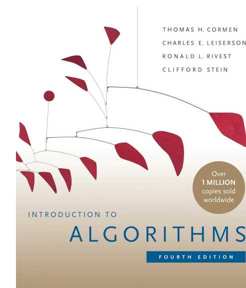
CT-234

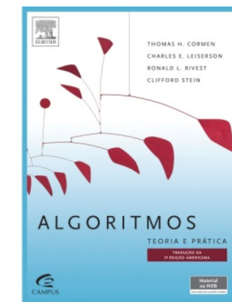
Estruturas de Dados, Análise de Algoritmos e Complexidade Estrutural

Carlos Alberto Alonso Sanches

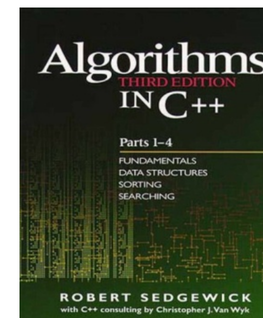
Bibliografia

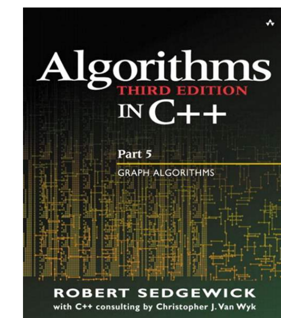
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein
  Introduction to algorithms



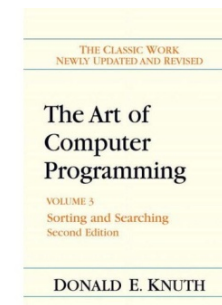


- R. Sedgewick and K. Wayne
  Algorithms





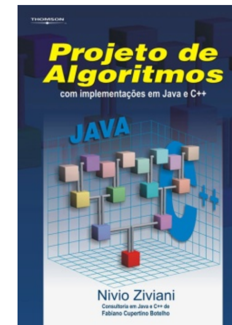
- D.E. Knuth
  The art of computer programming
  Vol. 3: *Sorting and searching*



Bibliografia complementar

- A. Drozdek
  Estrutura de dados e algoritmos em C++

- N. Ziviani
  Projeto de Algoritmos



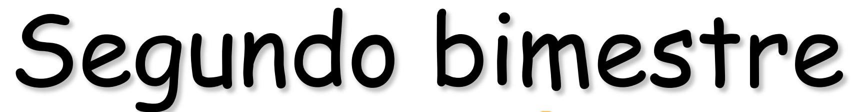
- Aulas de P. Feofiloff
  www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/lectures.html

- Simulação de algoritmos
  www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html
  www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr10/cos226/lectures.html
  www.jasonpark.me/AlgorithmVisualizer/?ref=producthunt

- Ordem de funções (Capítulo 1)
- Algoritmos recursivos (Capítulo 2)
- Estruturas de dados elementares (Capítulo 3)
- Árvores balanceadas (Capítulo 4)
- Ordenação (Capítulos 5 e 6)

- Lista de exercícios: 1 a 24

http://www.comp.ita.br/~alonso/ensino.html

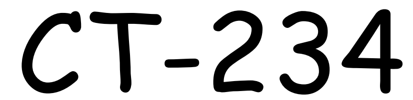


Segundo bimestre

- Busca de padrões (Capítulo 7)
- Algoritmos em grafos (Capítulos 8 e 9)
- Paradigmas de programação (Capítulo 10)
- Algoritmos paralelos (Capítulo 11)

