
Utilização de uma rede neural LSTM e testes da razão da variância para previsões em séries de ativos da Bovespa

Caio Mário Mesquita, Renato Oliveira, Adriano César Machado Pereira

Departamento de Ciência da Computação (DCC)

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Belo Horizonte, Brasil

caiboninho@gmail.com

7renato@outlook.com

adrianoc@dcc.ufmg.br

1 - Introdução

- Mercado financeiro
 - Séries financeiras - Bachelier , “The Theory of Speculation”, 1900 - probabilidade nas séries, movimento browniano
 - Problema em aberto
- Hipótese do passeio aleatório
 - Lo e MacKinley “Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence From a Simple Specification Test” , 1988
 - Wright ,”Alternative variance-ratio tests using ranks and signs”, 2000;
 - Exemplos de aplicação:
 - Hafiz e Hoque , "A comparison of variance ratio tests of random walk: A case of Asian emerging stock markets", 2007
 - Kim e Shamsuddin, "Are Asian stock markets efficient? Evidence from new multiple variance ratio tests", 2008

1 - Introdução

- Dias atuais
 - Informatização dos processos, aumento do poder computacional e memória
 - Modelos complexos: aprendizado de máquina
- LSTM como modelo de previsão em séries financeiras
 - Chen e Zhou, “A LSTM-based method for stock returns prediction: A case study of China stock market,” 2015
 - Zhao, “Time-Weighted LSTM Model with Redefined Labeling for Stock Trend Prediction,” 2017
 - Shao e Liu, “Short-term forecast of stock price of multi-branch LSTM based of K-means,” 2017
 - Yao e Luo, “High-Frequency Stock Trend Forecast Using LSTM Model,” 2018

2 - Objetivos

1. Aplicação de uma rede neural LSTM para previsão das séries financeiras e elaboração de estratégias de operação no mercado
2. Analisar a relação entre o desempenho da previsão com resultados de diferentes testes da razão da variância
 - Hipótese: as séries do conjunto de treinamento que rejeitam a hipótese de passeio aleatório terão melhores resultados de classificação

3 - Fundamentação - Rede neural LSTM

- Hochreiter, Sepp and Schmidhuber, Jürgen, “Long short-term memory” , 1997
- Redes neurais recorrentes com retroalimentação
- Utiliza portas (*gates*) capazes de modificar a informação no tempo
- Processamento de dados sequencias
- Aplicada em diversos problemas (linguagem, tradução, análise de sentimento, séries temporais)

3 - Fundamentação - Teste da razão da variância

Hipótese i.i.d:

$$M1(N) = \frac{VR(r, N) - 1}{\phi(N)^{0.5}}$$

$$R1(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{1,t} + \dots + q_{1,t-N+1})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{1t})^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

$$R2(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{2,t} + \dots + q_{2,t-N+1})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{2t})^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

