & 0 & -c_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_x & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4 = R_z = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição: $T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} T_4 T_3 T_2 T_1$

Outros Exemplos de Composição de Transformações:

- Rotações e Translações
- Rotação por eixo paralelo a um eixo coordenado.
- Reflexo sobre plano arbitrário no espaço

Transformações Afins em 3D

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (\text{coordenadas cartesianas})$$

Ou ainda, em coordenadas homogêneas:

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & i & j & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

Preservam o paralelismo de retas e de planos e as combinações convexas.

Transformações de Corpo Rígido em 3D

Rotações e translações em 3D e suas composições.

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{bmatrix} P + \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ d^2 + e^2 + f^2 = 1 \\ g^2 + i^2 + j^2 = 1 \\ ad + be + cf = 0 \\ dg + ei + fj = 0 \\ ag + bi + cj = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & j \end{vmatrix} = +1$$

Restrições não-lineares

Representação de Rotações em 3D

3 graus de liberdade

- Ângulos de Euler: rotação em x, rotação em y e rotação em z.
- Ângulos de Euler II: eixo pela origem e ângulo de rotação (regra mão direita).
- Matriz 3x3 ortonormal positiva.
- Quaternhões unitários.

Problema dos ângulos de Euler é o chamado “Gimbal lock”: para uma dada configuração, um grau de liberdade é perdido.

Lembrando números complexos

$$z = x + iy \text{ onde } i = \sqrt{-1}.$$

Soma $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \rightarrow$ translação.

Escala $\alpha z = (\alpha x) + i(\alpha y) \rightarrow$ escala uniforme.

$$\text{Produto } z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

$$\text{Fórmula de Euler } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\text{Produto por } e^{i\theta} : z \cdot e^{i\theta} = x \cos \theta - y \sin \theta + i(y \cos \theta + x \sin \theta)$$

Número complexo unitário representa uma rotação em 2D.

Quaternhões

Vetor de 4 componentes

$${}^o q = q + \mathbf{q} \text{ (soma de um componente escalar e um vetor 3D).}$$

Produto, associativo, mas não comutativo

$${}^o r = {}^o p {}^o q \left\{ \begin{array}{l} r = pq - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ \mathbf{r} = p\mathbf{q} + q\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{array} \right.$$

Produto escalar de quaternhões

$${}^o p \bullet {}^o q = pq + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$$

Norma:

$$\left| {}^o q \right| = {}^o q \bullet {}^o q = q^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$$

Quartenhã unitário tem norma igual a 1.

Rotação de θ em torno de um vetor unitário $\vec{\omega}$ é representada por

$${}^o q = \sin \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{\omega}$$

Notar que ${}^o q^{-1}$ define a mesma rotação que ${}^o q$, visto que inverte a orientação do eixo e o ângulo simultaneamente.

Quartenhã conjugado:

$${}^o q^* = q - \mathbf{q}$$

Inverte apenas o “cosseno”: rotação inversa para quartenhã unitário:

$${}^o q^* {}^o q = {}^o q {}^o q^* = 1 \text{ (para quartenhã unitário)}$$

Fórmula da rotação

$$(0 + \mathbf{x}') = {}^o q (0 + \mathbf{x}) {}^o q^*$$

A composição de rotações resulta da multiplicação de quartenhões

$$(0 + \mathbf{x}'') = {}^o p (0 + \mathbf{x}') {}^o p^* = {}^o p ({}^o q (0 + \mathbf{x}) {}^o q^*) {}^o p^* = ({}^o p {}^o q) (0 + \mathbf{x}) ({}^o q {}^o p)^*$$

A matriz de rotação correspondente é

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_0q_3 + q_2q_1) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(-q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(-q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_0q_1 + q_3q_2) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

Para os ângulos de Euler α, β, γ , a matriz de rotação é dada por

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \end{bmatrix}$$

A rotação em torno do vetor $n = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$ unitário é

$$R = I \cos \theta + (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} + \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores de R são $1, \cos \theta \pm i \sin \theta$. O auto-vetor de 1 é o vetor n (eixo).

Definição de uma matriz de rotação pela direção dos eixos.

Basta determinar uma base ortonormal.