- Lista de exercícios: 25 a 50

alonso@ita.br, sala 112 (Ele/Comp), ramal 5985

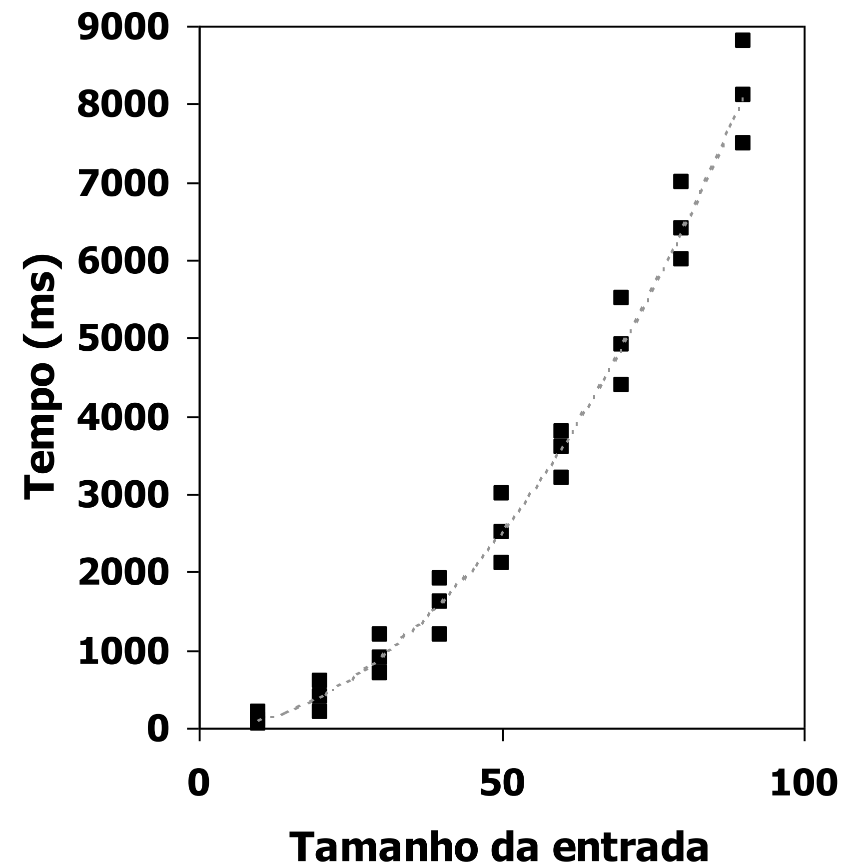


1) Ordem de funções

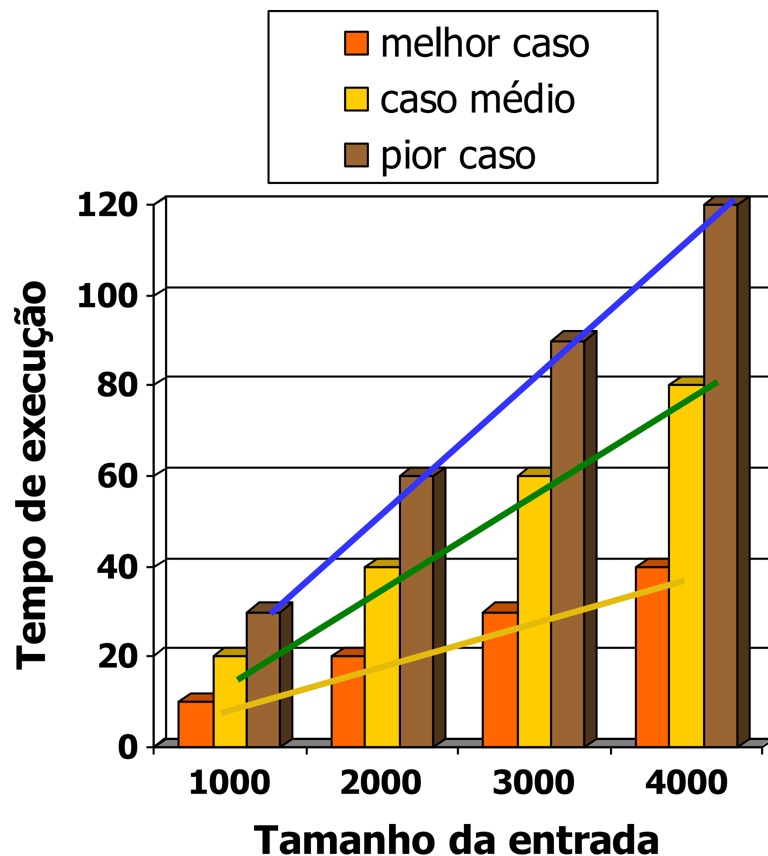
Notação O (*Big-Oh*) e similares

Resultados experimentais

- Para resolver um problema, implemente um determinado algoritmo.
- Execute esse programa com diversas instâncias do problema (entradas com *valores* e *tamanhos* variados).
- Meça o tempo real dessas execuções.
- Desenhe um gráfico com os resultados obtidos.



Tempo de execução



- O tempo de execução de um algoritmo varia (e normalmente cresce) com o tamanho da entrada do problema.
- Além disso, para instâncias de mesmo tamanho, também há variação no tempo de execução.
- Geralmente, o tempo médio é difícil de determinar.
- Costuma-se estudar os tempos máximos (pior caso):
  - é mais fácil de analisar;
  - é crucial para a qualidade das aplicações.
- Um possível inconveniente: quando o pior caso for uma exceção...

Análise teórica de complexidade

- Leva em consideração todas as possíveis entradas.

- Permite a avaliação do desempenho de um algoritmo, independentemente das características do *hardware* e do *software* utilizados.

Operações primitivas

- De modo geral, são as computações básicas realizadas por um algoritmo:
  - Atribuição de valor para uma variável
  - Comparação entre valores
  - Cálculo aritmético
  - Chamada de função
  - etc.
- Sua definição exata não é importante.
- Apesar de serem obviamente diferentes, são contabilizadas como *tempo unitário*.