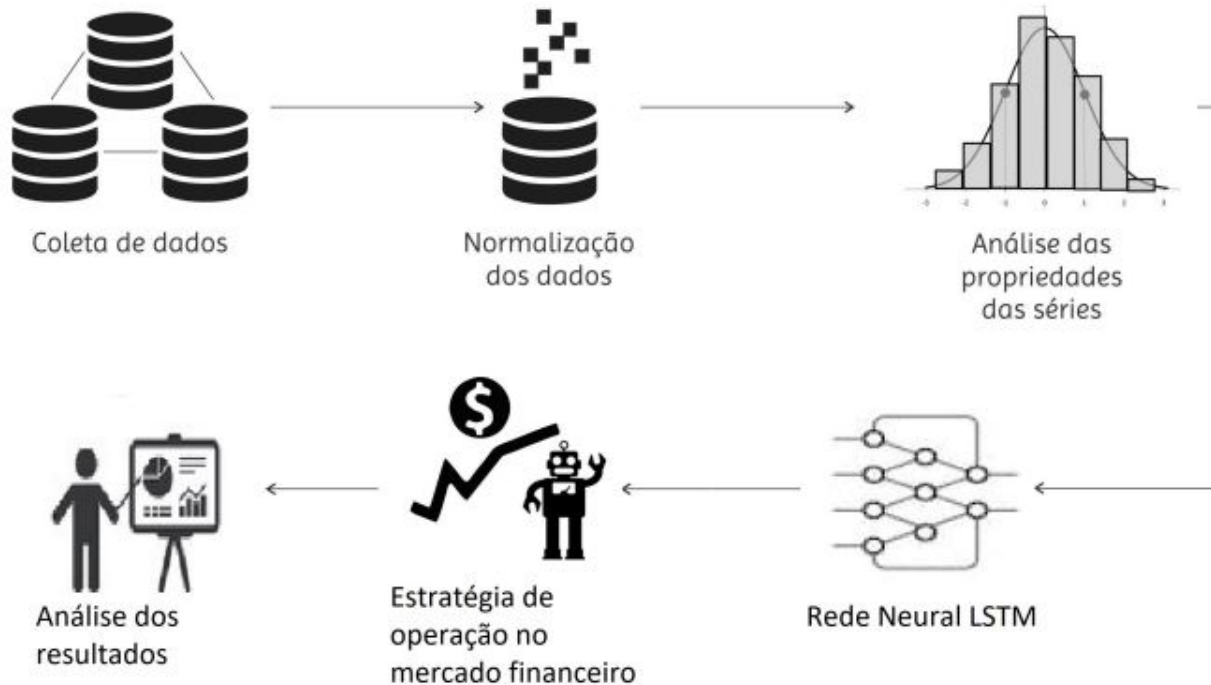
Hipótese de heterocedasticidade:

$$M2(N) = \frac{VR(r, N) - 1}{\phi^*(N)^{0.5}}$$

$$S1(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t + \dots + s_{t-N+1})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t)^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

$$S2(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t(\bar{u}) + \dots + s_{t-N+1}(\bar{u}))^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t(\bar{u}))^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

4 - Metodologia



4 - Metodologia - Etapa 1: Coleta de dados

- Séries históricas dos preços de fechamentos diários de 10 ações da Bovespa
 - AmBev (ABEV3), Bradespar (BRAP4), BRF (BRFS3), Companhia Energética de Minas Gerais (CMIG4), Companhia Paulista de Força e Luz (CPFE3), Engie Brasil (EGIE3), Eletrobras (ELET3), JBS (JBSS3), Multiplan (MULT3) e Petrobras (PETR3)
- Ano de 2016 (250 dias)
- Conjunto de treinamento (Janeiro a Agosto - 166 dias) X Conjunto de teste (Setembro a Dezembro - 84 dias)
- Dados obtidos pelo website da Bovespa

http://www.bmfbovespa.com.br/pt_br/servicos/market-data/historico/mercado-a-vista/cotacoes-historicas/

4 - Metodologia - Etapa 2: Normalização das séries

- Séries de preço são mais difíceis de trabalhar: não são estacionárias, variância aumenta ao longo do tempo, contém a inflação. (Taylor, “Asset Price Dynamics, Volatility and Prediction,” 2007)
- Normalização por meio do logaritmo do retorno financeiro
 - $x_t = \log(p_t) - \log(p_{t-1})$
 - Resultados obtidos pelo log retorno podem ser utilizados para fornecer o preço original

4 - Metodologia - Etapa 3: Análise estatística

- Utilização dos conjuntos de treinamento (166 dias)
- Momentos, teste das distribuições serem normais
- Aplicação de 5 testes da razão da variância
 - Estatísticas M1, M2, R1, R2 e S1
- Utilização do software R juntamente com os pacotes *moments*, *vrtest*, *tseries*