Vetor VPN (view plane normal – aponta para um objeto)

Vetor VUP (view up vector – aponta para cima)

Queremos que eixo z aponte para o objeto

Normalizar VPN (unitário).

Produto vetorial $VX = VUP \times VPN$, normalizar VX.

Produto vetorial $VY = VPN \times VX$

Preencher a matriz que leva o eixo z para VPN, o eixo x para VX e o y para VY:

$$R = [VX|VY|VPN]$$

Projeção Ortográfica

Redução para um espaço de dimensão menor.

No caso da projeção ortográfica, perdemos a informação do eixo z.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \text{ou simplesmente} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$X = x$$

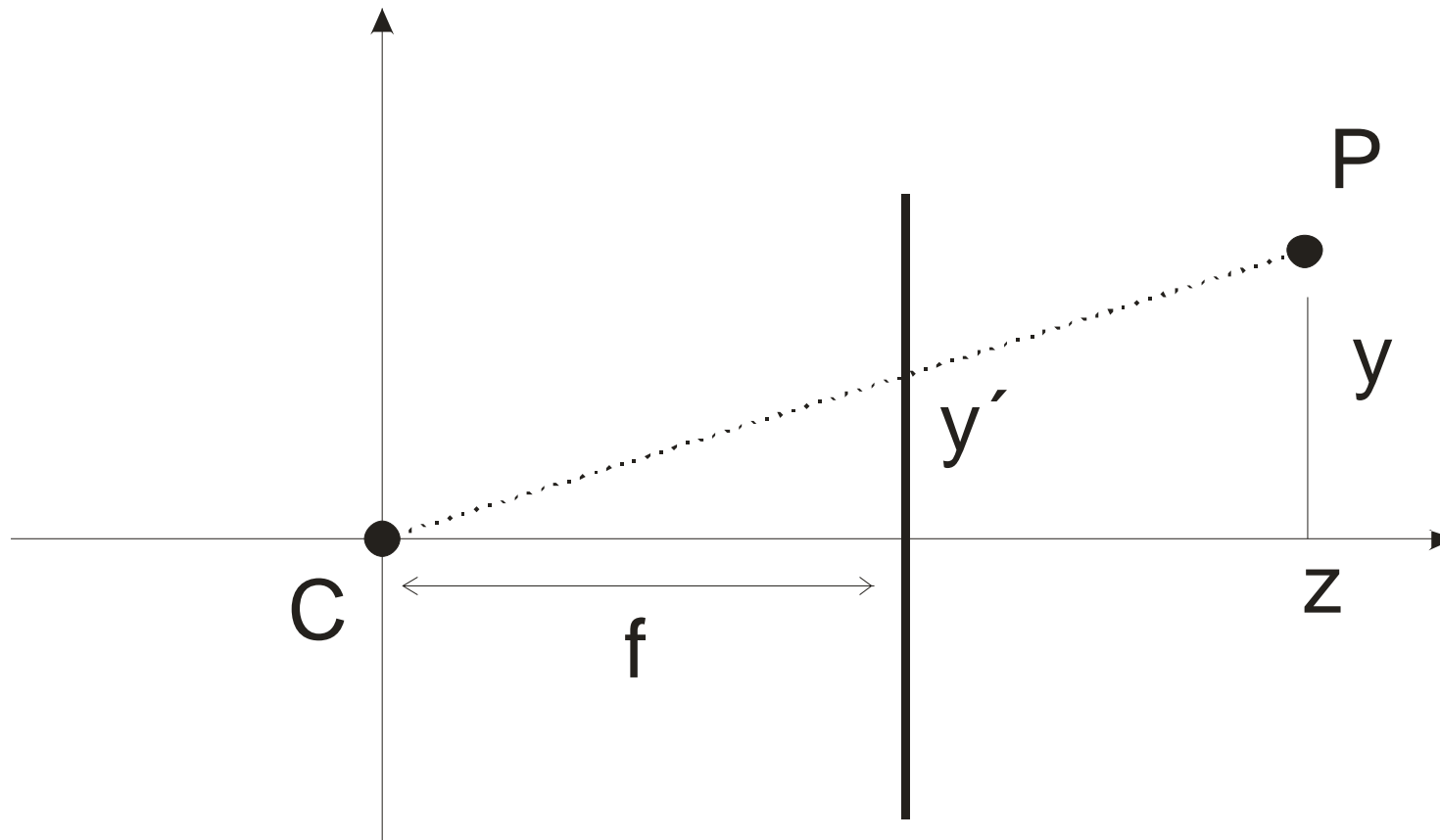
$$Y = y$$

$$Z = 0$$

$$W = w$$

Projeção Perspectiva

Várias formulações possíveis



C é o centro de projeção, f é a distância focal (C ao plano-imagem).