Variáveis indexadas

- Exemplo: um vetor de inteiros
- int A[1:10]   (Obs: índice *low* costuma ser 0)
- @A[i] = @A + (i - low) . sizeof(A[1])

Endereço base

Quase sempre é uma potência de 2, conhecida em tempo de compilação (nesse caso, usam-se *shifts* para acelerar o cálculo)

Quando *low* é 0, acesso torna-se mais rápido (economiza-se uma subtração)

Cálculo em tempo constante

Exemplo de contagem

- O programa abaixo encontra o maior valor em um vetor de tamanho n:

```
int arrayMax (int A[], int n)
{
   currentMax = A[0];
   for (i=1; i<n; i++) {
         if (A[i] > currentMax)
            currentMax = A[i];
   }
   return currentMax;
}
```

1 atribuição e 1 indexação,
1 atribuição
repete n-1 vezes [1 teste,
1 indexação e 1 teste,
1 atribuição e 1 indexação
(no máximo),
1 incremento]
1 teste,
1 return

Total: 5 + (n-1).6 = **6n-1**

- Inspecionando o código, podemos calcular, em função de n, o *número máximo de operações primitivas executadas.*

Estimativa do tempo de execução

- No pior caso, o algoritmo **arrayMax** executa 6n-1 operações primitivas.
- Definições:
  - *a*: tempo gasto na execução da operação primitiva mais rápida
  - *b*: tempo gasto na execução da operação primitiva mais lenta
- Seja T(n) o tempo real de execução de pior caso de **arrayMax**.
- Portanto, $a.(6n-1) \leq T(n) \leq b.(6n-1)$
- T(n) é limitado por duas funções lineares.

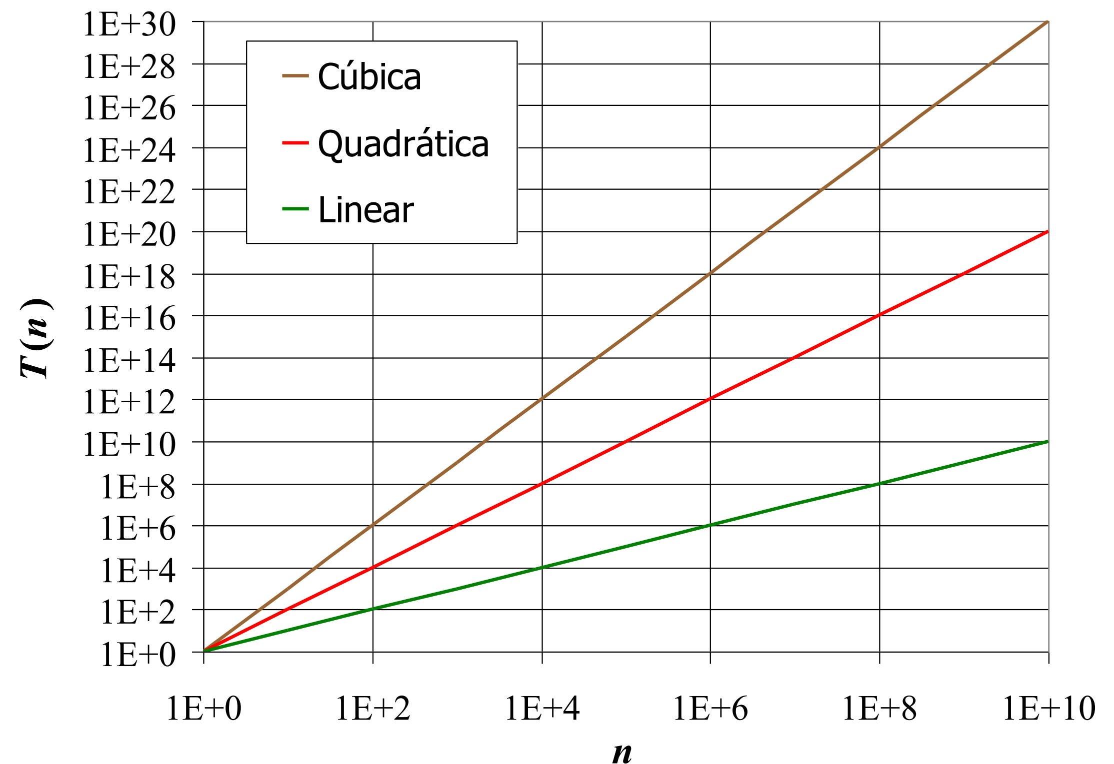
Taxa de crescimento do tempo de execução

- Alterações nos ambientes de *hardware* ou *software*:
  - afetam T(n) apenas por um fator constante;
  - não alteram a taxa de crescimento de T(n): continua linear!
- Portanto, a linearidade de T(n) é uma propriedade intrínseca do algoritmo **`arrayMax`**.
- Cada algoritmo tem uma taxa de crescimento do pior caso que lhe é intrínseca.
- O que varia, de ambiente para ambiente, é somente o tempo absoluto de cada execução, que depende de fatores relacionados com o *hardware* e o *software* utilizados.

Taxas de crescimento

- Exemplos de taxas de crescimento:
  - Linear ≈ n
  - Quadrática ≈ n^2
  - Cúbica ≈ n^3

- No gráfico *log-log* ao lado, a inclinação da reta corresponde à taxa de crescimento da função.