4 - Metodologia - Etapa 4: Aplicação rede neural LSTM

- Modelagem de um problema de classificação
 - Classe 1 (Altas) : tendência de subida, valores maiores ou iguais a zero
 - Classe 0 (Baixas): tendência de descida, valores menores que zero
- Divisão do conjunto de treinamento X teste: ($\frac{2}{3}$ X $\frac{1}{3}$)
- Implementação da rede LSTM
 - Entrada : 4 entradas referentes aos quatro últimos valores
 - Primeira camada: 125 células LSTM
 - Segunda camada: 75 células LSTM
 - Terceira camada: 1 célula LSTM com função de ativação sigmóide (saída [0,1])
 - Parâmetros : regularizador L1 e L2 com valores de 0.005, treinamento utiliza otimizador adagrad e função de perda entropia cruzada binária
 - Utilização da linguagem *python* juntamente com as bibliotecas *keras* e *tensorflow*

4 - Metodologia - Etapa 5: Estratégia de operação

- Utiliza as classificações obtidas pela LSTM de cada dia futuro
 - Classe 1: ordem de compra no instante atual e uma ordem de venda no próximo dia
 - Classe 0: ordem de venda no instante atual e uma ordem de compra no próximo dia
- Para cada dia futuro é realizada uma negociação

4 - Metodologia - Etapa 6: Análise dos resultados

- Métricas de classificação
 - Precisão (P): Acertos da classe / total de previsões da classe
 - Revocação (R): Acertos da classe / total de ocorrências existentes da classe
 - F1: Média harmônica entre P e R
 - Acurácia (A): Classificações corretas / total de previsões
- Retorno financeiro: Comparação com aleatório e *Buy and Hold*

$$P = \frac{TP}{TP + FP} \quad R = \frac{TP}{TP + FN} \quad F1 = 2 * \frac{P * R}{P + R} \quad A = \frac{TP + TN}{TP + FP + TN + FN}$$

4 - Metodologia - Etapa 6: Análise dos resultados

- Custos de Operação
 - Imposto de Renda recolhido na fonte: (0.5%)
 - Taxa de corretagem sobre as operações (R\$ 2.50)
 - Imposto sobre serviços em relação a taxa de corretagem (0.12%)
 - Emolumentos sobre o valor investido (0.025%)
 - Em caso de lucro é cobrado também o Imposto de Renda recolhido pelo investidor sobre o lucro (20%)
- O percentual correspondente a soma de todos os custos pode ser alto em relação ao retorno financeiro