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{f}{z} y \\ x' = \frac{f}{z} x \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas:

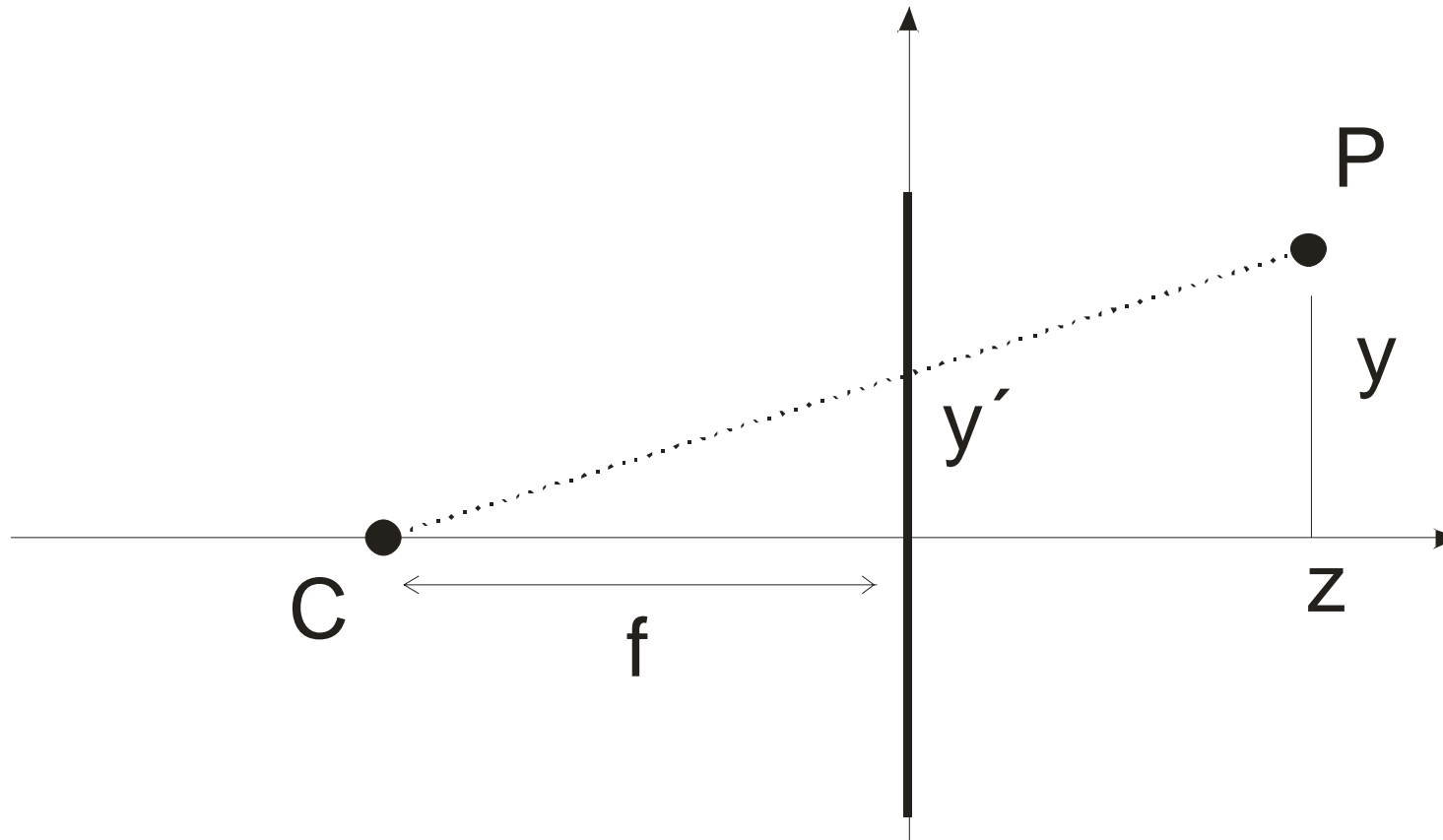
$$y' = fy$$

$$x' = fx$$

$$w' = z$$

$$P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}, \text{ ou então } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Outro modelo.