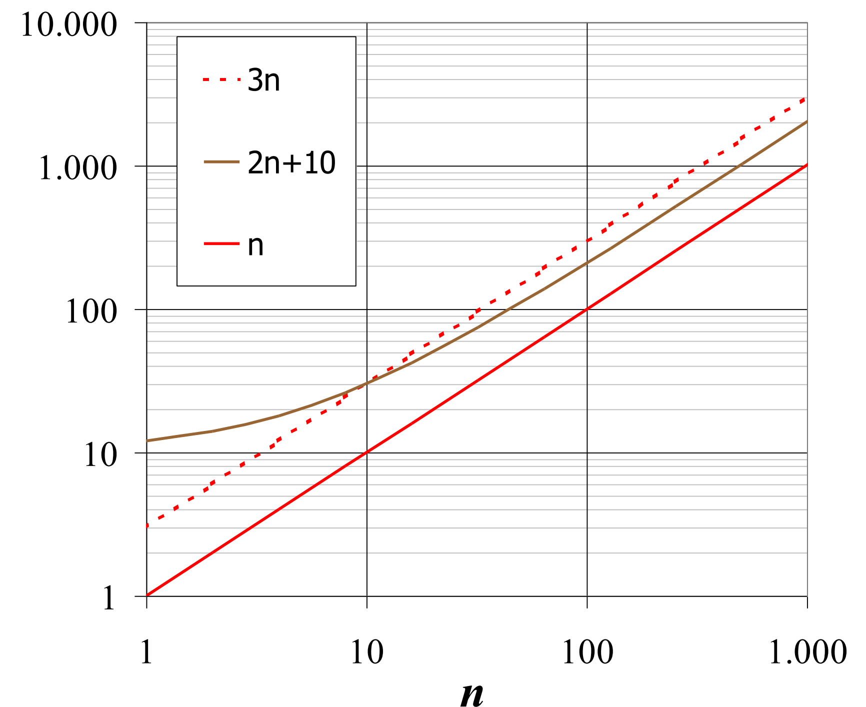
Taxas de crescimento

- A taxa de crescimento não é afetada por:
  - fatores constantes;
  - fatores de ordem mais baixa.

- Exemplos:
  - $10^2 n + 10^5$: é uma função linear
  - $10^5 n^2 + 10^8 n$: é uma função quadrática
  - $10^{-9} n^3 + 10^{20} n^2$: é uma função cúbica

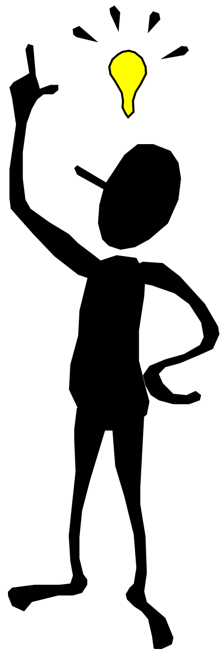
Notação O (*Big-Oh*)

- Dadas as funções f(n) e g(n), dizemos que f(n) é O(g(n)) se existem duas constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \leq c.g(n), \forall n \geq n_0$
- Exemplo: 2n + 10 é O(n)
  - $2n + 10 \leq cn$
  - $(c - 2)n \geq 10$
  - $n \geq 10/(c - 2)$
  - Uma possível escolha: $c = 3$ e $n_0 = 10$



Basta que essas constantes existam!

Lembretes sobre a notação O



Uma função f(n) é O(g(n)) se,
para todo n suficientemente grande,
f(n) não é maior que c.g(n), onde $c > 0$

"f(n) é O(g(n))" ou "f(n) = O(g(n))"
na realidade significam "$f(n) \in O(g(n))$"

Abuso de linguagem

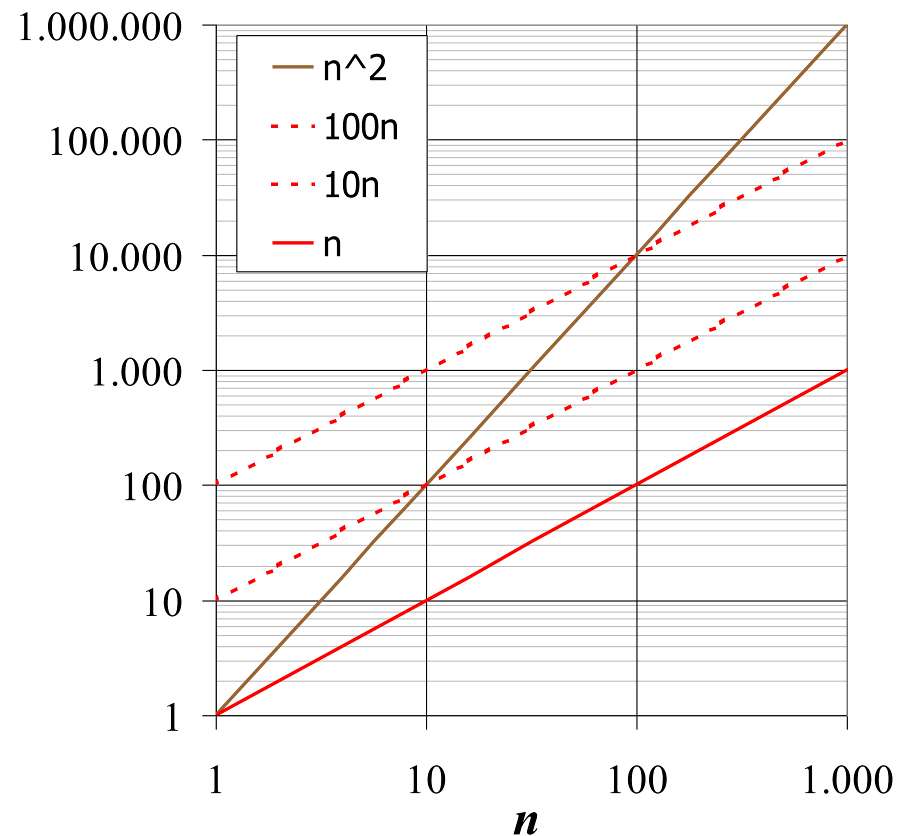
- No uso da notação O, costuma ocorrer um "abuso de linguagem": o sinal de igualdade não tem o seu significado habitual.