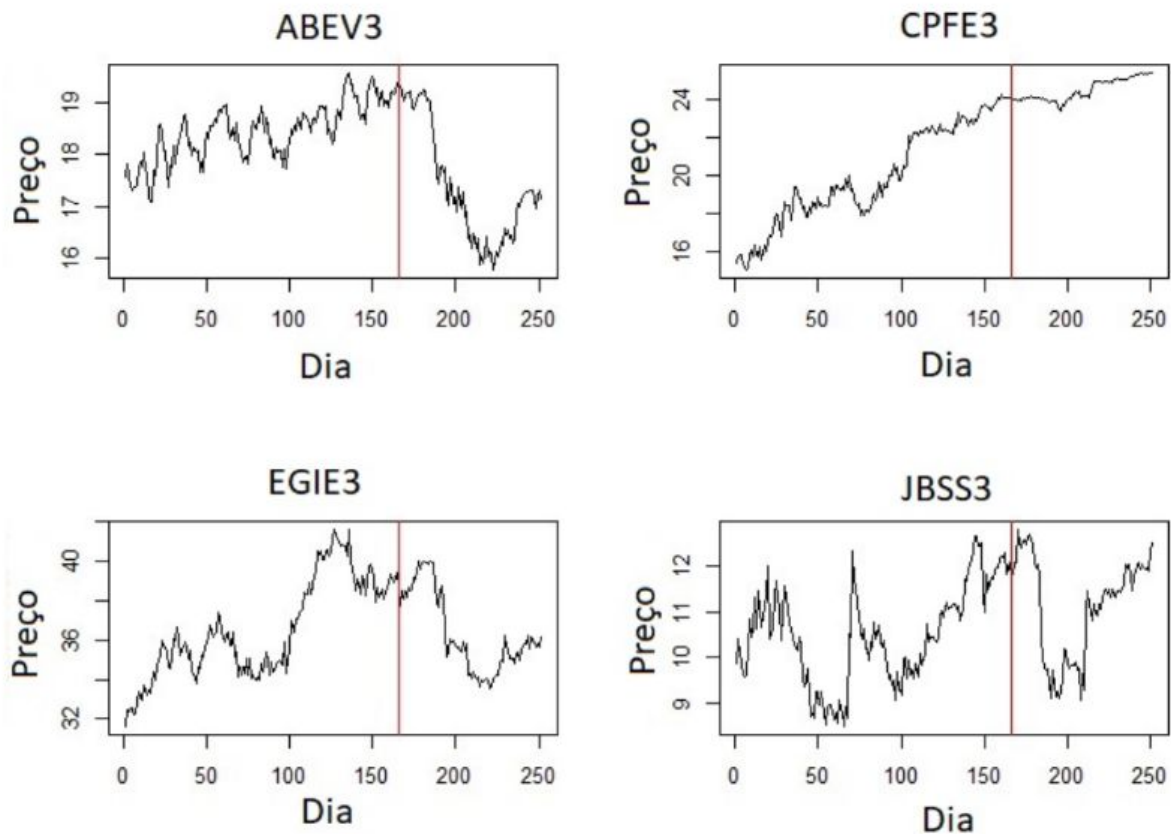


Figura 2. Séries originais dos preços de ABEV3, CPFE3, EGIE3 e JBSS3

5 - Resultados - Momentos e Distribuição

- Distribuições simétricas
- Média ~ 0
- Desvio : 0.01 a 0.04
- 5 ações rejeitam a hipótese de distribuição normal
- Tamanho da amostra pequeno (166)

Tabela I

4 PRIMEIROS MOMENTOS DAS SÉRIES E TESTE DE JARQUE-BERA

Ações	Média	Desvio	Curtose	Assimetria	JB
ABEV3	5e-4	0.01	3.00	0.16	0.66
BRAP4	6e-3	0.04	3.14	0.01	0.91
BRFS3	8e-4	0.01	5.93	-0.26	2e-16
CMIG4	3e-3	0.03	3.51	0.34	0.05
CPFE3	2e-3	0.01	3.87	0.53	8e-3
EGIE3	1e-3	0.01	3.18	-0.25	0.29
ELET3	7e-3	0.03	3.79	0.58	0.01
JBSS3	1e-3	0.03	7.71	0.86	2e-16
MULT3	2e-3	0.01	3.06	0.33	0.15
PETR3	5e-3	0.03	3.56	0.26	0.08

5 - Resultados - Teste da Razão da Variância

- Ações destacadas: ABEV3, CPFE3, EGIE3, JBSS3
- Valores críticos para N = 2, N = 5 e N = 20:
 - R1: -2.161, -2.020, -1.768
 - R2: -2.145, -1.985, -1.727
 - S1: -2.017, -1.898, -1.674

Tabela II
TESTES DA RAZÃO DA VARIÂNCIA PARA N = 2

Ações	N = 2				
	R1	R2	S1	M1	M2
ABEV3	-2.22*	-1.81	-2.24*	-1.70	-1.75
BRAP4	-0.39	-0.42	-0.54	-0.36	-0.30
BRFS3	-0.01	-0.57	0.38	-1.36	-1.15
CMIG4	-0.81	-0.71	-0.85	-0.68	-0.65
CPFE3	-3.30*	-2.84*	-3.17*	-2.28*	-1.97*
EGIE3	-3.47*	-3.83*	-1.47	-3.76*	-3.40*
ELET3	0.10	1.02	-0.23	1.35	1.21
JBSS3	-3.09*	-3.19*	-2.08*	-2.96*	-2.98*
MULT3	-0.94	-0.86	-0.85	-0.69	-0.71
PETR3	-1.74	-1.47	-1.47	-1.30	-1.14