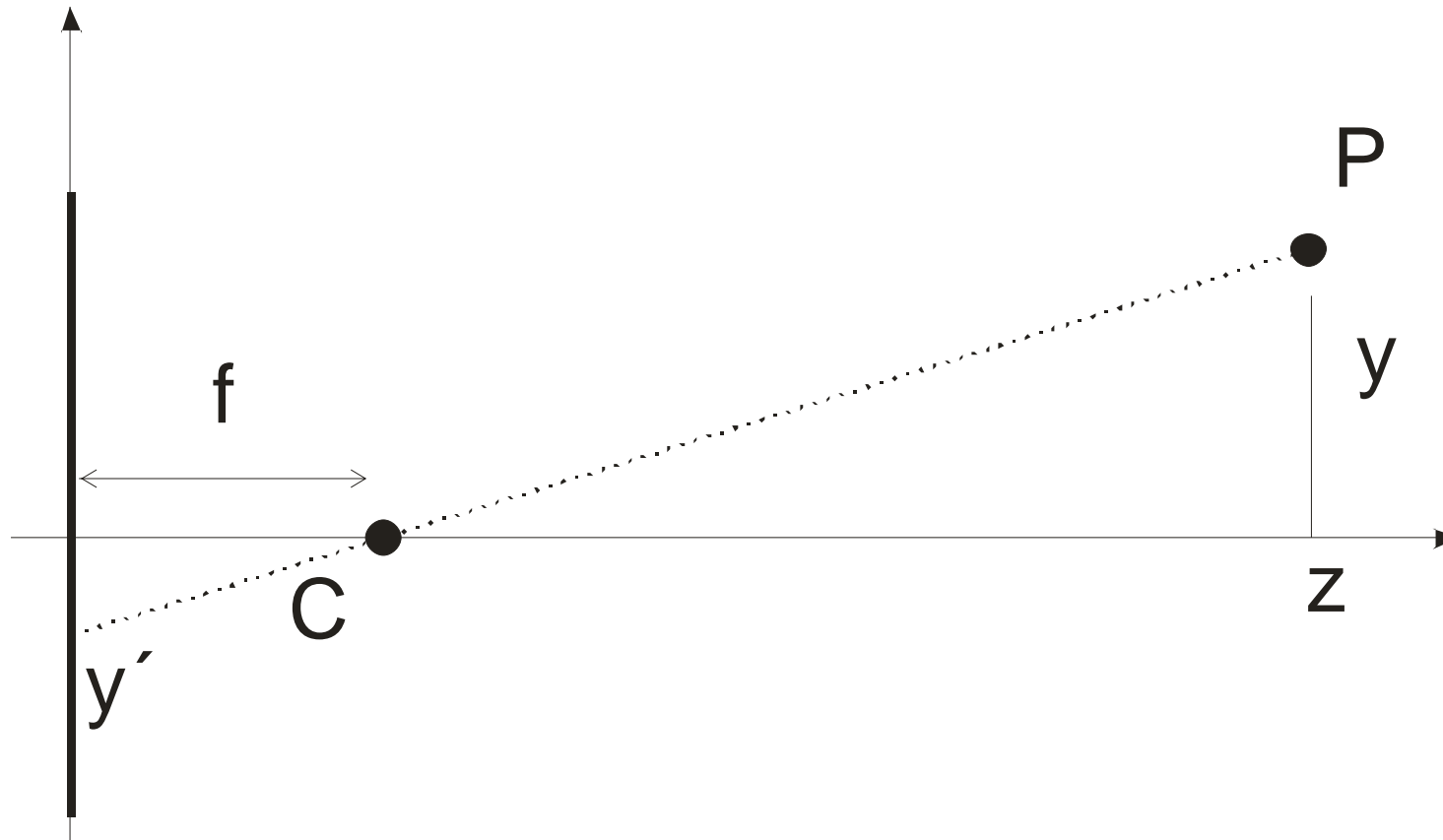
O plano-imagem agora está sobre a origem (e não o centro de projeção).