$10\ n^2 + 10 \log n = O(n^2)$

$2\ n^2 - 3 = O(n^2)$

Outro exemplo

- n^2 não é $O(n)$
  - $n^2 \leq cn$
  - $n \leq c$
- A inequação acima não pode ser sempre satisfeita, pois c é uma constante e n não...
- Qualquer c escolhido poderia ser superado por n: basta escolher $n_0 = c+1$



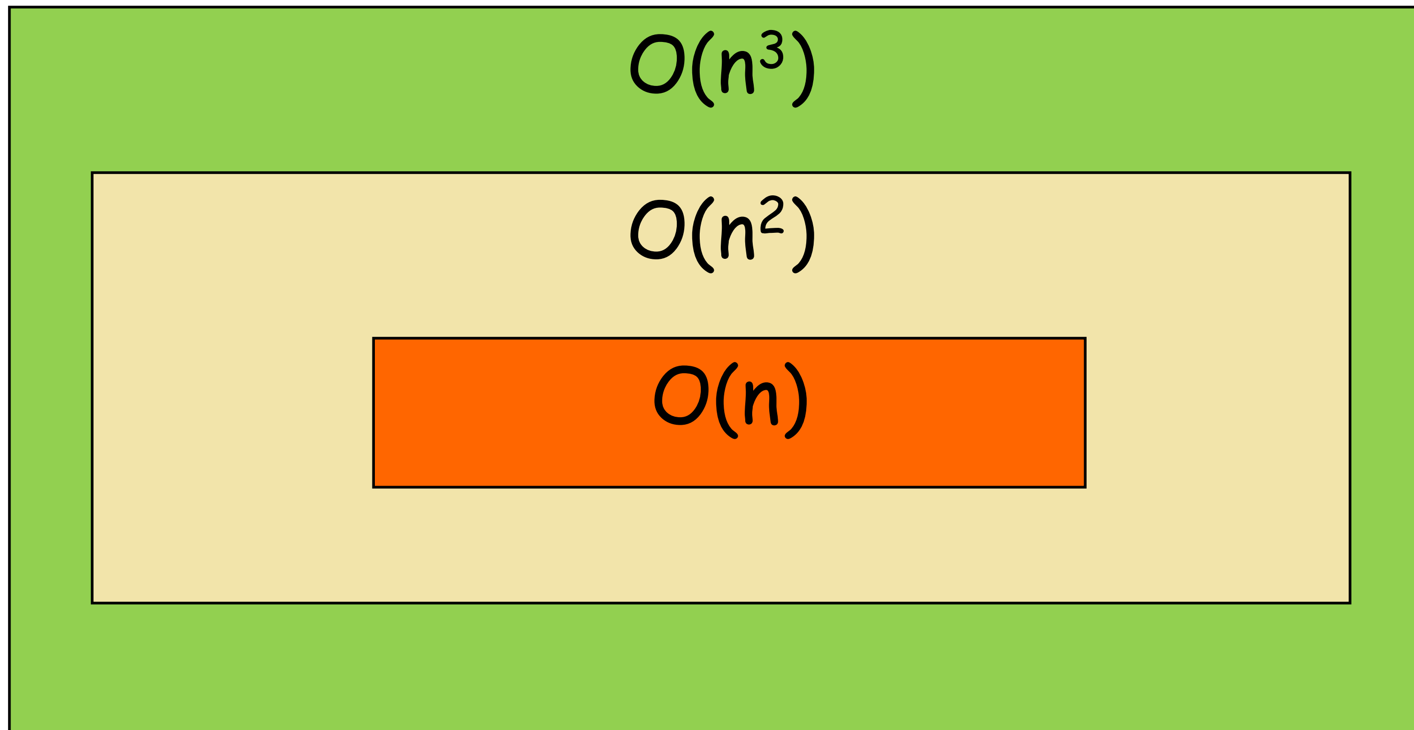
A notação O e a taxa de crescimento

- A notação O fornece um *limite superior* para a taxa de crescimento de uma determinada função.
- A afirmação "f(n) é O(g(n))" significa que a taxa de crescimento de f(n) não é maior que a de g(n).
- A notação O permite ordenar as funções de acordo com as suas correspondentes taxas de crescimento.