Tabela III
TESTES DA RAZÃO DA VARIÂNCIA PARA N = 5

Ações	N = 5				
	R1	R2	S1	M1	M2
ABEV3	-1.22	-0.79	-1.41	-0.62	-0.60
BRAP4	-0.89	-0.94	-0.16	-0.97	-0.85
BRFS3	-0.72	-0.99	-0.50	-1.46	-1.35
CMIG4	-0.34	-0.19	-1.58	-0.20	-0.20
CPFE3	-2.80*	-2.72*	-2.48*	-2.46*	-2.14*
EGIE3	-2.50*	-2.56*	-1.52	-2.37*	-2.21*
ELET3	0.56	1.20	1.35	1.60	1.50
JBSS3	-2.15*	-2.51*	-0.62	-1.99*	-1.52
MULT3	-1.35	-1.61	-0.73	-1.46	-1.52
PETR3	-1.43	-1.26	-0.96	-1.16	-1.09

Tabela IV
TESTES DA RAZÃO DA VARIÂNCIA PARA N = 20

Ações	N = 20				
	R1	R2	S1	M1	M2
ABEV3	-2.15*	-2.12*	-1.77*	-2.05*	-1.98*
BRAP4	-0.14	-0.42	1.00	-0.56	-0.51
BRFS3	-0.76	-0.89	-0.36	-1.22	-1.25
CMIG4	-0.35	0.05	-0.75	0.11	0.11
CPFE3	-1.66	-1.74*	-1.71*	-1.58	-1.37
EGIE3	-1.05	-1.00	-0.61	-0.91	-0.92
ELET3	-0.59	-0.25	0.50	-0.10	-0.09
JBSS3	-0.74	-1.16	1.46	-1.40	-1.23
MULT3	-0.72	-1.24	0.32	-1.22	-1.26
PETR3	-1.08	-0.90	-0.88	-0.69	-0.66

5 - Resultados - Métricas de Classificação

- Ganhos ao utilizar rede LSTM:

- ABEV3: 7%
- BRAP4: -1%
- BRFS3: -5%
- CMIG4: 3%
- CPFE3: 6%
- EGIE3: 6%
- ELET3: 1%
- JBSS3: 8%
- MULT3: 0%
- PETR3: -7%

Tabela V
RESULTADO DAS MÉTRICAS DE CLASSIFICAÇÃO AO UTILIZAR REDE LSTM

Ações	A	Altas			Baixas		
		P	R	F1	P	R	F1
ABEV3	0.58	0.61	0.60	0.59	0.61	0.57	0.54
BRAP4	0.50	0.54	0.47	0.50	0.46	0.54	0.50
BRFS3	0.46	0.48	0.52	0.47	0.49	0.49	0.49
CMIG4	0.53	0.52	0.50	0.51	0.52	0.54	0.52
CPFE3	0.58	0.67	0.54	0.59	0.49	0.69	0.55
EGIE3	0.59	0.58	0.65	0.61	0.61	0.51	0.55
ELET3	0.51	0.48	0.48	0.48	0.55	0.54	0.54
JBSS3	0.55	0.52	0.78	0.62	0.61	0.31	0.41
MULT3	0.49	0.49	0.51	0.48	0.42	0.46	0.42
PETR3	0.40	0.39	0.45	0.41	0.43	0.37	0.39

Tabela VI
RESULTADO DAS MÉTRICAS DE CLASSIFICAÇÃO AO UTILIZAR UM CLASSIFICADOR ALEATÓRIO

Ações	A	Altas			Baixas		
		P	R	F1	P	R	F1
ABEV3	0.51	0.54	0.49	0.51	0.49	0.54	0.51
BRAP4	0.51	0.55	0.49	0.52	0.47	0.53	0.50
BRFS3	0.51	0.48	0.45	0.46	0.54	0.58	0.56
CMIG4	0.50	0.48	0.49	0.48	0.52	0.50	0.50
CPFE3	0.52	0.62	0.45	0.52	0.42	0.67	0.51
EGIE3	0.53	0.53	0.48	0.50	0.53	0.59	0.56
ELET3	0.50	0.45	0.42	0.43	0.54	0.58	0.56
JBSS3	0.48	0.46	0.49	0.47	0.50	0.47	0.48
MULT3	0.49	0.51	0.43	0.47	0.47	0.55	0.51
PETR3	0.47	0.43	0.45	0.44	0.50	0.47	0.48