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z+f} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{f}{z+f} y \\ x' = \frac{f}{z+f} x \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x \\ w' &= \frac{z+f}{f} = 1 + \frac{z}{f} \end{aligned} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Mais um modelo



Agora o centro de projeção está à frente do plano-imagem.

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z-f} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{f}{z-f} y \\ x' = \frac{f}{z-f} x \end{cases}$$

Em coordenadas homogêneas:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ x' &= x \\ w' &= \frac{z-f}{f} = \frac{z}{f} - 1 \end{aligned} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Pontos de Fuga

Os pontos de fuga numa imagem de perspectiva são os pontos em que as imagens das retas paralelas de uma cena se encontram.

Para nós, é simplesmente a projeção perspectiva de pontos no infinito.

Se a transformação de um ponto no infinito resultar um ponto no infinito, as retas paralelas naquela direção são também paralelas na imagem.

Se a transformação de um ponto no infinito resultar um ponto finito, as retas paralelas naquela direção são concorrentes na imagem sobre esse ponto.

Pontos de Fuga

Resultado da seguinte matriz de projeção

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ px + 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando ao ponto no infinito no eixo x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/p \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultado da seguinte projetividade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ px + py + pz + 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando aos pontos no infinito da direção dos eixos x, y e z e à origem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/p \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/r \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo – encontrar os pontos de fuga da seguinte transformação para as retas paralelas ao eixo x, ao eixo y e ao eixo z.

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.354 & 0.707 & -0.612 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.141 & -0.283 & -0.245 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: O ponto de fuga de

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0 & -0.5 & 0 \\ -0.354 & 0.707 & -0.612 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.141 & -0.283 & -0.245 & 1 \end{bmatrix} \text{ para o eixo x é } \begin{bmatrix} 0.866 \\ -0.354 \\ 0 \\ -0.141 \end{bmatrix}.$$

Em coordenadas cartesianas é o ponto $\begin{bmatrix} -6.142 \\ 2.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ou $(-6.142, 2.5)$ da imagem.

Os pontos de fuga para o eixo y e z são respectivamente $(0, -2.5)$ e $(2.04, 2.5)$

Exemplo

Translação para traz e para frente.

Mudança da distância focal em cada um dos modelos de projeção perspectiva.

Encontrar os pontos de fuga para uma dada matriz de transformação.

Encontrar a matriz de projeção ortográfica numa determinada direção.

Base Afim

Encontrar a transformação afim em 2D que mapeia os três pontos P1, P2 e P3 nos pontos Q1, Q2 e Q3.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para cada par de pontos PQ tenho duas equações.

Para encontrar as 6 incógnitas a,b,c,d,e,f, preciso de 3 pares de pontos.

Lembrando a solução linear

$$\begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} & 1 \\ p_{x2} & p_{y2} & 1 \\ p_{x3} & p_{y3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} p_{x1} & p_{y1} & 1 \\ p_{x2} & p_{y2} & 1 \\ p_{x3} & p_{y3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{y1} \\ q_{y2} \\ q_{y3} \end{bmatrix}$$

Qualquer transformação afim em 2D pode ser representada como a transformação dos pontos (0,0), (0,1) e (1,0). Os três pontos resultantes dessa transformação formam uma base afim (se não colineares).

Quantos pontos são necessários em 3 dimensões?

$$P' = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & i & j & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P$$

São doze incógnitas, mas cada ponto contribui com 3 equações. Assim, são necessários quatro pontos (não-coplanares) para formar uma base afim. Correspondem às transformações de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) e (0,0,0).