	f(n) é O(g(n))?	g(n) é O(f(n))?
Se g(n) cresce mais que f(n):	Sim	Não
Se f(n) cresce mais que g(n):	Não	Sim
Se f(n) e g(n) têm a mesma taxa:	Sim	Sim

Funções polinomiais

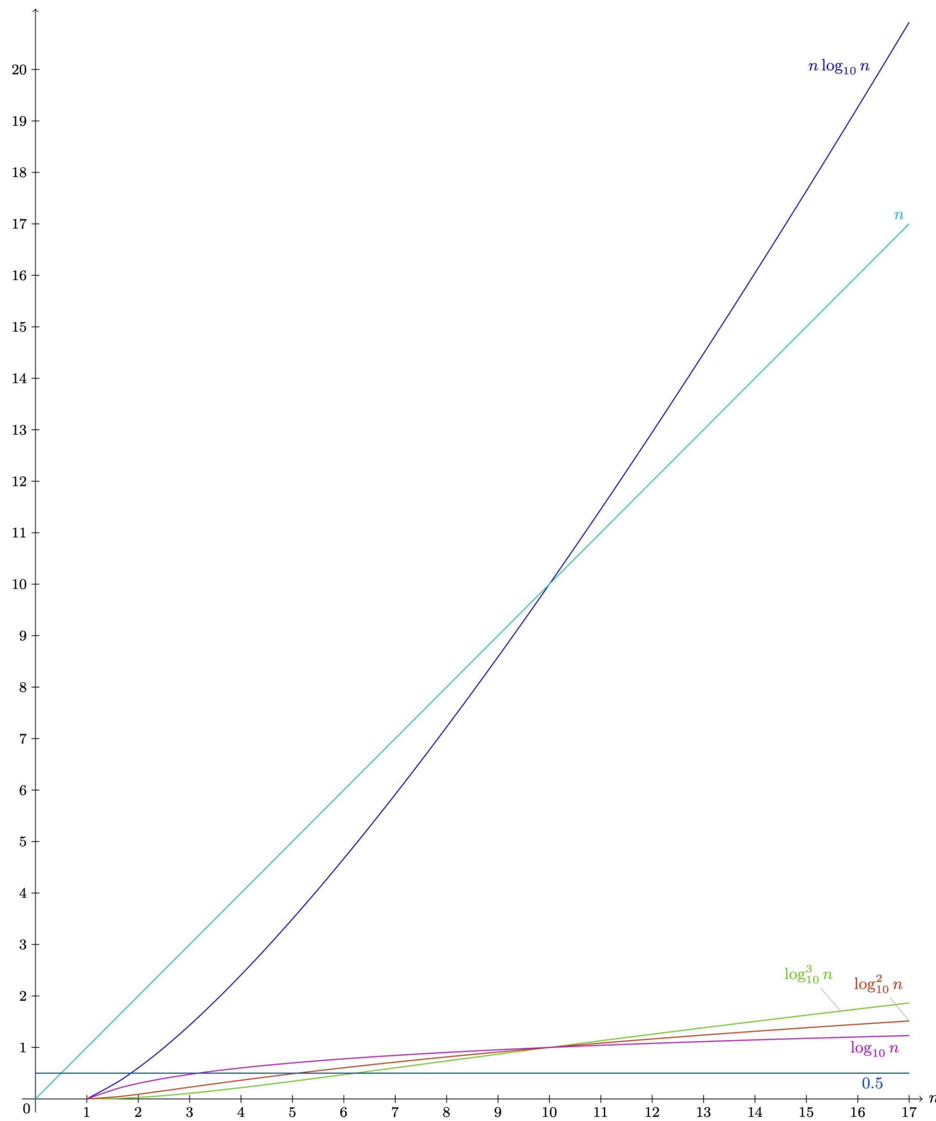
Com relação às funções polinomiais, é possível concluir que $O(n) \subset O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(n^4) \subset O(n^5) \subset \ldots$