5 - Resultados - Retorno Financeiro (R\$)

- Melhores retornos financeiros:

- ABEV3: LSTM, Aleatorio, B&H
- BRAP4: B&H, Aleatorio, LSTM
- BRFS3: LSTM, Aleatório, B&H
- CMIG4: B&H, LSTM, Aleatório
- CPFE3: B&H, LSTM, Aleatório
- EGIE3: LSTM, Aleatório, B&H
- ELET3: B&H, Aleatorio, LSTM
- JBSS3: LSTM, B&H, Aleatório
- MULT3: Aleatório, B&H, LSTM
- PETR3: B&H, Aleatorio, LSTM

Tabela VII

RESULTADO DO RETORNO FINANCEIRO EM REAIS

Ações	BH	LSTM			Aleatório		
		Altas	Baixas	Total	Altas	Baixas	Total
ABEV3	-1.87	1.27	3.15	4.42	-0.39	1.47	1.08
BRAP4	9.76	3.87	-5.8	-1.93	5.12	-4.6	0.52
BRFS3	-11.34	-1.17	10.16	8.99	-7.03	4.32	-2.71
CMIG4	0.77	0.47	-0.3	0.17	-0.01	-0.78	-0.79
CPFE3	1.49	1.19	-0.29	0.9	0.95	-0.53	0.42
EGIE3	-2.08	1.26	3.34	4.6	0.13	2.21	2.34
ELET3	2.46	1.03	-1.42	-0.39	1.5	-0.9	0.6
JBSS3	0.37	0.92	0.55	1.47	-0.75	-1.22	-1.97
MULT3	0.83	-0.77	-1.6	-2.37	1.51	0.68	2.19
PETR3	0.75	-1	-1.75	-2.75	-0.8	-1.55	-2.35

5 - Resultados - Custo Operacional

Tabela VIII
MÉDIA DOS VALORES DE CUSTO DE OPERAÇÃO EM REAIS AO SE VARIAR
O TAMANHO DO LOTE L

Ações	RF, L = 1	Custo Operacional				
		L = 1	L = 10	L = 100	L = 1000	L = 10000
ABEV3	4.42	472.40	490.43	670.72	2473.65	20502.98
BRAP4	-1.93	474.19	508.39	850.32	4269.70	38463.29
BRFS3	8.99	477.24	538.88	1155.26	7319.01	68956.58
CMIG4	0.17	471.84	484.87	615.17	1918.13	14947.74
CPFE3	0.9	471.12	477.68	543.21	1198.54	7751.89
EGIE3	4.6	473.79	504.39	810.36	3870.02	34466.63
ELET3	-0.39	473.58	502.20	788.47	3651.14	32277.82
JBSS3	1.47	472.39	490.33	669.71	2463.59	20402.30
MULT3	-2.37	476.66	533.08	1097.23	6738.69	63153.35
PETR3	-2.75	472.99	496.32	729.65	3062.91	26395.49

6 - Conclusão

- Utilização de 10 séries financeiras reais como objeto de estudo
- Desenvolvimento de uma metodologia robusta, desde a coleta dos dados até a validação
- Os resultados corroboram a hipótese levantada de que se pode previamente escolher as ações que terão melhor desempenho de predição, baseando-se nos testes da razão da variância do conjunto de treino
- Os resultados sugerem que quanto melhor o modelo de classificação melhor o retorno financeiro (há exceções)
- Os custos de operação invalidam a estratégia desenvolvida para pequenos lotes