Base Projetiva

Encontrar transformação projetiva em 2D que mapeia 4 pontos.

$$\begin{bmatrix} hx'_1 \\ hy'_1 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$hx'_i = ax_i + by_i + c$$

$$hy'_i = dx_i + ey_i + f$$

$$h = gx_i + jy_i + 1$$

Substituindo h,

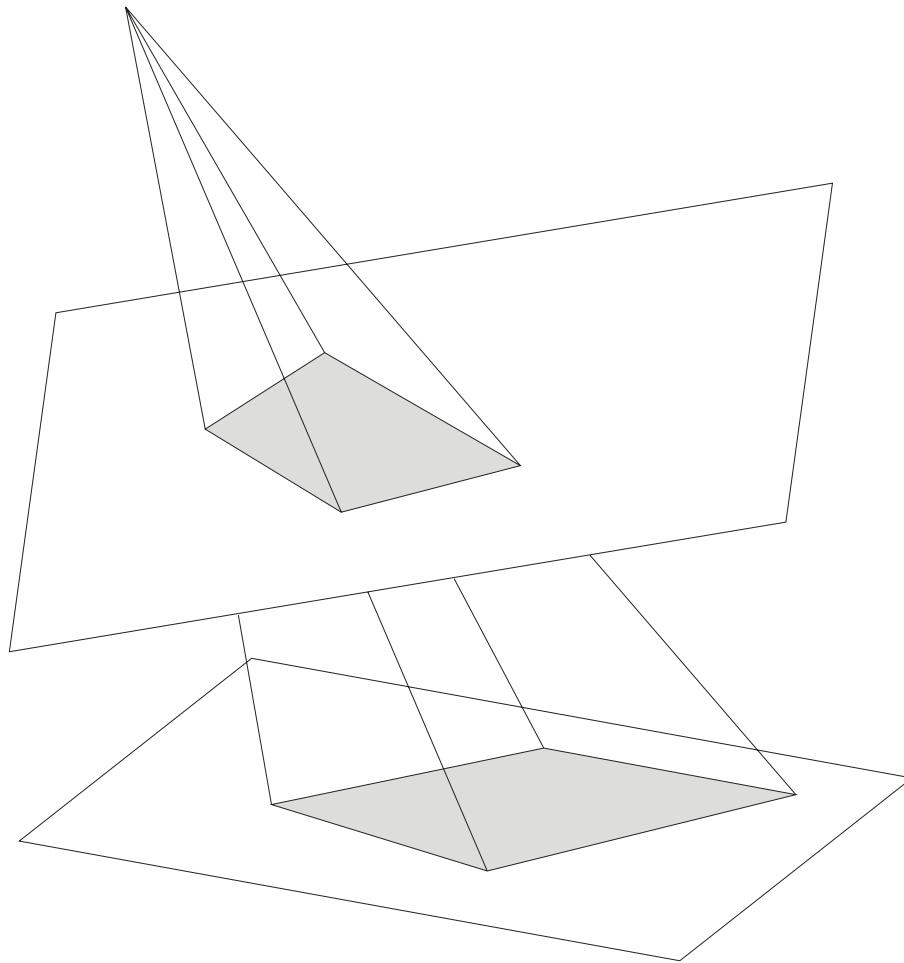
$$gx_i x'_i + jy_i x'_i + x'_i = ax_i + by_i + c$$

$$gx_i y'_i + jy_i y'_i + y'_i = dx_i + ey_i + f$$

Construímos o sistema 8x8, são duas equações para cada ponto.

$$\begin{bmatrix}
 x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & y_1 x'_1 \\
 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -y'_1 x_1 & y_1 y'_1 \\
 x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_2 x_2 & y_2 x'_2 \\
 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -y'_2 x_2 & y_2 y'_2 \\
 x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_3 x_3 & y_3 x'_3 \\
 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -y'_3 x_3 & y_3 y'_3 \\
 x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_4 x_4 & y_4 x'_4 \\
 0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -y'_4 x_4 & y_4 y'_4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 e \\
 f \\
 g \\
 j
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 x'_1 \\
 y'_1 \\
 x'_2 \\
 y'_2 \\
 x'_3 \\
 y'_3 \\
 x'_4 \\
 y'_4
 \end{bmatrix}$$

Podemos formar uma base pela transformação dos pontos (1,0), (0,1) (0,0) e (1,1).



A transformação encontrada é uma transformação de plano para plano ou então de imagens planas para imagens planas (com aplicações ...)

Exercício

Considere a transformação projetiva

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & i & j & n \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{bmatrix}$$

Quantas incógnitas (ou parâmetros) devem ser determinadas dadas associações de pontos originais e pontos transformados (em 3D)?