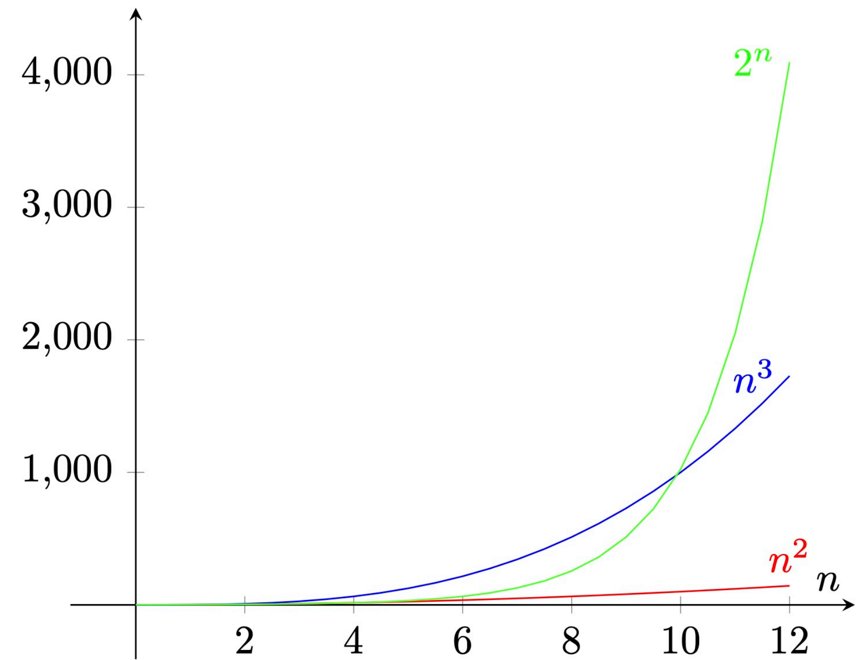


Algumas dicas sobre a notação O

- No uso da notação O, consideramos apenas valores suficientemente grandes de n, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$
  - Outro possível inconveniente: esses casos podem não ser viáveis na prática...
- Se p(n) é um polinômio de grau k, então p(n) é $O(n^k)$
  - Pode-se descartar seus termos de menor ordem, inclusive as constantes.
- Convém utilizar termos simples de menor ordem:
  - "2n é O(n)" é preferível a "2n é $O(n^2)$"
  - "3n + 5 é O(n)" é preferível a "3n + 5 é O(3n)"

Comparações entre algumas funções





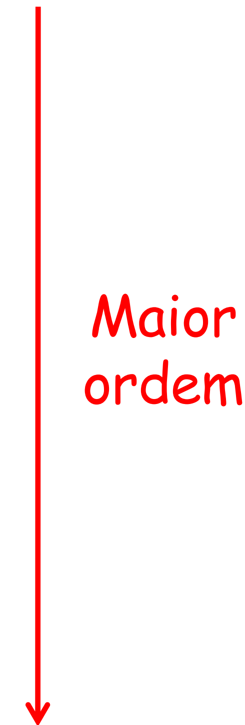
Exemplos

Function			
$6n^4 + 12n^3 + 12$	$\in O(n^4)$	$\in O(n^5)$	$\notin O(n^3)$
$3n^2 + 12n.\log n$	$\in O(n^2)$	$\in O(n^4)$	$\notin O(n.\log n)$
$5n^2 + n(\log n)^2 + 12$	$\in O(n^2)$	$\in O(n^3)$	$\notin O(n.\log^9 n)$
$\log n + 4$	$\in O(\log n)$	$\in O(n)$	
$\log^k n, k>1$	$\in O(n)$	$\notin O(\log n)$	

Hierarquia entre funções

- A partir da notação O, é possível estabelecer uma hierarquia entre as funções:

Constante	$O(1)$
Logarítmica	$O(\log n)$
Linear	$O(n)$
n.log n	$O(n.\log n)$
Quadrática	$O(n^2)$
Cúbica	$O(n^3)$
Polinomial	$O(n^k)$, com $k \geq 4$
Exponencial	$O(k^n)$, com $k > 1$



Evidentemente, as funções lineares, quadráticas e cúbicas também são polinomiais ...

Análise assintótica

- A análise assintótica descreve o tempo de pior caso dos algoritmos em notação O.
- Para realizar a análise assintótica de um algoritmo:
  - Calcula-se o número de operações primitivas executadas como função do tamanho da entrada.
  - Expressa-se esta função na notação O.
- Exemplo:
  - O algoritmo **`arrayMax`** executa no máximo 6n-1 operações primitivas.
  - Dizemos que o tempo de pior caso do algoritmo **`arrayMax`** é O(n), ou seja, sua complexidade de tempo é linear.

Notação O na análise de algoritmos

- Em comandos condicionais, o tempo total corresponde à execução do teste mais o tempo do bloco mais lento.

```
if (x == y)
  doSomething();
else
  doSomethingElse();
```

- Chamadas de funções: corresponde ao *tempo de execução da função chamada* (não ao tempo da chamada em si, que é descartado).

Notação O na análise de algoritmos

- Em comandos consecutivos, somam-se os tempos:

```
for (int x=1; x <= n; x++)
  <operação primitiva qualquer>;
```

$O(n)$

```
for (int x=1; x <= n; x++)
  for (int y=1; y <= n; y++)
    <operação primitiva qualquer>;
```

$O(n^2)$

- Tempo total: $O(n) + O(n^2) = O(n^2)$
- E se o laço **`for`** mais interno começasse com **`y=x`**?
- Qual o tempo total gasto pelo laço abaixo?

```
for (int x=1, int y=1; y <= n; x++) {
  <operação primitiva qualquer>;
  if (x==n) { y++; x=1; }
}
```

$O(n^2)$

- Elabore um algoritmo paralelo para encontrar o maior valor presente em um vetor de n posições.
  - Dica: utilize n processadores.
- Qual a complexidade de tempo desse algoritmo?
- Haveria outros algoritmos mais eficientes ou que utilizassem menos processadores?
  - Dica: divida o vetor em blocos de tamanho O(log n) e utilize um processador em cada bloco.