6 - Trabalhos futuros

- Utilizar a mesma metodologia em um número maior de ações visando verificar se os resultados se mantêm
- Utilizar outros períodos de dados (períodos maiores, outros anos)
- Utilizar outros testes sobre a hipótese de passeio aleatório
- Aplicar outros tipos de algoritmos de aprendizado de máquina
 - Redes neurais MLP, SVM, entre outros

Referências

- [1] L. Bachelier, "Theory of speculation," Reprinted in P. Cootner (ed.), 1964, The Character of Stock Market Prices, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1900, pp. 17-78
- [2] Stephen J Taylor, "Modelling Financial Time Series," World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., pp. 12-13, 2007
- [3] Lo, Andrew W and MacKinlay, A. Craig, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence From a Simple Specification Test," National Bureau of Economic Research, 1988
- [4] Charles, Amelie and Darné, Olivier, "Variance-Ratio Tests of Random Walk: An Overview," Journal of Economic Surveys, pp. 503-527, 2009
- [5] Hochreiter, Sepp and Schmidhuber, Jürgen, "Long short-term memory," Neural computation, pp. 1735-1780, 1997
- [6] Kamijo, K. and Tanigawa, T. "Stock price pattern recognition-a recurrent neural network approach," Neural Networks, IJCNN International Joint Conference on, pp. 215-221, 1990
- [7] Jung-Hua Wang and Jia-Yann Leu "Stock market trend prediction using ARIMA-based neural networks," Neural Networks, IEEE International Conference on, pp. 2160-2165, 1996
- [8] D. K. Bebarta and Birendra Biswal and P. K. Dash "Polynomial Based Functional Link Artificial Recurrent Neural Network adaptive System for predicting Indian Stocks," International Journal of Computational Intelligence Systems, pp. 1004-1016, 2015
- [9] Rather, Akhter Mohiuddin and Agarwal, Arun and Sastry, V.N. "Recurrent Neural Network and a Hybrid Model for Prediction of Stock Returns," Expert Syst. Appl., pp. 3234-3241, 2015
- [10] K. Chen and Y. Zhou and F. Dai "A LSTM-based method for stock returns prediction: A case study of China stock market," IEEE International Conference on Big Data (Big Data), pp. 2823-2824, 2015
- [11] Z. Zhao and R. Rao and S. Tu and J. Shi "Time-Weighted LSTM Model with Redefined Labeling for Stock Trend Prediction," IEEE 29th International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI), pp. 1210-1217, 2017

Referências

- [12] S. Yao and L. Luo and H. Peng“High-Frequency Stock Trend Forecast Using LSTM Model,”13th International Conference on Computer Science Education (ICCSE), pp. 1-4, 2018
- [13] X. Shao and D. Ma and Y. Liu and Q. Yin“Short-term forecast of stock price of multi-branch LSTM based on K-means,”4th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI), pp. 1546-1551, 2017
- [14] A. J. P. Samarawickrama and T. G. I. Fernando“A recurrent neural network approach in predicting daily stock prices an application to the Sri Lankan stock market,”IEEE International Conference on Industrial and Information Systems (ICIIS), pp. 1-6, 2017
- [15] Chow, K. V., Denning, K. C.”A simple multiple variance ratio test,” Journal of Econometrics, pp. 385–401, 1993
- [16] Wright, J. H.”Alternative variance-ratio tests using ranks and signs,” Journal of Business Economic Statistics, pp. 1-9, 2000
- [17] Whang, Y. J., Kim, J.”A multiple variance ratio test using subsampling,” Economics Letters, pp. 225–230, 2003
- [18] Cont, R.”Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues,” Quantitative Finance, pp. 223-236, 2001
- [19] Hafiz A.A.B. Hoque and Jae H. Kim and Chong Soo Pyun "A comparison of variance ratio tests of random walk: A case of Asian emerging stock markets,"International Review of Economics Finance, pp. 488-502, 2007
- [20] Jae H. Kim and Abul Shamsuddin "Are Asian stock markets efficient? Evidence from new multiple variance ratio tests,"Journal of Empirical Finance, pp. 518-532, 2008
- [21] Stephen J Taylor, “Asset Price Dynamics, Volatility and Prediction,”Princeton University Press, pp. 102-103, 2005