Quantas equações cada par de ponto (original-transformado) contribui para determinar a transformação?

Quantos pontos são necessários em 3D para determinar uma base projetiva?

Pontos para a base projetiva: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

Razão Cruzada

Dados 4 pontos da reta projetiva, descritos em coordenadas homogêneas

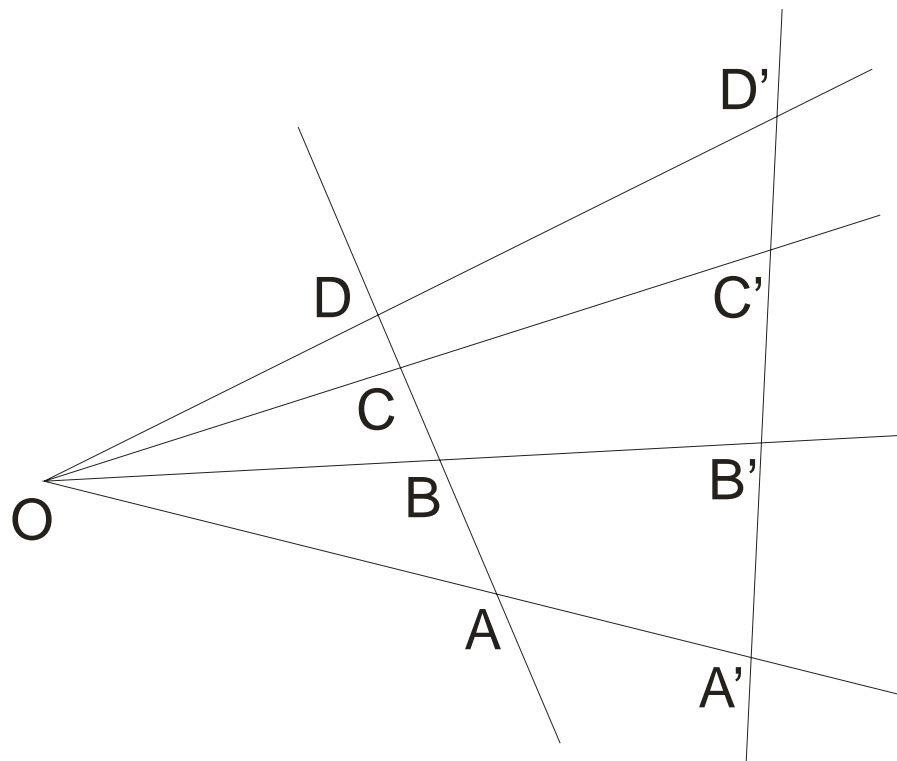
$$p_i = \begin{bmatrix} x_i \\ w_i \end{bmatrix}, i = 1..4$$

A razão cruzada C é definida como

$$C(1,2,3,4) = \frac{d(1,2)d(3,4)}{d(1,3)d(2,4)}, \text{ onde } d(i, j) = \frac{x_i}{w_i} - \frac{x_j}{w_j}$$

e o determinante $D(i, j) = \begin{vmatrix} p_i & p_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ w_i & w_j \end{vmatrix} = w_i w_j d(i, j)$

A razão cruzada é invariante a transformações projetivas de P^1 em P^1 .



$$C(A, B, C, D) = \frac{d(A, B)d(C, D)}{d(A, C)d(B, D)}$$

Para a transformação projetiva T .

$$p'_i = T \cdot p_i$$

$$d'(i, j) = |p'_i p'_j| = |T| \cdot |p_i p_j| = d(i, j) \cdot |T|$$

$$\mathbf{C}'(1,2,3,4) = \frac{D'(1,2)D'(3,4)}{D'(1,3)D'(2,4)} = \frac{w_1 w_2 d(1,2) w_3 w_4 d(3,4) |T|^2}{w_1 w_3 d(1,3) w_2 w_4 d(2,4) |T|^2} = \mathbf{C}(1,2,3,4)$$

Se λ é a razão cruzada de 4 pontos, as razões cruzadas das outras 23 permutações

dos 4 pontos serão $\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1 - \lambda, \frac{1}{1 - \lambda}, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{\lambda - 1}{\lambda}$