Limites inferiores

- Enquanto a notação O fornece um limite superior (ou teto assintótico) para o crescimento das funções, também há outras notações que oferecem mais informações interessantes.
- Seja $\Omega(g(n))$ o conjunto de funções $f(n)$ para as quais existem constantes positivas c e n_0 tais que $f(n) \geq c.g(n), \forall n \geq n_0$.
- A notação Ω fornece um limite inferior (ou piso assintótico) para o crescimento das funções.

Exemplos

- $f(n) = 12n^2 - 10 \in \Omega(1)$
- $f(n) = 12n^2 - 10 \in \Omega(n)$
- $f(n) = 12n^2 - 10 \in \Omega(n^2)$
- Entretanto, $f(n) = 12n^2 - 10 \notin \Omega(n^3)$

Notação Ω na prática

- Na notação Ω, convém utilizar a maior função possível:

É correto dizer que $f(n) = 3n^2 + 10$ é $\Omega(1)$,
mas representa pouca coisa sobre f(n)...

- Analogamente, $f(n) = \Omega(g(n))$ significa que $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Limites inferiores e superiores

- Quando uma função $f(n)$ pertence simultaneamente a $O(g(n))$ e a $\Omega(g(n))$, dizemos que $f(n) \in \Theta(g(n))$.

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in (O(g(n)) \cap \Omega(g(n)))$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in O(g(n)) \text{ e } g(n) \in O(f(n))$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \Omega(g(n)) \text{ e } g(n) \in \Omega(f(n))$$

Mais precisamente, $\Theta(g(n))$ é o conjunto de todas as funções $f(n)$ para as quais existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que:

$$c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n),\ \forall n \geq n_0$$

Análise assintótica de funções

- Basicamente, podemos dizer que $f(n)$ é $\Theta(g(n))$ se e somente se:

$$\lim_{n \to \infty} (f(n)/g(n)) = c, \text{ onde } c > 0$$

- Por outro lado:
  - Se $\lim_{n \to \infty} (f(n)/g(n)) = 1$, dizemos que $f(n) \sim g(n)$
  - Se $\lim_{n \to \infty} (f(n)/g(n)) = 0$, dizemos que $f(n)$ é $o(g(n))$
  - Se $\lim_{n \to \infty} (f(n)/g(n)) = \infty$, dizemos que $f(n)$ é $\omega(g(n))$

Análise assintótica de funções

- É possível fazer uma *analogia* entre a comparação assintótica de duas funções *f* e *g* e a comparação de dois números reais *a* e *b*.

$f(n) = O(g(n))$	$\approx$	$a \leq b$
$f(n) = \Omega(g(n))$	$\approx$	$a \geq b$
$f(n) = \Theta(g(n))$	$\approx$	$a = b$
$f(n) = o(g(n))$	$\approx$	$a < b$
$f(n) = \omega(g(n))$	$\approx$	$a > b$

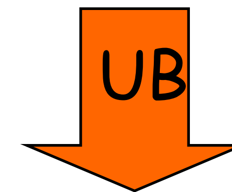
Alguns exemplos

$6n^4 + 12n^3 + 12$	$\in \Theta(n^4)$	$\in o(n^5)$	$\notin \omega(n^5)$
$3n^2 + 12n.\log n$	$\in \Theta(n^2)$	$\in \Omega(n)$	$\notin O(n.\log n)$
$5n^2 + n(\log n)^2 + 12$	$\in \Theta(n^2)$	$\in \omega(n.\log^2 n)$	$\notin \Omega(n^3)$
$\log n + 4$	$\in \Theta(\log n)$	$\notin o(\log n)$	
$\log^k n,\ k>1$	$\notin \Theta(n)$	$\in o(n)$	

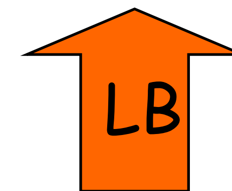
Lower e upper bounds

- Dado um determinado problema P, chamamos de:
  - **UB(P)** ou *upper bound* de P: a complexidade do melhor algoritmo conhecido que o resolve.
  - **LB(P)** ou *lower bound* de P: a complexidade mínima necessária em qualquer de suas resoluções.

Deseja-se:



Limite prático



Limite teórico

- Um problema P pode ser considerado computacionalmente resolvido se $UB(P) \in \Theta(LB(P))$

Conclusões finais

- Na análise de complexidade de um algoritmo, estamos mais interessados no seu comportamento geral que em outros detalhes (que dependem da máquina, do sistema operacional, da linguagem ou dos compiladores, etc.).
- Procura-se medir a complexidade de um algoritmo em função de um parâmetro do problema, que geralmente é o tamanho da sua entrada.
- O que se costuma considerar é o comportamento assintótica do tempo de pior caso dos algoritmos executados em máquinas que operam no tradicional modelo de acesso aleatório.