Apêndice - Testes da razão da variância

- Variância da soma de 1 período : $V(1) = var(r_t)$
- Variância da soma de 2 períodos consecutivos:

$$V(2) = var(r_t + r_{t+1}) = var(r_t) + var(r_{t+1}) + 2cov(r_t, r_{t+1}) = (2 + 2\rho_1)V(1)$$

- Razão entre ambos: $VR(2) = \frac{V(2)}{2V(1)} = 1 + \rho_1$.
- Se a hipótese for verdadeira a correlação é igual a zero

Apêndice - Testes da razão da variância

- Considerando a soma de N períodos consecutivos: $V(N) = V(1)[N + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{j-i}]$
- A razão das variâncias é igual a:

$$VR(N) = \frac{V(N)}{NV(1)} = VR(N) = 1 + \frac{2}{N} \sum_{\tau=1}^{N-1} (N - \tau) \rho_{\tau}$$

- Se a hipótese for verdadeira: $\frac{V(N)}{NV(1)} = 1$
- Se a hipótese for falsa: $\frac{V(N)}{NV(1)} = 1 + \frac{2}{N} \sum_{\tau=1}^{N-1} (N - \tau) \rho_{\tau}$

Apêndice - Testes da razão da variância

$$V(1) = \sum (r_t - \bar{r})^2 \div (n - 1)$$

$$V(N) = \frac{n}{(n - N)(n - N + 1)} \sum_{t=1}^{n-N+1} (r_t + r_{t+1} + \dots + r_{t+N-1} - N\bar{r})^2$$

$$VR(x; N) = \left\{ \frac{1}{TN} \sum_{t=N}^T (x_t + x_{t-1} + \dots + x_{t-N+1} - N\hat{\mu})^2 \right\} \div \left\{ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu})^2 \right\}$$

$$M1(N) = \frac{VR(r, N) - 1}{\phi(N)^{0.5}}$$

$$\phi(N) = \frac{2(N - 1)(N - 1) - 1}{3NT}$$

Apêndice - Testes da razão da variância

$$M2(N) = \frac{VR(r, N) - 1}{\phi^*(N)^{0.5}} \quad \phi(N) = \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{2(N-j)}{N} \right]^2 \delta(j)$$

$$\delta(j) = \left\{ \sum_{t=j+1}^T (r_t - \hat{u})^2 (r_{t-j} - \hat{u})^2 \right\} \div \left\{ \left[\sum_{t=1}^T (r_t - \hat{u})^2 \right]^2 \right\}.$$

Apêndice - Testes da razão da variância

$$R1(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{1,t} + \dots + q_{1,t-N+1})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{1t})^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

$$R2(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{2,t} + \dots + q_{2,t-N+1})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (q_{2t})^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

$$q_{1t} = \frac{q(r_t) - \frac{T+1}{2}}{\sqrt{(T-1)(T+1)/12}}$$

$$q_{2t} = \Phi^{-1} * \frac{q(r_t)}{T+1}$$

Apêndice - Testes da razão da variância

$$S1(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t + \dots + s_{t-N+1})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t)^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

$$S2(N) = \left(\frac{(TN)^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t(\bar{u}) + \dots + s_{t-N+1}\bar{u})^2 - 1}{T^{-1} \sum_{t=N}^T (s_t(\bar{u}))^2} \right) * \phi(N)^{-0.5}$$

em que $s_t = 2u(r_t, 0)$, $s_t(\bar{u}) = 2u(r_t, \bar{u})$ e $u(r_t, p) = 0.5$ se $r_t > p$ ou $u(r_t, p) = -0.5$ caso contrário.